Математические модели деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала

К.т.н. В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Известно, что при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости оболочек, находящихся под действием длительных нагрузок, необходимо учитывать, что с течением времени в материале проявляется свойство ползучести, что приводит к снижению реальной несущей способности оболочек, найденной при упругом поведении материала.

Ползучесть материалов является важнейшим реологическим свойством твердых тел. Оно заключается в том, что под действием длительных нагрузок с течением времени происходит медленный непрерывный рост деформации (даже при постоянных напряжениях).

Рассматриваем оболочки общего вида, подразумевая достаточно широкий класс оболочек наиболее распространенных частных видов: пологих на прямоугольном плане и вращения (в частности, цилиндрических, конических, сферических, торообразных), а также других оболочек.

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной *h* принимаем за отсчетную поверхность *z*=0.

Полагаем, что оси *x* и *y* криволинейной ортогональной системы координат ($0 \le x \le a, 0 \le y \le b$) направлены по линиям кривизны срединной поверхности (параллелям и меридианам в случае оболочки вращения), а ось *z* – по нормали к поверхности *z* = 0 в сторону ее вогнутости.

Со стороны вогнутости оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий. Ребра задаем дискретно с помощью функции $H = H(x, y)$, характеризующей распределение ребер по оболочке и их высоту [1, 2].

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$ и $-h/2 \le z \le h/2 + h$.

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее контура.

Будем учитывать геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости ребер, поперечные сдвиги.

Как известно, математическая модель деформирования оболочки включает в себя:

- геометрические соотношения (связь деформаций и перемещений);
- физические соотношения (связь напряжений и деформаций);
- функционал полной энергии деформации оболочки, из условия минимума которой могут быть получены уравнения устойчивого равновесия или движения данной оболочки.

1. Геометрические соотношения для ребристых оболочек при больших перемещениях

Геометрические соотношения в срединной поверхности *z* = 0 получаются с помощи операции ковариантного дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}V - K_x W + \frac{1}{2}\theta_1^2; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}U - K_y W + \frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}U + \frac{\partial B}{\partial x}V\right) + \theta_1\theta_2,$$

где ε_x, ε_y и γ_{xy} – деформации удлинения вдоль осей *x*, *y* и, соответственно, сдвига в касательной плоскости (*dx*,*dy*); *U*, *V* и *W* – компоненты вектора перемещений (перемещения) точек вдоль осей *x*, *y* и *z* соответственно; *A* и *B* – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например, *A*=*B*=1 для пологой оболочки и *A=const*, *B=B(x)* в случае оболочки вращения); $K_x = 1/R_1$, $K_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1, R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей *x* и *y* соответственно;

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + K_x U\right);\ \theta_2 = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + K_y V\right).$$

В указанных соотношениях квадратичные члены (от угловых перемещений) характеризуют геометрическую нелинейность, которую следует учитывать в случаях, когда квадратом длины вектора перемещений нельзя пренебречь в сравнении с его длиной [в частности, когда поперечные перемещения W (прогибы) соизмеримы с толщиной оболочки h].

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = k f(z)(\psi_x - \theta_1);\ \gamma_{yz} = k f(z)(\psi_y - \theta_2).$$

Здесь ψ_x и ψ_y – углы поворота отрезка нормали в плоскостях (dx,dz) и (dy,dz) соответственно; $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} вдоль оси z; k – константа.

Будем полагать, что материалы обшивки и ребер имеют одинаковые (или близкие) сдвиговые жесткости. Тогда функция что $f(z)$ может быть принята в виде [1, 2]

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2}\left(z + \frac{h}{2}\right)\left(z - \frac{h}{2} - H\right).$$

Эта функция при $z = -h/2$ и $z = h/2 + H$ обращается в нуль и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h+H}\int_{-h/2}^{h/2+H} f(z)dz = 1;\ \frac{1}{h+H}\int_{-h/2}^{h/2+H} f^2(z)dz = \frac{1}{k} \quad (k = 5/6).$$

