

## Уточнение кинематических характеристик турбулентного течения

*К.т.н., профессор Ю.В. Брянская,*

*ФБГОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»*

**Ключевые слова:** течение в трубах; теория турбулентности; профиль скорости; параметр Кармана; гидравлическое сопротивление

Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля – Никурадзе, которая позволила получить распределение скоростей, согласующееся с закономерностями сопротивления, почти столетие сохраняет свою актуальность. Эта теория, являющаяся важным звеном в механике жидкости, основана на ряде гипотез, сформулированных Л. Прандтлем [1], среди которых основополагающей является гипотеза о длине пути перемешивания. Согласно этой гипотезе длина пути перемешивания масс жидкости в турбулентном потоке увеличивается пропорционально расстоянию от твердой границы потока с коэффициентом пропорциональности, называемым параметром Кармана, который считается постоянным. При постоянном значении параметра Кармана и так называемых «вторых констант турбулентности» достигается согласие закономерностей сопротивления и измеренных распределений скоростей в потоке, что считается важным достижением полуэмпирической теории турбулентности. Установленные разными авторами [2–4] постоянные и изменяющиеся значения параметра Кармана и «вторых констант турбулентности» приводят к необходимости модификации полуэмпирической теории турбулентности, возможность которой рассматривается в настоящей статье.

Основой теории является схема переноса количества движения турбулентными молями. Одним из постулатов этой теории является понятие о длине пути перемешивания, которая принимается пропорциональной расстоянию от границы потока в виде  $l = \kappa y$ , где  $\kappa$  – параметр Кармана [1].

Как известно, на основе обстоятельных измерений по распределению скоростей в гладких и шероховатых трубах, выполненных И. Никурадзе, было установлено, что этот коэффициент во всех случаях остается близким к 0,4. Его широко исследовал Т. Карман [5], который, не отрицая постоянства этого коэффициента, пришел к заключению, что его величина равна 0,35. Учитывая значимость полученного результата, этот коэффициент стали называть «постоянной Кармана». Однако эти результаты были получены в первой четверти XX века в период становления теории подобия турбулентных течений, когда внимание исследователей привлекали в большей мере признаки общности, нежели незначительные, как им казалось, различия. Действительно, эти результаты получены на основе сведения в единых «координатах подобия» большого массива

данных по распределению скоростей первоначально в гладких трубах  $\frac{u}{u_*} = f\left(\lg \frac{u_* y}{\nu}\right)$  и далее – в

шероховатых трубах  $\frac{u}{u_*} = f\left(\lg \frac{y}{k_s}\right)$  (где  $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  – динамическая скорость трения;  $y$  –

расстояние от стенки трубы;  $k_s$  – песочная (эквивалентная) шероховатость). Соответствующие графики, построенные по данным И. Никурадзе и более поздним измерениям [6, 7], приводятся в научной и справочной литературе и, казалось бы, убедительно подтверждают постоянство этого коэффициента. Однако более тщательное рассмотрение, прежде всего данных И. Никурадзе, показало, что вследствие некоторого разброса экспериментальных точек и взаимного смещения профилей скорости маскируются некоторые важные особенности, свойственные не только распределению скоростей в трубах, но также распределению скоростей в открытых потоках и в пограничных слоях [8–10]. К этим особенностям в первую очередь следует отнести заметное отклонение распределения скоростей в пристеночной зоне, хотя и в том, и в другом случае в координатах подобия они остаются логарифмическими. Эта особенность прослеживается во всех профилях, измеренных И. Никурадзе, и еще более отчетливо проявляется в открытых потоках и пограничных слоях [11–13]. Параметр Кармана входит в угловой коэффициент уравнений, описывающих распределение скоростей:

- в гладких трубах

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa_\tau} \ln \frac{u_* y}{\nu} + C_\tau; \quad (1)$$

- в шероховатых трубах

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa_\omega} \ln \frac{y}{k_s} + C_\omega. \quad (2)$$

Следует заметить, что логарифмический вид профилей скорости отвечает фундаментальному принципу локального кинематического подобия течений и в виде выражений (1) и (2) не содержит каких-либо априорных предположений о параметрах  $\kappa$ ,  $C_\tau$  и  $C_\omega$ . Следует отметить, что профили скорости (1) и (2) при  $\kappa=0,4$ ,  $C_\tau=5,5$  и  $C_\omega=8,48$  в точности соответствуют закономерностям сопротивления, которые были установлены на основе прямых измерений потерь напора:

- для гладких труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_\tau}} = 2 \lg \operatorname{Re} \sqrt{\lambda_\tau} - 0,8; \quad (3)$$

- для шероховатых труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_\omega}} = 2 \lg \frac{r_0}{k_s} + 1,74. \quad (4)$$

Эта взаимная согласованность результатов измерения распределения скоростей и потерь напора в гладких и шероховатых трубах, несмотря на слабую обоснованность исходных положений и гипотез, сделала полуэмпирическую теорию турбулентности внутренне замкнутой и жизнеспособной.