Перемещения в слое $z \neq 0$ определяем по формулам

$$U^z = U + z\psi_x,\ V^z = V + z\psi_y,\ W^z = W,$$

откуда для деформаций в слое $z \neq 0$ получаем соотношения в виде

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1,\ \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2,\ \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где χ_1, χ_2 и χ_{12} – функции изменения кривизны и кручения, определяемые, как легко видеть, по формулам:

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\psi_y;\ \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\psi_x;$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\psi_y\right).$$

2. Физические соотношения для ортотропных и изотропных оболочек при учете ползучести материала

Как известно, в настоящее время существует несколько теорий ползучести, каждая из которых применима для определенного круга материалов в зависимости от многих факторов.

Для металлов (ползучесть в которых развивается только при высоких температурах) обычно пользуются *теорией течения*, которая хорошо описывает ползучесть при напряжениях, изменяющихся монотонно и медленно, но основана на ярко выраженной нелинейной зависимости $d\varepsilon/dt = f(\sigma, t)$.

Более полное описание ползучести дает *теория упрочения*, согласно которой $d\varepsilon/dt = f(\sigma, d\varepsilon/dt)$. Теория упрочения правильно улавливает особенности ползучести при изменяющихся напряжениях и удобна для анализа кратковременной ползучести при высоком уровне напряжений, однако её применение связано с большими математическими трудностями.

В механике полимеров и для бетона (в области эксплутационных значений напряжений $\sigma < 0{,}5\,\sigma_T$ и, соответственно, $\sigma < 0{,}5\,R_{пр}$, где σ_T – предел текучести; $R_{пр}$ – призменная прочность бетона) широко используется линейный вариант *теории наследственности* Больцмана – Вольтерра, основанный на принципе суперпозиции деформаций и учитывающий историю напряженного состояния.

В соответствии с линейной теорией наследственности физические соотношения для изотропного материала в работе В.И. Климанова и С.А. Тимашева [3] записаны в виде

$$\varepsilon_x^z(t)=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)+\frac{1}{E}\int_{t_0}^{t}(\sigma_x-\mu\sigma_y)K_1(t,\tau)d\tau;$$

$$\varepsilon_y^z(t)=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)+\frac{1}{E}\int_{t_0}^{t}(\sigma_y-\mu\sigma_x)K_1(t,\tau)d\tau;$$

$$\gamma_{xy}^z(t)=\frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}+\frac{1}{G_{12}}\int_{t_0}^{t}\tau_{xy}K_2(t,\tau)d\tau; \quad (1)$$

$$\gamma_{xz}(t)=\frac{1}{G_{13}}\tau_{xz}+\frac{1}{G_{13}}\int_{t_0}^{t}\tau_{xz}K_2(t,\tau)d\tau,$$

$$\gamma_{yz}(t)=\frac{1}{G_{23}}\tau_{yz}+\frac{1}{G_{23}}\int_{t_0}^{t}\tau_{yz}K_2(t,\tau)d\tau,$$

где $K_1(t,\tau)$ и $K_2(t,\tau)$ – суммарные функции влияния (ядра ползучести) при растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно; E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; G_{12} = G_{13} = G_{23} = $E/2(1+\mu)$ – модули сдвига.

Обратные к (1) соотношения принимают вид

$$\sigma_x=G_1\left[\varepsilon_x^z+\mu\varepsilon_y^z-\int_{t_0}^{t}(\varepsilon_x^z+\mu\varepsilon_y^z)R_1(t,\tau)d\tau\right];$$

$$\sigma_y=G_2\left[\varepsilon_y^z+\mu\varepsilon_x^z-\int_{t_0}^{t}(\varepsilon_y^z+\mu\varepsilon_x^z)R_1(t,\tau)d\tau\right];$$

$$\tau_{xy}=G_{12}\left[\gamma_{xy}^z-\int_{t_0}^{t}\gamma_{xy}^zR_2(t,\tau)d\tau\right]; \quad (2)$$

$$\tau_{xz}=G_{13}\left[\gamma_{xz}-\int_{t_0}^{t}\gamma_{xz}R_2(t,\tau)d\tau\right];$$

$$\tau_{yz}=G_{23}\left[\gamma_{yz}-\int_{t_0}^{t}\gamma_{yz}R_2(t,\tau)d\tau\right],$$

где $R_1(t,\tau)$ и $R_2(t,\tau)$ – функции влияния (ядра релаксации) материала при растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно, τ – переменная интегрирования (имеющая смысл времени); $G_1=G_2=E/(1-\mu^2)$.

Для полимерных материалов (в частности, оргстекла) функции влияния имеют вид [3]

$$K(t)=\frac{\exp(-\beta t)}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[A\cdot\Gamma(\alpha)]^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}; \quad R(t)=A\cdot\exp(-\beta t)\cdot t^{\alpha-1}, \quad (3)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция; α, β и A – экспериментальные параметры.

Некоторые значения параметров α, β и A для оргстекла приведены в табл. 1, фрагментарно заимствованной из монографии [3].

Таблица 1. Механические характеристики оргстекла

E, **МПа**	**Функции влияния**	**Коэффициент функции влияния**		
		α	β	A
$0{,}33126\cdot10^4$	K_1, R_1	0,05	$0{,}045\cdot10^{-3}$	0,026945
	K_2, R_2	0,20	$0{,}833\cdot10^{-3}$	0,013184

Современное состояние теории ползучести, наиболее полно учитывающей особенности деформирования бетона, обязано трудам Г.Н. Маслова, Н.Х. Арутюняна, А.А. Гвоздева, И.Е. Прокоповича, И.И. Улицкого, В.М. Бондаренко, С.В. Бондаренко, Р.С. Санжаровского, В.Д. Харлаба и др.

Очень хорошо соответствует опытным данным *теория упругоползучего тела*, основанная на линейном варианте наследственной теории и учитывающая старение бетона [4].

Теория упругоползучего тела (называемая иначе *наследственной теорией старения*) подразумевает следующие известные соотношения для полных деформаций удлинения ε и сдвига γ (уравнения Г.Н.°Маслова – Н.Х. Арутюняна):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \sigma(s) \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{E(s)} + C(t,s)\right] ds \,; \; \gamma(t) = \frac{\tau(t)}{G(t)} - \int_{t_0}^{t} \tau(s) \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{G(s)} + \omega(t,s)\right] ds \,, \quad (4)$$

где t_0 – возраст бетона; $G(t)$ – модуль сдвига; s – переменная интегрирования (время); $C(t, s)$ и $\omega(t, s)$ – меры ползучести бетона при растяжении (сжатии) и сдвиге, причем $\omega(t, s) = 2C(t, s)$.

В правых частях соотношений (4) первые члены представляют собой упругомгновенную деформацию, а вторые (интегральные) – деформацию ползучести.

Соотношение (4) в общем случае можно записать в виде [5]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma(s)}{E(s)} K_1(t,s) ds \,; \;\; \gamma\;(t) = \frac{\tau(t)}{G(t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\tau(s)}{G(s)} K_2(t,s) ds \,,$$

где $K_1(t,s) = -E(s)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{E(s)} + C(t,s)\right]$; $K_2(t,s) = -G(s)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{G(s)} + \omega(t,s)\right]$. (5)

Так как при $t_0 \le s \le t$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{E(s)} + C(t,s)\right] < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{G(s)} + \omega(t,s)\right] < 0 \,,$$

полные деформации всегда больше упругомгновенных.

Учитывая, что деформации ползучести зависят от возраста бетона в момент приложения нагрузки τ и продолжительности действия нагрузки $t - \tau$, Н.Х. Арутюнян предложил представить меру ползучести бетона $C(t,\tau)$ в виде [4]

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau) \cdot f(t-\tau) \,,$$

где $\varphi(\tau)$ – корректирующая функция возраста (описывающая старение в условиях постоянной влажности и температуры), которая по определению убывает монотонно (при увеличении τ), асимптотически стремясь к константе C_0, характеризующей старый бетон; $f(t-\tau)$ – наследственная функция (описывающая рост деформации ползучести со временем), удовлетворяющая неравенству $0 \le f(t-\tau) \le 1$ на промежутке $0 \le (t-\tau) < \infty$.