Интегрированием профиля скорости (1) по сечению трубы можно без априорных гипотез относительно  $\kappa_\tau$  и  $C_\tau$  определить отношение средней скорости  $V$  к динамической  $u_*$ :

$$\frac{V}{u_*} = \frac{1}{\kappa_\tau} \ln \frac{u_* r_0}{\nu} + C_\tau - \frac{1,5}{\kappa_\tau}. \quad (5)$$

Аналогично, интегрированием профиля скорости (2) для шероховатых труб, также без каких-либо предположений относительно  $\kappa_\omega$  и  $C_\omega$ , может быть получено следующее соотношение:

$$\frac{V}{u_*} = \frac{1}{\kappa_\omega} \ln \frac{r_0}{k_s} + C_\omega - \frac{1,5}{\kappa_\omega}. \quad (6)$$

Из профилей (1) и (2) с использованием выражений (5) и (6) можно получить выражение для так называемого дефицита средней скорости:

$$D = \frac{u_{\max} - V}{u_*} = \frac{1,5}{\kappa}, \quad (7)$$

который для гладких и шероховатых труб одинаковым образом зависит от параметра  $\kappa$  (без каких-либо априорных предположений относительно величины  $\kappa$  либо возможной зависимости его от интегральных параметров потока).

Необходимость согласованности распределения скоростей с каноническими закономерностями сопротивления (3) и (4) делают весьма сложной проблему более точного описания распределения скоростей, чем это было сделано Л. Прандтлем и И. Никурадзе в созданной ими полуэмпирической теории турбулентности. Тем не менее, реальные отличия в распределении скоростей, которые отмечены выше, требуют поиска новых подходов к решению возникшей задачи. Первый успех такого рода был достигнут в работе [14], в которой было установлено влияние коэффициента гидравлического сопротивления  $\lambda_\tau$  на параметры профиля скорости  $\kappa_\tau$  и  $C_\tau$  для гладких труб. При этом впервые было доказано, что условия точного соответствия профилей скорости (1) и (2) при  $\kappa=0,4$ ,  $C_\tau=5,5$  и  $C_\omega=8,48$  с закономерностями сопротивления И. Никурадзе (3) и (4) не являются единственно возможными условиями совпадения.

К сожалению, для шероховатых труб отчетливых тенденций в изменении  $\kappa_\omega$  и  $C_\omega$  выявить не удалось, и в этом отношении вопрос остался открытым.

Для выявления связи между  $\frac{1}{\kappa_{ш}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ш}}}$  выполним анализ, при котором зависимость (3)

преобразуется к иному виду с учетом следующих соотношений:

$$\text{Re} \sqrt{\lambda} = \frac{2Vr_0}{\nu} \sqrt{\lambda} = \frac{2u_* r_0}{\nu} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \sqrt{\lambda} = 2\sqrt{8} \frac{u_* r_0}{\nu}. \quad (8)$$

Подстановка выражения (8) в зависимость (3) позволила записать ее в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\Gamma}}} = 2 \lg \text{Re} \sqrt{\lambda} - 0,8 = 2 \lg \frac{u_* r_0}{\nu} + 0,7 = 0,87 \ln \frac{u_* r_0}{\nu} + 0,7. \quad (9)$$

Записывая профиль скорости (1) в виде

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* r_0}{\nu} + C_{\Gamma} \quad (10)$$

и подставляя в это выражение величину  $\ln \frac{u_* r_0}{\nu}$  из (9) в виде

$$\ln \frac{u_* r_0}{\nu} = \frac{1,15}{\sqrt{\lambda}} - 0,8, \quad (11)$$

получаем следующую форму записи профиля скорости для гладких труб:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa_{\Gamma}} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1,15}{\kappa_{\Gamma} \sqrt{\lambda_{\Gamma}}} - \frac{0,8}{\kappa_{\Gamma}} + C_{\Gamma}. \quad (12)$$