Например, для относительно старого бетона ($28 \le \tau < 360 сут$) можно принять [4 – 7]:

- по Н.Х. Арутюняну

$$\varphi(\tau) = C_0 + A/\tau \,; \quad f(t-\tau) = 1 - \exp(-\gamma(t-\tau)) \,;$$

- по И.Е. Прокоповичу и И.И. Улицкому

$$\varphi(\tau) = C_0 + A \cdot \exp(-\gamma\tau) \,; f(t-\tau) = 1 - \exp(-\gamma(t-\tau)) \,,$$

где C_0, A и γ – положительные коэффициенты, определяемые опытным путем [4 – 7].

Тогда для (совсем) старого бетона ($\tau \ge 360 сут$)

$$C(t,\tau) = C_0 \cdot \left[1 - \exp(-\gamma(t-\tau))\right]. \quad (6)$$

Некоторые значения констант C_0, A и γ, входящих в функции $\varphi(\tau)$ и $f(t-\tau)$ по Н.Х. Арутюняну, полученные для разных бетонов при температуре t = 20°C и неизолированных на воздухе условиях хранения, представлены в табл. 2, фрагментарно заимствованной из монографии [7].

Таблица 2. Некоторые значения констант C_0, A и γ

Площадь поперечного квадратного сечения образца, см^2	γ, 1/сут	$C_0 \cdot 10^5$ см^2/кгс	$A \cdot 10^5$ (см^2/кгс)/сут
100	0,009	0,68	1,29
49	0,014	1,02	0,82

Из рассмотрения табл. 2 видно, что чем больше площадь поперечного сечения образца, тем меньше в нем проявляется ползучесть.

Весьма существенно, что модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ некоторых материалов зависит, вообще говоря, от времени t: $E = E(t)$ и $\mu = \mu(t)$.

Так, для стареющего бетона справедлива формула [6]

$$E(\tau) = E(\infty)\cdot\left[1 - 0{,}372\exp(-0{,}0259\tau)\right],\ \tau \geq 7сут,$$

где $E(\infty)$ – предельное значение модуля упругости (модуля упругомгновенного деформирования) $E(\tau)$, соответствующее старому бетону.

Практически $E(\infty) = E(\tau)$ при $\tau \geq 360сут$.

Например:

- для бетона класса В22,5 (марки М300)

  $E(\infty)$ = 3,54 · 104 МПа; при $\tau = 7\ сут$ Е (7) = 2,44 · 104 МПа, при $\tau = 28\ сут$ Е (28) = 2,90 · 104 МПа (начальный модуль), при $\tau = 100\ сут$ Е(100) = 3,44 · 104 МПа, при $\tau = 200\ сут$ Е(200) = 3,53· 104 МПа, при $\tau = 360\ сут$ Е(360) = $E(\infty)$ = 3,54· 104 МПа;
- для бетона класса В30 (марки М400)

  $E(\infty)$ = 4,02 · 104 МПа; при $\tau = 7\ сут$ Е (7) = 2,77 · 104 МПа, при $\tau = 28\ сут$ Е (28) = 3,30 · 104 МПа (начальный модуль), при $\tau = 100\ сут$ Е(100) = 3,91 · 104 МПа, при $\tau = 200\ сут$ Е(200) = 4,01· 104 МПа, при $\tau = 360\ сут$ Е(360) = $E(\infty)$ = 4,02· 104 МПа.

Из соотношений (5) для старого бетона ($\tau \geq 360сут$) получаем

$$K_1(t,\tau) = -E\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau},\ K_2(t,\tau) = -G\frac{\partial\omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -2G\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau},$$

где $E = E(\infty)$; $G = G(\infty)$ – предельное значение модуля сдвига, соответствующее старому бетону.

В частности, на основании формулы (6) для старого бетона имеем

$$K_1(t,\tau) = \gamma E C_0 \exp(-\gamma(t-\tau)),\ K_2(t,\tau) = 2K_1(t,\tau)\cdot\frac{G}{E},$$

откуда получаем (как резольвенты интегральных уравнений (4))

$$R_1(t,\tau) = \gamma E C_0 \exp(-\gamma(1+EC_0)\cdot(t-\tau)),\ R_2(t,\tau) = 2R_1(t,\tau)\cdot\frac{G}{E}.$$

Весьма важен учет ползучести при анализе оболочек, выполненных из ортотропных материалов, которые широко применяются при строительстве как временных, так и капитальных сооружений.

К ортотропным материалам относятся железобетон (при различной жесткости армирования во взаимно ортогональных направлениях x и y), многие полимеры (пластмассы и т. п.), дерево и др.

Физические соотношения для оболочек, выполненных из ортотропных материалов в общем случае (при изменяющихся со временем t продольных модулях упругости $E_1 = E_1(t)$, $E_2 = E_2(t)$ и коэффициентах Пуассона $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\mu_2 = \mu_2(t)$) при произвольных функциях влияния можно записать в виде

$$\varepsilon_x^z(t)=\frac{1}{E_1(t)}[\sigma_x(t)-\mu_1(t)\sigma_y(t)]+\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma_x(\tau)-\mu_1(\tau)\sigma_y(\tau)}{E_1(\tau)}K_1(t,\tau)d\tau;$$

$$\varepsilon_y^z(t)=\frac{1}{E_2(t)}[\sigma_y(t)-\mu_2(t)\sigma_x(t)]+\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma_y(\tau)-\mu_2(\tau)\sigma_x(\tau)}{E_2(\tau)}K_1(t,\tau)d\tau; \quad (7)$$

$$\gamma_{xy}^z(t)=\frac{1}{G_{12}(t)}\tau_{xy}(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\tau_{xy}(\tau)}{G_{12}(\tau)}K_2(t,\tau)d\tau;$$

$$\gamma_{xz}(t)=\frac{1}{G_{13}(t)}\tau_{xz}(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\tau_{xz}(\tau)}{G_{13}(\tau)}K_2(t,\tau)d\tau;$$

$$\gamma_{yz}(t)=\frac{1}{G_{23}(t)}\tau_{yz}(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\tau_{yz}(\tau)}{G_{23}(\tau)}K_2(t,\tau)d\tau.$$

Обратные к (7) соотношения имеют вид

$$\sigma_x=G_1(t)\big(\varepsilon_x^z(t)+\mu_2(t)\varepsilon_y^z(t)\big)-\int_{t_0}^{t}G_1(t)\big(\varepsilon_x^z(\tau)+\mu_2(\tau)\varepsilon_y^z(\tau)\big)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$\sigma_y=G_2(t)\big(\varepsilon_y^z(t)+\mu_1(t)\varepsilon_x^z(t)\big)-\int_{t_0}^{t}G_2(t)\big(\varepsilon_y^z(\tau)+\mu_1(\tau)\varepsilon_x^z(\tau)\big)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$\tau_{xy}=G_{12}(t)\gamma_{xy}^z(t)-\int_{t_0}^{t}G_{12}(\tau)\gamma_{xy}^z(\tau)R_2(t,\tau)d\tau; \quad (8)$$

$$\tau_{xz}=G_{13}(t)\gamma_{xz}(t)-\int_{t_0}^{t}G_{13}(\tau)\gamma_{xz}(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;$$

$$\tau_{yz}=G_{23}(t)\gamma_{xz}(t)-\int_{t_0}^{t}G_{23}(\tau)\gamma_{yz}(\tau)R_2(t,\tau)d\tau,$$

где $R_1(t,\tau),\ R_2(t,\tau)$ – функции влияния (ядро релаксации) материала соответственно при растяжении (сжатии) и сдвиге; $G_1(t)=\dfrac{E_1(t)}{1-\mu_1(t)\mu_2(t)}$, $G_1(t)=\dfrac{E_2(t)}{1-\mu_1(t)\mu_2(t)}$; $G_{12}(t)$, $G_{13}(t)$, $G_{23}(t)$ – переменные (зависящие от *t*) модули сдвига.