Аналогично, выражая  $\ln \frac{r_0}{k_s}$  из зависимости (4), преобразуем профиль скорости (2) для шероховатых труб к виду:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa_{ш}} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1,15}{\kappa_{ш} \sqrt{\lambda_{ш}}} - \frac{2}{\kappa_{ш}} + C_{ш}. \quad (13)$$

Выражение для максимальной скорости на оси трубы  $\frac{u_{\max}}{u_*}$  может быть получено также из профиля (12) при  $y=r_0$  в виде:

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \frac{1,15}{\kappa_2 \sqrt{\lambda_2}} - \frac{0,8}{\kappa_2} + C_2. \quad (14)$$

Для шероховатых труб выражение для  $\frac{u_{\max}}{u_*}$  может быть получено аналогично из профиля (13) в виде:

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \frac{1,15}{\kappa_{ш} \sqrt{\lambda_{ш}}} - \frac{2}{\kappa_{ш}} + C_{ш}. \quad (15)$$

Таким образом, выражение для распределения скоростей (12) и (13) использует логарифмическую форму профилей (1) и (2), которая отвечает принципу локального кинематического подобия течений, а также экспериментальные закономерности сопротивления И. Никурадзе для гладких и шероховатых труб, которые не вызывают сомнений и не содержат никаких априорных предположений о параметрах  $\kappa$  и  $C$ .

Одинаковость связи дефицита средней скорости (7) с параметром  $\kappa$  для гладких и шероховатых труб с учетом известного соотношения  $\frac{V}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$  позволяет записать следующее выражение:

Брянская Ю.В. Уточнение кинематических характеристик турбулентного течения

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} + \frac{1,5}{\kappa}, \quad (16)$$

которое по форме одинаково для гладких и шероховатых труб. При этом полученное выше выражение (14) для  $\frac{u_{\max}}{u_*}$  в гладких трубах с учетом соотношения (16) можно записать в виде:

$$\frac{1,15}{\kappa_r \sqrt{\lambda_r}} - \frac{0,8}{\kappa_r} + C_r = \sqrt{\frac{8}{\lambda_r}} + \frac{1,5}{\kappa_r}. \quad (17)$$

Аналогично, для шероховатых труб выражение (15) с учетом (16) можно записать следующим образом:

$$\frac{1,15}{\kappa_{uu} \sqrt{\lambda_{uu}}} - \frac{2}{\kappa_{uu}} + C_{uu} = \sqrt{\frac{8}{\lambda_{uu}}} + \frac{1,5}{\kappa_{uu}}. \quad (18)$$

Рассматривая распределение скоростей в гладких трубах в форме (1) без априорных гипотез относительно  $\kappa_r$  и  $C_r$  и обозначая вертикальную координату точки средней скорости как  $y_V$ , запишем:

$$\frac{V}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y_V}{\nu} + C_r. \quad (19)$$

Тогда дефицит местной скорости можно представить в виде:

$$\frac{u}{u_*} - \frac{V}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_V} \quad (20)$$

и записать профиль скорости следующим образом (при  $\frac{V}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$ ):

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_V}{r_0} + \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (21)$$

При этом максимальная скорость при  $y=r_0$  оказывается равной

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_V}{r_0}. \quad (22)$$

Дефицит средней скорости при этом записывается в виде:

$$\frac{u_{\max} - V}{u_*} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_V}{r_0}. \quad (23)$$

Причем согласно (7) он во всех случаях для течения в трубах равен  $\frac{1,5}{\kappa}$  без каких-либо априорных гипотез, т. е.:

$$-\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_V}{r_0} = \frac{1,5}{\kappa}. \quad (24)$$

Полученное выражение (24) показывает, что для всех случаев координата точки средней скорости  $\frac{y_V}{r_0}$  при тении в трубах является абсолютной константой  $-\ln \frac{y_V}{r_0} = 1,5$ ;  $\frac{y_V}{r_0} = 0,223$ , что подтверждается данными измерений.