Отметим, что в каждом слагаемом соотношений (8) переменные деформации $\varepsilon_x^z(t),\ \varepsilon_y^z(t),\ \gamma_{xy}^z(t)$, $\gamma_{xz}(t)$ и $\gamma_{yz}(t)$ представляют собой полные деформации.

С целью упрощения вида физических соотношений для общего случая ортотропного материала оболочки условимся опускать временной аргумент *t* деформаций, модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и т. д.

Придадим выражениям (8) следующий вид:

$$\sigma_x=\sigma_x^{\text{e}}-\sigma_x^{\text{c}},\quad \sigma_y=\sigma_y^{\text{e}}-\sigma_y^{\text{c}},\quad \tau_{xy}=\tau_{xy}^{\text{e}}-\tau_{xy}^{\text{c}},$$

$$\tau_{xz}=\tau_{xz}^{\text{e}}-\tau_{xz}^{\text{c}},\quad \tau_{yz}=\tau_{yz}^{\text{e}}-\tau_{yz}^{\text{c}}, \quad (9)$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие (отмечены индексом «*е*») определяются с помощью формул:

$$\sigma_x^{\text{e}}=G_1(\varepsilon_x^z+\mu_2\varepsilon_y^z),\quad \sigma_y^{\text{e}}=G_2(\varepsilon_y^z+\mu_1\varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy}^{\text{e}}=G_{12}\gamma_{xy}^z,\quad \tau_{xz}^{\text{e}}=G_{13}\gamma_{xz},\quad \tau_{yz}^{\text{e}}=G_{23}\gamma_{yz}, \quad (10)$$

а составляющие, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «*c*»), вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_x^c = \int_{t_0}^{t} G_1\left(\varepsilon_x^z + \mu_2\varepsilon_y^z\right)R_1(t,\tau)d\tau\,,\quad \sigma_y^c = \int_{t_0}^{t} G_2\left(\varepsilon_y^z + \mu_1\varepsilon_x^z\right)R_1(t,\tau)d\tau\,;$$

$$\tau_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} G_{12}\gamma_{xy}^z R_2(t,\tau)d\tau\,,\quad \tau_{xz}^c = \int_{t_0}^{t} G_{13}\gamma_{xz} R_2(t,\tau)d\tau\,,\quad \tau_{yz}^c = \int_{t_0}^{t} G_{23}\gamma_{yz} R_2(t,\tau)d\tau\,. \quad (11)$$

В случае изотропного материала физические соотношения являются частным случаем соотношений (9)–(11) при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, а также $G_1 = G_2 = E/(1-\mu^2)$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = E/2(1+\mu)$.

Зачастую изотропным материалом можно считать старый бетон (железобетон), физические соотношения для которого имеют вид (2).

Интегрируя напряжения (9) по *z* в пределах от $-h/2$ до $h/2 + H$, с учетом (10) и (11) получим выражения для усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к срединной поверхности и приходящихся на единицу длины сечения) в следующем виде:

$$N_x = N_x^e - N_x^c\,,\quad N_y = N_y^e - N_y^c\,,\quad N_{xy} = N_{xy}^e - N_{xy}^c\,,$$

$$M_x = M_x^e - M_x^c\,,\quad M_y = M_y^e - M_y^c\,,\quad M_{xy} = M_{xy}^e - M_{xy}^c \quad (12)$$

$$Q_x = Q_x^e - Q_x^c\,,\quad Q_y = Q_y^e - Q_y^c\,,$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие (с индексом «*e*») вычисляются по формулам

$$N_x^e(t) = G_1\left[(h+\bar F)(\varepsilon_x + \mu_2\varepsilon_y) + \bar S(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$N_y^e(t) = G_2\left[(h+\bar F)(\varepsilon_y + \mu_1\varepsilon_x) + \bar S(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$N_{xy}^e(t) = G_{12}\left[(h+\bar F)\gamma_{xy} + 2\bar S\chi_{12}\right]. \quad (13)$$

$$M_x^e(t) = G_1\left[\bar S(\varepsilon_x + \mu_2\varepsilon_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar J\right)(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$M_y^e(t) = G_2\left[\bar S(\varepsilon_y + \mu_1\varepsilon_x) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar J\right)(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$M_{xy}^e(t) = G_{12}\left[\bar S\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar J\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_x^e(t) = kG_{13}(h+\bar F)\left(\psi_x - \theta_1\right);\quad Q_y^e(t) = kG_{23}(h+\bar F)\left(\psi_y - \theta_2\right),$$

а составляющие внутренних силовых факторов, обусловленные ползучестью материала (с индексом «*c*»), определяются с помощью выражений

$$N_x^c = \int_{t_0}^{t} N_x^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau\,;\quad N_y^c = \int_{t_0}^{t} N_y^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau\,;$$

$$N_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} N_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau\,;\quad M_x^c = \int_{t_0}^{t} M_x^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau\,; \quad (14)$$

$$M_y^c = \int_{t_0}^{t} M_y^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau\,;\quad M_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} M_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau\,;$$

$$Q_x^c(t) = \int_{t_0}^{t} Q_x^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau\,;\quad Q_y^c = \int_{t_0}^{t} Q_y^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau\,.$$

В соотношениях (13) и (14) $\bar F$, $\bar S$, $\bar J$ – площадь поперечного (или продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно:

$$\bar F = \int_{h/2}^{h/2+H} dz\,,\quad \bar S = \int_{h/2}^{h/2+H} z\,dz\,,\quad \bar J = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz\,.$$

3. Функционал полной энергии деформации оболочки при учете ползучести материала

Известно, что функционал $Э$ полной энергии деформации оболочки для задач статики представляет собой разность потенциальной энергии Π и работы внешних сил A^E:

$$Э = \Pi - A^E,$$

где:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy}\gamma_{xy}^z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}]d\Omega,$$

$$A^E = \iint\limits_{S} (P_x U + P_y V + qW)dS.$$

Здесь P_x, P_y и q – компоненты внешней нагрузки в направлении осей x, y и z; Ω – область в пространстве (x, y, z); S – область в плоскости (x, y); $d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ($d\Omega = ABdxdydz$; $dS = ABdxdy$).

На основании соотношений (8) представим функционал $Э$ в виде [8 – 11]

$$Э = Э_e - Э_c,$$

где (в рассматриваемой системе координат):

$$Э_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} [\sigma_x^{e} \varepsilon_x^z + \sigma_y^{e} \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^{e}\gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^{e}\gamma_{xz} + \tau_{xz}^{e}\gamma_{yz}]d\Omega - \iint\limits_{S} (P_x U + P_y V + qW)dS \quad (15)$$

соответствует линейно упругой (или упругомгновенной) постановке задачи, а функционал

$$Э_c = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} [\sigma_x^{c} \varepsilon_x^z + \sigma_y^{c} \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^{c}\gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^{c}\gamma_{xz} + \tau_{xz}^{c}\gamma_{yz}]d\Omega \quad (16)$$

описывает ползучесть в материале оболочки.

Проинтегрируем функционалы (15) и (16) по переменной z ($-h/2 \le z \le h/2+H$). В результате получим:

$$Э_{e} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \Big\{N_x^{e}\varepsilon_x + N_y^{e}\varepsilon_y + N_{xy}^{e}\gamma_{xy} + M_x^{e}\chi_1 + M_y^{e}\chi_2 + 2M_{xy}^{e}\chi_{12} + Q_x^{e}(\psi_x - \theta_1) +$$

$$+ Q_y^{e}(\psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW)\Big\}ABdxdy.$$

$$Э_{c} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \Big\{N_x^{c}\varepsilon_x + N_y^{c}\varepsilon_y + N_{xy}^{c}\gamma_{xy} + M_x^{c}\chi_1 + M_y^{c}\chi_2 + 2M_{xy}^{c}\chi_{12} + Q_x^{c}(\psi_x - \theta_1) +$$