С использованием полученного соотношения (24) профиль скорости (21) записывается в виде:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1,5}{\kappa} + \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (25)$$

Аналогично к виду (25) приводится и профиль скорости (2) в шероховатых трубах. Таким образом, профиль скорости (25), полученный без каких-либо предположений относительно

Брянская Ю.В. Уточнение кинематических характеристик турбулентного течения

параметров  $\kappa_r$ ,  $C_r$ ,  $\kappa_{ш}$ ,  $C_{ш}$ , является единым универсальным логарифмическим профилем скорости для течения в трубах при любом режиме гидравлического сопротивления. Иной способ получения такого распределения скоростей с использованием профилей (1) и (2) и законов сопротивления И. Никурадзе (3) и (4) был ранее предложен В.Н. Байковым [15], который показал, что профиль (25) согласуется с измеренными профилями И. Никурадзе в гладком, переходном и квадратичном режимах гидравлического сопротивления. Сопоставим распределение скоростей в гладком режиме сопротивления при  $\lambda = \lambda_r$  и  $\kappa = \kappa_r$  с распределением скоростей в квадратичном режиме сопротивления при  $\kappa = \kappa_{ш}$  и  $\lambda = \lambda_{ш}$ . Тогда, сравнивая распределения для случаев, когда  $\lambda_r = \lambda_{ш} = \lambda$  (что физически возможно и не ограничивает число возможных сопоставлений), из выражения (25) запишем:

$$\frac{1}{\kappa_r} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1,5}{\kappa_r} + \sqrt{\frac{8}{\lambda_r}} = \frac{1}{\kappa_{ш}} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1,5}{\kappa_{ш}} + \sqrt{\frac{8}{\lambda_{ш}}}, \quad (26)$$

откуда следует:

$$\frac{1}{\kappa_r} \left( \ln \frac{y}{r_0} + 1,5 \right) = \frac{1}{\kappa_{ш}} \left( \ln \frac{y}{r_0} + 1,5 \right), \quad (27)$$

соответственно, равенство параметров Кармана для гладких и шероховатых труб при одинаковых значениях  $\lambda$ :

$$\kappa_r = \kappa_{ш}. \quad (28)$$

Таким образом, без каких-либо предположений удалось доказать, что при одинаковых  $\lambda$  зависимость  $\kappa = f(\lambda)$  должна быть единой для всех режимов гидравлического сопротивления.

При определении параметра  $\kappa$  по распределениям скорости, измеренным трубкой Пито, приходится сталкиваться с методической сложностью расшифровки ее показаний на малых расстояниях от стенки, соизмеримых с внутренним диаметром приемного отверстия трубки Пито [16]. Анализ показывает, что толщина зоны турбулентного течения в трубах не превышает (0,15–

0,20) $r_0$ , причем нижняя ее граница соответствует толщине буферной зоны  $\frac{u_* \delta}{\nu} \sim 70$  [11]. При

реальных значениях  $u_*$  величина  $\delta$  может составлять доли миллиметра и оказывается соизмеримой с выступами шероховатости. Принимая во внимание эти обстоятельства, при дальнейшем анализе мы не учитывали результаты измерений И. Никурадзе в точках, отстоящих от стенки менее чем на 2–2,5 диаметра приемного отверстия трубки Пито. С увеличением расстояния от стенки роль погрешности, связанной с неточным выбором положения плоскости отсчета, становится незначительной, слабо влияющей на определение  $\kappa$ ,  $C_r$  и  $C_{ш}$ .

Табличные данные И. Никурадзе по измерениям скоростей в гладких и шероховатых трубах [17, 18], за исключением указанных точек, обрабатывались с помощью программы Microsoft Excel с определением уравнения линии тренда методом наименьших квадратов для каждого измеренного профиля в виде:

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + B. \quad (29)$$

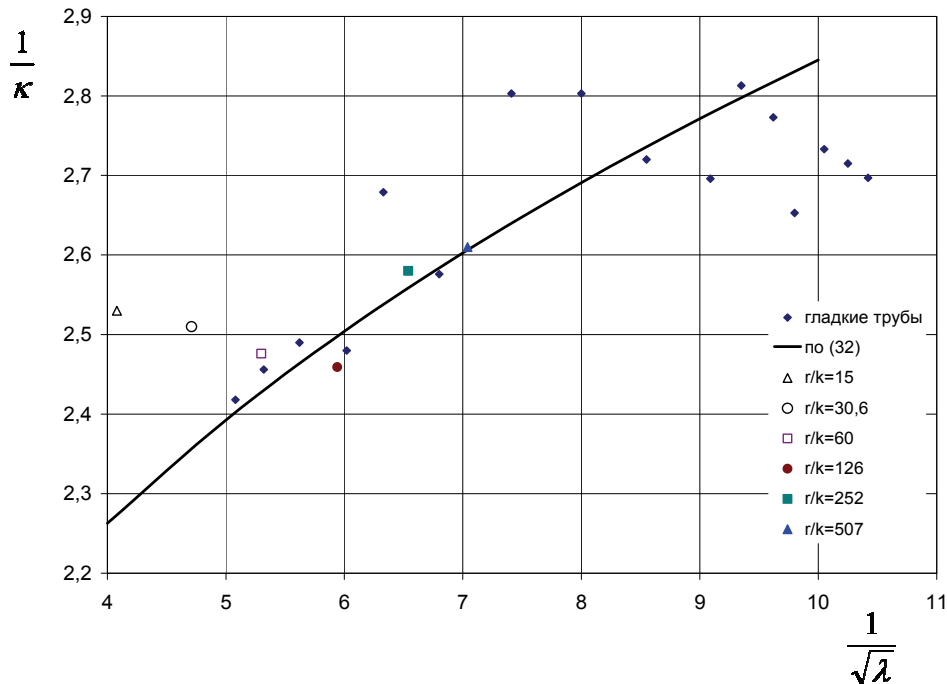
Во всех случаях уравнение линии тренда отвечало опытным точкам с высокой степенью точности. Поскольку для каждого опыта величина  $u_*$  была известна на основании измерений

потерь напора в трубе, то по угловому коэффициенту  $\frac{u_*}{\kappa}$  линии тренда можно было определить

величину  $\frac{1}{\kappa}$  для каждого профиля скорости. Анализ полученных данных позволил установить, что

для гладких труб параметр  $\frac{1}{\kappa_r}$  изменяется в зависимости от  $\lambda_r$ , возрастая с уменьшением  $\lambda$

(рис. 1).



**Рисунок 1. Изменение параметра Кармана при течении в гладких и шероховатых трубах (по опытам И. Никурадзе)**

Связь между  $\kappa_r$  и  $\lambda_r$  для гладких труб может быть аппроксимирована зависимостью

$$\frac{1}{\kappa_r} = 1,6 \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \right)^{0,25} \quad (30)$$

Неустойчивость параметра Кармана для течений в шероховатых трубах и учет того, что  $\kappa_r$ , так же как и  $\kappa_s$ , должен зависеть от коэффициента  $\lambda$ , привели к необходимости осреднения экспериментальных значений  $\kappa_r$  для каждой серии опытов И. Никурадзе при  $\frac{r_0}{k_s} = const$ . При вычислении средних значений  $\kappa_r$  для каждой серии, согласно правилам обработки экспериментальных данных, не учитывались отдельные значения  $\kappa_r$ , выпадающие из общего массива значений  $\kappa_r$  для каждой серии  $\frac{r_0}{k_s} = const$ . Таким образом, из общего числа обработанных

профилей (41 профиль) не были учтены 6 профилей. Осредненные значения  $\frac{1}{\kappa_{us}}$  приводятся на

рисунке 1 и согласуются с данными по  $\frac{1}{\kappa_2}$  для всех серий  $\frac{r_0}{k_s}$  за исключением  $\frac{r_0}{k_s} = 15$ , которая

обнаруживает заметное отклонение от общей тенденции. Возможно, причина такого расхождения связана с влиянием неточностей в определении нулевой плоскости отсчета координаты  $y$ , которые наиболее сильно могли проявиться именно в опытах этой серии при радиусе трубы 12 мм и наибольшей крупности зерен песка 0,8 мм (максимальная относительная шероховатость в опытах И. Никурадзе).

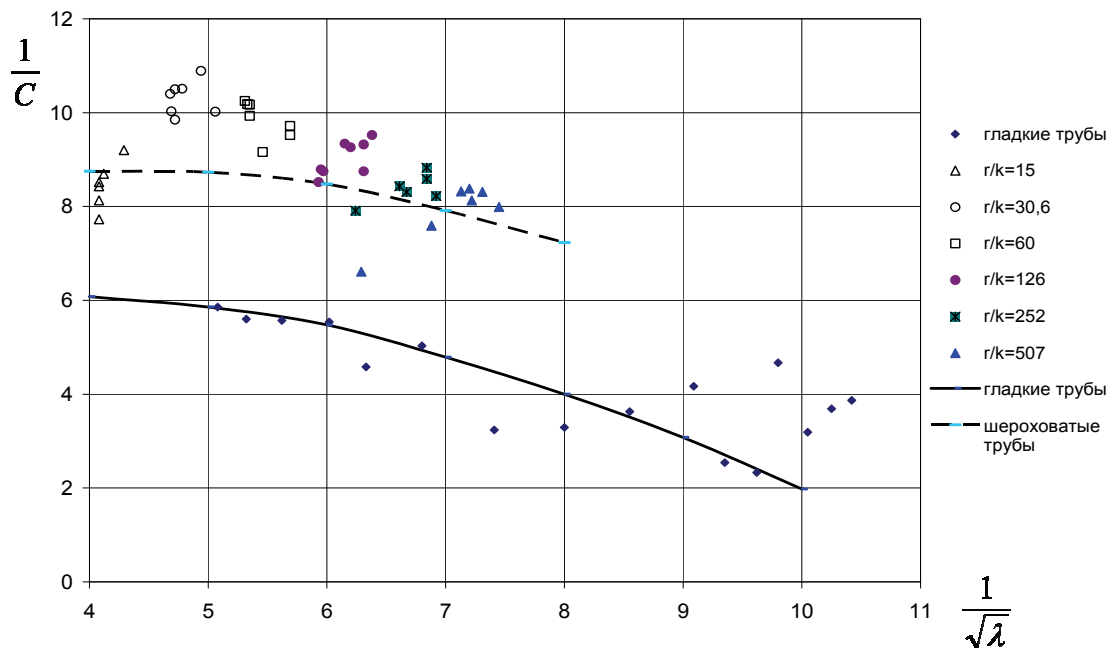
Сопоставляя уравнение линии тренда (29) с профилями (1) и (2), легко установить, что для гладких труб

$$B = \frac{u_*}{\kappa_2} \ln \frac{u_*}{\nu} + u_* C_2; \quad (31)$$

для шероховатых труб

$$B = -\frac{u_*}{\kappa_{us}} \ln k_s + u_* C_{us}. \quad (32)$$

Поскольку во всех случаях  $B$  была известна из уравнений линии тренда, величина  $\frac{u_*}{\kappa}$  определена по угловому коэффициенту линии тренда;  $u_*$  известна по независимым измерениям потерь напора; величины  $C_r$  и  $C_{ш}$  для каждого опыта можно было найти из выражений (31) и (32). Следует заметить, что значения  $C_r=5,5$  и  $C_{ш}=8,48$ , найденные И. Никурадзе (при  $\kappa=0,4$ ), различаются на три единицы. Определенные указанным выше способом значения  $C_r$  и  $C_{ш}$ , представленные на рисунке 2, обнаруживают одинаковую тенденцию изменения в зависимости от  $\lambda$  с различием, также близким к трем единицам.



**Рисунок 2. Изменение параметра  $C$  в профилях скорости при течении в гладких и шероховатых трубах (по опытам И. Никурадзе)**

Хотя получение единого универсального логарифмического профиля (25), зависящего только от параметра  $\kappa$  и коэффициента гидравлического сопротивления  $\lambda$ , снимает остроту вопроса о параметрах  $C_r$  и  $C_{ш}$ , рассмотрим поведение  $C_r$  и  $C_{ш}$  в связи с сохраняющейся практикой широкого использования профилей скорости (1) и (2).

Подставляя в формулу (7) для дефицита средней скорости выражения (14) и (15) и учитывая, что  $\frac{V}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$ , запишем:

$$\frac{1}{\kappa_r} \left( \frac{1,15}{\sqrt{\lambda_r}} - 0,8 \right) + C_r = \sqrt{\frac{8}{\lambda_r}} + \frac{3}{2\kappa_r}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{\kappa_{ш}} \left( \frac{1,15}{\sqrt{\lambda_{ш}}} - 2 \right) + C_{ш} = \sqrt{\frac{8}{\lambda_{ш}}} + \frac{3}{2\kappa_{ш}}. \tag{34}$$

Учитывая полученное выше доказательство того, что  $\kappa_r = \kappa_{ш}$ , и принимая во внимание аппроксимацию (30), отражающую экспериментально установленную связь между  $\kappa$  и  $\lambda$ , с использованием полученных соотношений (33) и (34) можно рассчитать  $C_r = f_1(\lambda)$  и  $C_{ш} = f_2(\lambda)$ , отражающие как изменения  $\kappa = f(\lambda)$ , так и соответствие этих профилей закономерностям сопротивления. Результаты расчета показаны на рисунке 2.

Поскольку  $\kappa_r$ ,  $C_r$ ,  $\kappa_{ш}$  и  $C_{ш}$  являются функциями единственного параметра  $\lambda$  и, как показано выше,  $\kappa_r = \kappa_{ш}$ , из (33) и (34) можно найти, что

$$C_{ш} = C_r + \frac{1,2}{\kappa}. \tag{35}$$

Таким образом, исследования, базирующиеся на данных И. Никурадзе по распределению скоростей и гидравлическому сопротивлению при течении в гладких и шероховатых трубах, позволили установить более точное и взаимно согласованное описание кинематической структуры потока с изменяющимися параметрами профилей скорости, согласующееся при этом с закономерностями сопротивления. Следовательно, зависимости И. Никурадзе оказываются частным случаем полученных соотношений. Их можно рассматривать лишь как первое приближенное описание опытных результатов.

### Литература

1. Прандтль Л. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности // Проблемы турбулентности. М–Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. С. 9–35.
2. Брянская Ю.В. Изменение параметров логарифмического профиля по поперечному сечению потока в гладких трубах // Сб. докладов НТК МГСУ. М., 2001. С. 27–29.
3. Zagarola M.V. Mean-flow scalling of turbulent pipe flow: Doctoral dissertation / Princeton University, 1996. 187 p.
4. Гольдштик М.А., Кутателадзе С.С. Вычисление константы пристенной турбулентности // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 185. №3. С. 535–537.
5. Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности // Проблемы турбулентности. М–Л.: Изд-во ОНТИ НКТП. 1936. С. 35–75.
6. Миллионщиков М.Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М.: Наука, 1969. 52 с.
7. Gioia G., Chakraborty P. Turbulent friction in rough pipes and the energy spectrum of the phenomenological theory // Physical Review Letters. 2006. Vol. 96. Pp. 1–4.
8. Брянская Ю.В., Байков В.Н., Воынов М.А. Распределение скоростей и гидравлическое сопротивление при течении в трубах, каналах и речных руслах // Гидротехническое строительство. 2011. №3. С. 36–39.
9. Allen J., Shockling M., Kunkel G.J., Smits A.J. Turbulent Flow in Smooth and Rough Pipes // Philosophical Transactions of the Royal Society. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2007. Vol. 365(1852). Pp. 699–714.
10. Полянин А.Д., Вязьмина Е.А., Дильман В.В. Критерии для проверки применимости эмпирических формул. Анализ турбулентных течений и общие замечания // Теоретические основы химических технологий. 2009. Т. 43. №2. С. 131–140.
11. Богомолов А.И., Боровков В.С., Майрановский Ф.Г. Высокоскоростные потоки со свободной поверхностью. М.: Стройиздат, 1979. 344 с.
12. Yang S. Q., Han Y., Dharmasiri N. Flow resistance over fixed roughness elements // Journal of Hydraulic Research. 2011. Vol. 49. No.2. Pp. 257–262.
13. Yen V. C. Open channel flow resistance // Journal of Hydraulic Engineering. 2002. Vol. 128. No.1. Pp. 20–39.
14. Брянская Ю.В., Маркова И.М., Остякова А.В. Гидравлика водных и взвесенесущих потоков в жестких и деформируемых границах. М.: АСВ, 2009. 263 с.
15. Байков В.Н. Универсальное распределение скоростей в водных потоках при различных режимах гидравлического сопротивления // Вестник МГСУ. 2009. №4. С. 19–22.
16. Брянская Ю.В. Выбор плоскости отсчета при измерении распределения скоростей в шероховатых трубах и каналах // Сб. работ молодых ученых ф-та ГСС МГСУ. М.: МГСУ, 2000. Вып. 1. С. 7–10.
17. Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах // Проблемы турбулентности. М–Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. С. 75–150.
18. Nikuradse I. Stromungsgesetze in rauhen Rohren // Forschungs-Heft (Forschungs auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens). 1933. Vol. 361. Pp. 1–22.

*\*Юлия Вадимовна Брянская, Москва, Россия*

*Тел. раб.: +7(499)261-39-12; эл. почта: mgsu-hydraulic@yandex.ru*

© Брянская Ю.В., 2013