$$+ Q_y^{c}(\psi_y - \theta_2)\Big\}ABdxdy.$$

Функционалы $Э_e$ и $Э_c$, выраженные через деформации с учетом (13) и (14), примут вид

$$Э_{e} = \frac{G_1}{2}\int_0^a\int_0^b \Big\{(h+\overline{F})\Big[\varepsilon_x^2 + (\mu_2 + \overline{G}_2\mu_1)\varepsilon_x\varepsilon_y + \overline{G}_2\varepsilon_y^2 + \overline{G}_{12}\gamma_{xy}^2 + \overline{G}_{13}k(\psi_x - \theta_1)^2 +$$

$$+ \overline{G}_{23}k(\psi_y - \theta_2)^2\Big] + \overline{S}\Big[2\varepsilon_x\chi_1 + (\mu_2 + \overline{G}_2\mu_1)\varepsilon_x\chi_2 + (\mu_2 + \overline{G}_2\mu_1)\varepsilon_y\chi_1 + 2\overline{G}_2\varepsilon_y\chi_2 +$$

$$+ 2\overline{G}_{12}\gamma_{xy}2\chi_{12}\Big] + \left(\frac{h^3}{12} + J\right)\Big[\chi_1^2 + (\mu_2 + \overline{G}_2\mu_1)\chi_1\chi_2 + \overline{G}_2\chi_2^2 + \overline{G}_{12}2\chi_{12}2\chi_{12}\Big] -$$

$$- \frac{2}{G_1}\big(P_x U + P_y V + qW\big)\Big\}ABdxdy, \quad (13)$$

$$Э_{c} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^t G_1\Big\{\Big[(h+\overline{F})\big(\varepsilon_x^2 + (\mu_2 + \overline{G}_2\mu_1)\varepsilon_x\varepsilon_y + \overline{G}_2\varepsilon_y^2\big) + \overline{S} \times$$

$$\times\left(2\varepsilon_x\chi_1+(\mu_2+\overline{G}_2\mu_1)\left(\varepsilon_x\chi_2+\varepsilon_y\chi_1\right)+2\overline{G}_2\varepsilon_y\chi_2\right)+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\left(\chi_1^2+(\mu_2+\overline{G}_2\mu_1)\chi_1\chi_2+\overline{G}_2\chi_2^2\right)\Bigg]\times$$

$$\times R_1(t,\tau)+\Big[(h+\overline{F})\left(\overline{G}_{12}\gamma_{xy}^2+\overline{G}_{13}k\left(\psi_x-\theta_1\right)^2+\overline{G}_{23}k\left(\psi_y-\theta_2\right)^2\right)+$$

$$+\overline{S}(2\overline{G}_{12}\gamma_{xy}2\chi_{12})+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\overline{G}_{12}4\chi_{12}{}^2\Big]R_2(t,\tau)\Bigg\}ABdxdyd\tau\,. \quad (14)$$

В формулах (13) и (14)

$$\overline{G}_2=\frac{G_2}{G_1},\quad \overline{G}_{12}=\frac{G_{12}}{G_1},\quad \overline{G}_{13}=\frac{G_{13}}{G_1},\quad \overline{G}_{23}=\frac{G_{23}}{G_1}\,.$$

Граничные условия (определяемые способом закрепления контура оболочки) считаются заданными.

Таким образом, математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала построена.

Алгоритм исследования предложенной математической модели и некоторые результаты анализа устойчивости упругих оболочек при длительных нагрузках приведены в работах автора [8 –11].

Литература

1. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.-СПб, 2002.
2. Жгутов В.М Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. … канд. техн. наук: 05.23.17: СПб, 2004.
3. Климанов В.И., Тимашев С.А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. Свердловск, 1985.
4. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М., 1982.
5. Беглов А.Д., Санжаровский Р.С. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и Евростандарты. – М.-СПб., 2006.
6. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., 1963.
7. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. М., 1980.
8. Жгутов В.М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. СПб., 2008. С. 110-131.
9. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4. Орел, 2007. С.20–23.
10. Жгутов В.М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. М., 2008. С. 341-346.
11. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале ребристых пологих оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1 (в печати). С. 4-12.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru