

doi: 10.5862/MCE.48.1

Расчет грунтовых массивов с учетом дилатансии на основе метода конечных элементов

*К.ф.-м.н., доцент Л.У. Султанов;
к.ф.-м.н., доцент Д.В. Бережной;
аспирант А.В. Карамов,*

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Аннотация. В работе представлена методика решения задач упругопластического деформирования грунтовых массивов. Грунтовая среда при деформировании подчиняется закону сухого трения. Используется неассоциированный закон течения, позволяющий включить в параметры грунта коэффициент дилатансии. Полные деформации представлены в виде суммы пластической и упругой частей. Определяющие соотношения упругого деформирования записаны в виде закона Гука.

Методика решения построена на базе вариационного уравнения принципа виртуальных перемещений. Алгоритм разделения пластических и упругих деформаций основан на итерационной процедуре типа «метод начальных напряжений».

В качестве примера приведен расчет осадки грунтовой насыпи, исследовалась сходимости реализованной методики. Отмечены некоторые особенности деформирования геоматериала при учете коэффициента дилатансии. Расчет проводился на основе конечно-элементной методики.

Ключевые слова: грунты; пластичность; дилатансия; МКЭ

Введение

Известно, что в зависимости от режимов и условий нагружения, а также свойств геоматериала развитие деформации может протекать в режимах дилатансии и уплотнения. Больших различий в особенностях поведения геологических сред на определенном интервале давлений не проявляется. В условиях сдвига прочность грунта сильно зависит от гидростатического давления, а сдвиговая деформация обычно сопровождается изменением объема. С ростом давления происходит увеличение эффективной прочности. В ходе сдвиговой деформации имеет место дилатансия – рассеянное накопление микротрещин с увеличением эффективного объема. Разрушение в основном протекает по межзерненным границам, а в полосах локализации заметно разрыхление среды. Различие в поведении плотных и пористых пород проявляется при давлениях, превышающих некоторую пороговую величину. Тогда с ростом давления эффективная прочность пористых пород начинает снижаться. Чем выше пористость, тем ниже этот порог. При таких давлениях в пористых средах начинается интенсивное разрушение зерен, скелета породы, в результате чего поровое пространство сокращается и возникает уплотнение, или контракция [1–6]. В этом случае могут формироваться не только полосы локализованного сдвига с уплотнением, но и зоны локализованного уплотнения, в которых сдвиговая составляющая мала.

В зоне локализации иногда можно выделить несколько слоев, различающихся по степени поврежденности и пористости. При одних условиях пористость и поврежденность среды растут от краев к центру полосы, при других в центральном слое наблюдается уплотнение, при котором пористость оказывается ниже, а в слоях по краям полосы локализации – выше, чем в окружающем материале [7]. Различие в поведении плотных и высокопористых сред при большом давлении проявляется также в ориентации полос локализации деформации. В плотных и высокопористых материалах при давлении ниже порогового полосы локализации образуют угол менее 45° к оси наибольшего сжатия. В высокопористых средах при больших давлениях этот угол превышает 45° [8].

При формулировке условий разрушения и построении поверхности предельного состояния обычно рассматривают процессы, характерные лишь для плотных или пористых материалов. Для плотных материалов используют коническую поверхность предельного состояния [9–11], а для пористых – замкнутую комбинированной или эллиптической формы [12–14].

Уплотнение среды обычно развивается с упрочнением среды. Для продолжения этого процесса необходимо увеличение давления, т. к. дробление зерен приводит к увеличению числа контактов, следовательно, к распределению и снижению действующей на них нагрузки. В соответствии с этим предельная поверхность расширяется, величина порогового давления растет.

Сдвиговая деформация с дилатансией до определенного предела также протекает с упрочнением. В ходе сдвига меняется сцепление, с которым в значительной мере связано упрочнение. Кроме того, увеличение эффективного объема, обусловленное дилатансией, приводит в стесненных условиях к увеличению давления, следовательно, согласно диаграмме предельной поверхности, к росту эффективной прочности. Возникает эффект дилатансионного упрочнения. Но существует некоторый порог, после которого дилатансия прекращается. Вероятно, это происходит, когда дилатансия и уплотнение компенсируют друг друга. Таким образом, существует взаимосвязь между пороговым давлением, величиной пористости, соответствующей текущему состоянию среды, и началом разупрочнения, и соответственно, началом интенсивного разрушения.

Принимая во внимание, что условия инициации и развития разрывов напрямую зависят от состояния среды и условий нагружения, представляет интерес рассмотреть возможность развития деформации в разных режимах, а также изучить возможность протекания деформации в смешанных и переходных режимах. Особенно важно это для областей повышенной пористости и трещиноватости среды, какими являются зоны разломов. Для этого необходимо записать соотношения модели, которые позволили бы учесть такие особенности деформирования.

Грунты практически в любом диапазоне прикладываемых нагрузок являются физически нелинейными средами. В литературе приводятся многочисленные математические модели, позволяющие описать процесс деформирования грунтов.

В настоящей работе рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного и предельного состояний грунтовых откосов. Система разрешающих уравнений получена из принципа возможных перемещений. Используется модель, аналогичная модели идеально пластического тела. Алгоритм расчета основан на методе приращений начальных напряжений в рамках конечно-элементной дискретизации [15, 16, 17].

Постановка задачи. Алгоритм решения

Деформации в упругопластической среде представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p,$$

где ε_{ij}^e – упругие, а ε_{ij}^p – пластические деформации. Подобные соотношения можно записать для компонент девиатора деформаций:

$$\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij}^{de} + \varepsilon_{ij}^{dp}$$

и для объемной деформации:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p.$$

Предполагается независимость определяющих соотношений для девиаторов напряжений и деформаций и для первых инвариантов тензоров напряжений σ (среднее напряжение) и деформаций ε_v . Тогда для изотропного грунта для упругих деформаций определяющие соотношения можно записать в виде

$$\varepsilon_v^e = \sigma / (3K), \quad \varepsilon_{ij}^{de} = \sigma'_{ij} / (2G), \quad (1)$$

где G – модуль сдвига грунта; K – модуль всестороннего растяжения-сжатия.

Считается, что пластические деформации в грунтах порождаются микроскольжениями и микротрещинами внутри их поликристаллической или гранулированной структуры [10]. Условие предельного состояния представляется в форме Мизеса – Боткина

$$\tau_i = c_{oct}^* - \sigma tg \varphi_{oct}^*, \quad (2)$$

где $\tau_i = \sqrt{\sigma'_{mn} \sigma'_{mn}} / 2$ – интенсивность касательных напряжений; c_{oct}^* – предельное сопротивление чистому сдвигу; φ_{oct}^* – угол внутреннего трения на октаэдрических площадках. Эти параметры грунта определяются через коэффициент сцепления c и угол внутреннего трения φ по следующим соотношениям [17, 18]:

$$\operatorname{tg} \varphi_{oct}^* = \frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad c_{oct}^* = \frac{2\sqrt{3} c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}.$$

При выполнении условия (2) происходит необратимое (пластическое) деформирование геоматериала.

Если в качестве специальной характеристики прочности, определяющей несущую способность грунта, ввести коэффициент (скорость) дилатансии Λ , который характеризует разрыхление или уплотнение грунта при девиаторном нагружении, то соотношения для скоростей пластических деформаций примут следующий вид [7, 10]:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_V^p &= 2\Lambda(c_{oct}^* - \sigma \operatorname{tg} \varphi_{oct}^*) \dot{\lambda}, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \dot{\sigma}'_{ij}, \end{aligned}$$

где параметр $\dot{\lambda}$ определяется в виде:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}'_{ij} / \tau_i + (K/G) \dot{\varepsilon}_V \operatorname{tg} \varphi_{oct}^*}{\tau_i + (c_{oct}^* - \sigma \operatorname{tg} \varphi_{oct}^*) \Lambda (K/G) \operatorname{tg} \varphi_{oct}^*}.$$

Исходная система уравнений, включающая в себя все описанные выше модели, представляет собой вариационное уравнение принципа виртуальных перемещений в виде:

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k, \quad (3)$$

где $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ – векторы напряжений и деформаций на k -м конечном фрагменте грунта; $\{Q\}$, $\{P\}$ – векторы объемной и поверхностной нагрузок.

Используется итерационная процедура типа «метод начальных напряжений», которая представляет собой следующую последовательность действий [17, 19, 20, 21, 22]. Подставляя закон Гука (1) в (3), получим разрешающее уравнение, решение которого дает первое приближение. В этом случае разрешающее уравнение линейно и записывается в виде:

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\varepsilon^{(1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k.$$

Последующие шаги итераций основаны на линейных уравнениях для приращений деформаций:

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma_H^{(k)}\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k, \quad (4)$$

решение которых дает:

$$\{u^{(k+1)}\} = \{u^{(k)}\} + \{\Delta u^{(k+1)}\}, \quad \{\varepsilon^{(k+1)}\} = \{\varepsilon^{(k)}\} + \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}, \quad \{\Delta\sigma^{(k+1)}\} = [D] \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}. \quad (5)$$

Для анализа возможного предельного состояния и определения истинных и начальных напряжений находятся пробные напряжения, такие как:

$$\{\sigma^{(k+1)}\} = \{\sigma_T^{(k)}\} + \{\Delta\sigma^{(k+1)}\}, \quad (6)$$

где $\{\sigma_T^{(k)}\}$ – истинные напряжения, соответствующие теории Мизеса – Боткина. Для их вычисления по напряжениям (6) строится упругопластическая матрица и определяются:

$$\{\sigma_T^{(k+1)}\} = \{\sigma_T^{(k)}\} + [D_{ep}^{(k+1)}] \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}. \quad (7)$$

В правой части уравнения (4) фигурируют так называемые начальные напряжения, которые вводятся как разности пробных (6) и истинных (7) напряжений [17, 23, 24]:

$$\{\Delta\sigma_T^{(k+1)}\} = \{\sigma^{(k)}\} - \{\sigma_T^{(k+1)}\}.$$

Используя четырехузловой конечный элемент сплошной среды, работающий в условиях плоской деформации, и аппроксимируя основные уравнения и соотношения, получим систему линейных алгебраических уравнений.

Численная реализация

Был проведен расчет грунтовой насыпи (рис. 1).

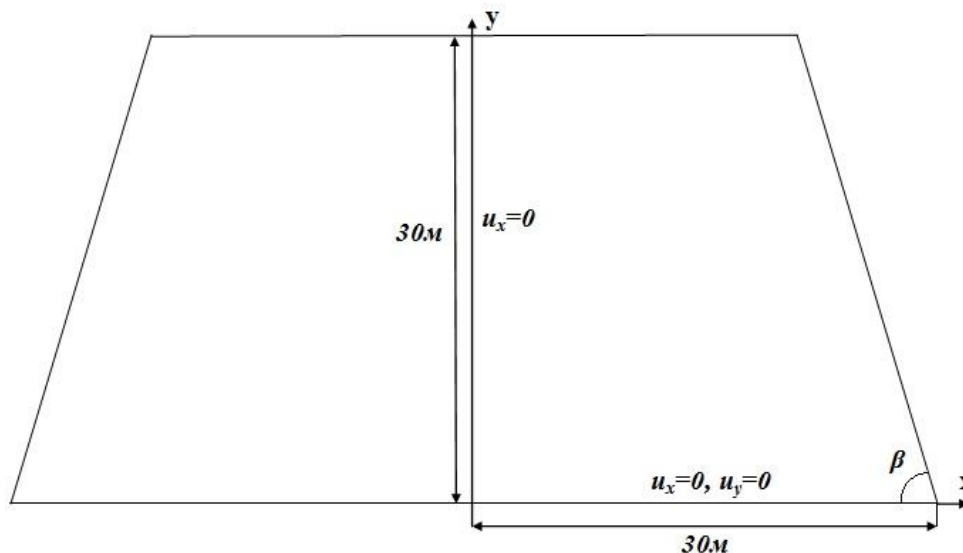


Рисунок 1. Грунтовая насыпь

Исходя из условий симметрии моделировалась половина насыпи. Расчетная область покрывалась равномерной сеткой конечных элементов, число элементов по границам было одинаковым. Предполагалось, что насыпь слагается из двух видов песка с механическими характеристиками (при коэффициенте пористости $e = 0,45$), приведенными в таблице 1.

Нижняя граница насыпи закреплялась ($u_x = 0$, $u_y = 0$), на левой границе реализовывались условия симметрии ($u_x = 0$).

Таблица 1. Механические характеристики грунта

Тип грунта	Плотность скелета грунта ρ [кг/м ³]	Модуль Юнга E [МПа]	Коэффициент Пуассона μ	Сцепление c [КПа]	Угол внутр. трения φ [град]	Угол дилатансии ψ [град]
Песок гравелистый	1830	50	0.3	2	40	10
Песок пылеватый	1825	39	0.3	8	36	6

Расчетная область нагружалась собственным весом (число шагов по нагрузке было выбрано равным 100), информация о координатах была подготовлена в расчете на откос высотой в 30 м, предельная высота определялась умножением начальной высоты на достигнутое число шагов по нагрузке (в процентном соотношении).

Для насыпи из гравелистого песка и угла $\beta = 78,69^\circ$ (с учетом и без учета дилатансии) исследовалась сходимости конечно-элементного решения. На рисунке 2 приведены зависимости величины максимального вертикального смещения расчетной области от числа элементов по границе. Нагрузка, соответствующая потере устойчивости грунтового откоса, для расчета с учетом дилатансии оказывается в 4 раза больше, чем без ее учета (поэтому перемещения находятся в подобном соотношении). Если нагрузку брать одинаковую, то прогибы будут сопоставимы. Например, при разбиении границы на 100 элементов получены следующие прогибы: 0,027225 (без учета дилатансии) и 0,029381 (с учетом дилатансии).

Султанов Л.У., Бережной Д.В., Карамов А.В. Расчет грунтовых массивов с учетом дилатансии на основе метода конечных элементов

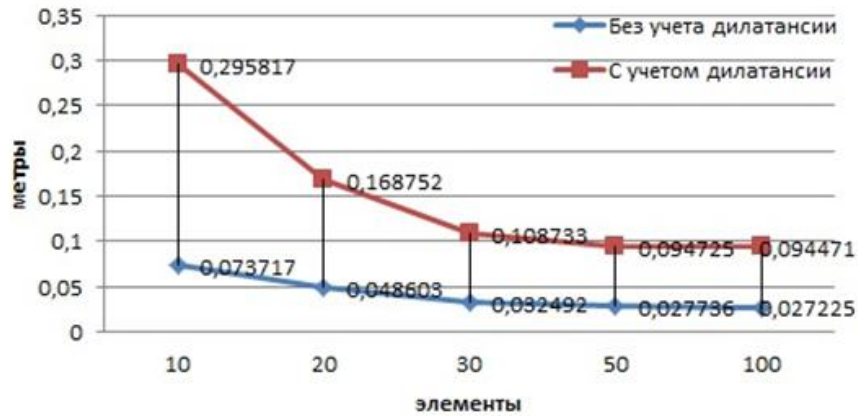


Рисунок 2. Зависимости величины максимального вертикального смещения расчетной области от числа элементов по границе

На рисунке 3 приведены распределения интенсивности пластических деформаций для насыпей из гравелистого песка для различных углов откоса с учетом и без учета дилатансии в момент, предшествующий переходу в предельное состояние.

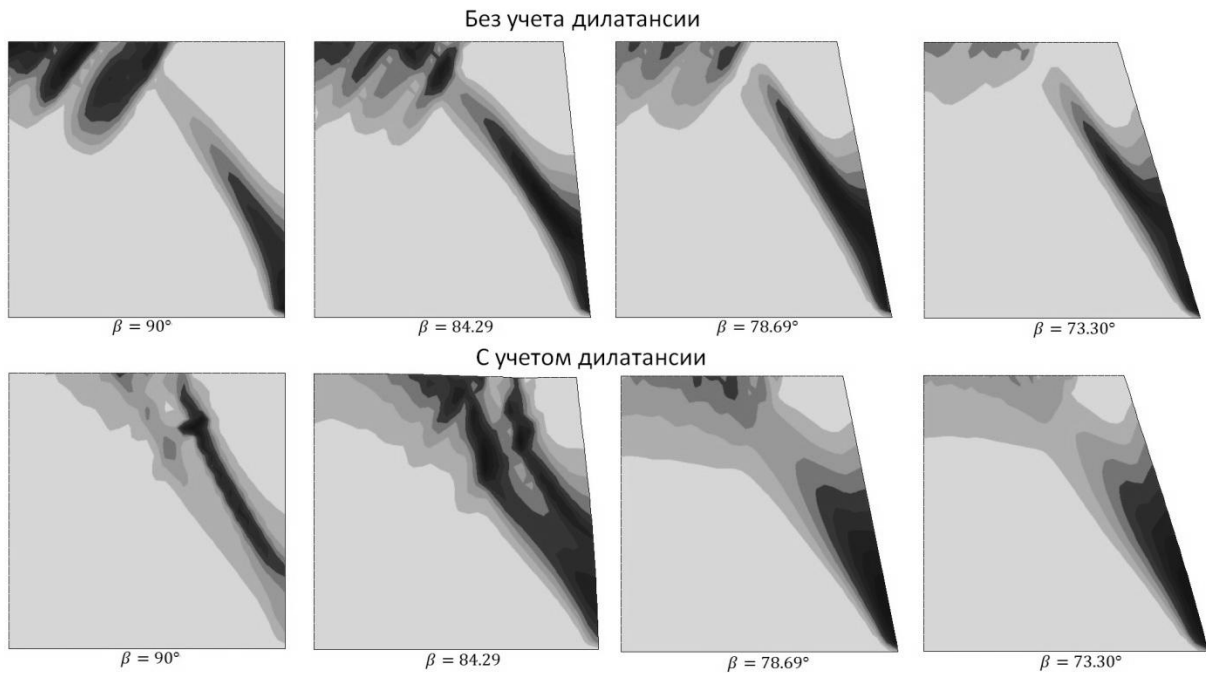


Рисунок 3. Распределения интенсивности пластических деформаций для насыпей из гравелистого песка для различных углов откоса

На рисунке 4 приведены распределения интенсивности пластических деформаций для модельной задачи, когда насыпь моделировалась пылеватым песком, но варьировался угол внутреннего трения, предшествующий переходу в предельное состояние. При расчетах с учетом дилатансии принималось, что угол дилатансии на 30° меньше угла внутреннего трения.

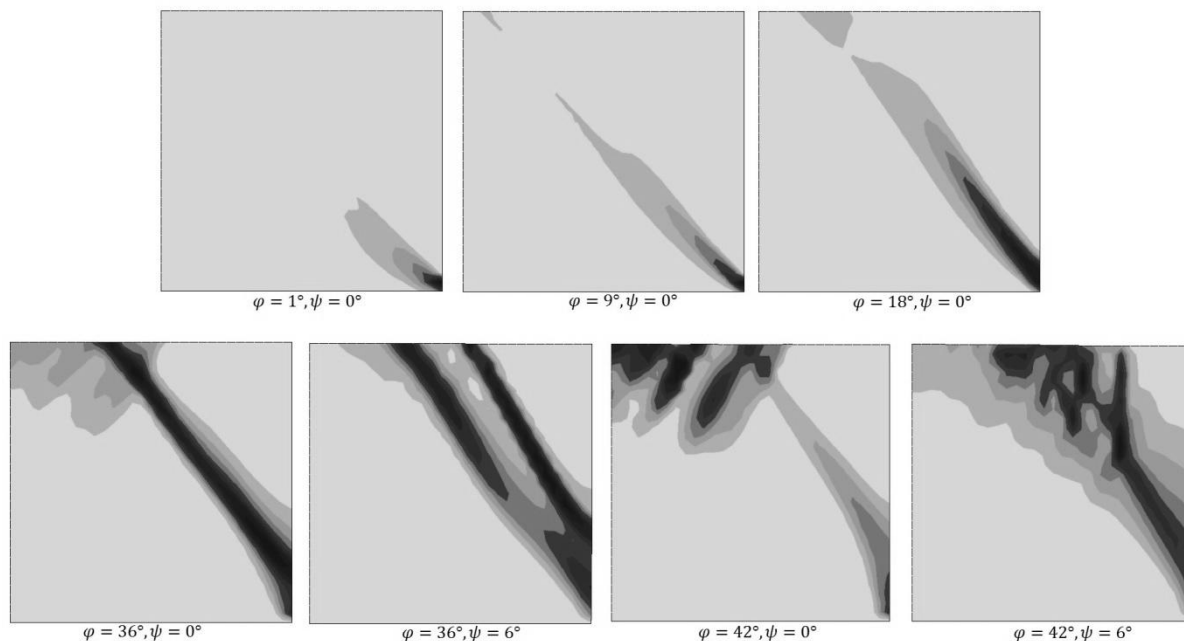


Рисунок 4. Распределения интенсивности пластических деформаций для модельной задачи

Заключение

Можно отметить, что учет дилатансии замедляет переход насыпи в предельное состояние, при этом образуется вторая полоса скольжения. Угол наклона полосы скольжения примерно равен величине $0,5(\beta + \varphi)$. Реализованная методика позволяет моделировать поведение грунта, подчиняющегося закону сухого трения, с учетом и без учета дилатансии в зоне оснований мостов, путепроводов, фундаментов, а также проводить расчет устойчивости грунтовых откосов и насыпей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-01-00955, № 12-01-97026, № 13-01-97059, № 13-01-97058.

Литература

1. Cuss R.J., Rutter E.H., Holloway R.F. The application of critical state soil mechanics to the mechanical behaviour of porous sandstones // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. 2003. Vol. 40. No. 6. Pp. 847–862.
2. Schultz R.A., Siddharthan R. A general framework for the occurrence and faulting of deformation bands in porous granular rocks // *Tectonophysics*. 2005. Vol. 411. No. 1–4. Pp. 1–18.
3. Fossen H., Schultz R. A., Shipton Z. K., Mair K. Deformation bands in sandstone: A review // *Journal of Geological Society*. 2007. Vol. 164. No. 4. Pp. 755–769.
4. Schubnel A., Fortin J., Burlini L., Gueguen Y. Damage and Recovery of Calcite Rocks Deformed in the Cataclastic Regime // *High-Strain Zones: Structure and Physical Properties* (No. 245). Ed. by D. Bruhn, L. Burlini. London: Geological Society of London, 2005. Pp. 203–222.
5. Zhu W., Wong T. The transition from brittle faulting to cataclastic flow. Permeability evolution // *Journal of Geophysical Research B: Solid Earth*. 1997. Vol. 102. No. 2. Pp. 3027–3041.
6. Стефанов Ю.П. Режимы дилатансии и уплотнения развития деформации в зонах локализованного сдвига // *Физическая мезомеханика*. 2010. Т. 13. № Спецвыпуск. С. 44–52.
7. Bied A.El, Sulema J., Martineau F. Microstructure of shear zones in Fontainebleau sandstone // *International Journal of Rock Mechanics And Mining Sciences*. 2002. Vol. 39. No. 7. Pp. 917–932.
8. Issen K.A., Rudnicki J.W. Conditions for compaction bands in porous rock // *Journal of Geophysical Research B: Solid Earth*. 2000. Vol. 105. No. 9. Pp. 21529–21536.

Султанов Л.У., Бережной Д.В., Карамов А.В. Расчет грунтовых массивов с учетом дилатансии на основе метода конечных элементов

9. Друкер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 2. Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
10. Николаевский В.Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35. №6. С. 1017–1029.
11. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализации пластической деформации // Успехи механики. 1989. Т. 12. №1. С. 131–183.
12. Rudnicki J. W. Shear and compaction band formation on an elliptic yield cap // Journal of Geophysical Research. 2004. Vol. 109. B03402. doi:10.1029/2003JB002633.
13. Grueschow E., Rudnicki J.W. Elliptic yield cap constitutive modeling for high porosity sandstone // International Journal of Solid and Structures. 2005. Vol. 42. Pp. 4574–4587.
14. DiMaggio F.L, Sandler I.S. Material models for granular soils // Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 1971. Vol. 97. No. EM3. Pp. 935–950.
15. Бережной Д.В., Голованов А.И., Костерин А.В., Малкин С.А. Процесс деформирования пористой матрицы сложной физической природы с учетом двухфазной фильтрации и температурного воздействия // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2005. Т. 147. Кн. 3. С. 49–56.
16. Бережной Д.В., Голованов А.И., Паймушин В.Н., Пискунов А.А. Расчет напряженно-деформированного и предельного состояний железобетонных конструкций, взаимодействующих с грунтовым основанием // Проблемы прочности и пластичности. Вып.63. Н. Новгород. 2001. С. 170–179.
17. Бережной Д.В., Паймушин В.Н. О двух постановках упругопластических задач и теоретическое определение места образования шейки в образцах при растяжении // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 635–659.
18. Султанов Л.У., Бережной Д.В. Математическое моделирование несущей способности грунтовых насыпей // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2013. №1. С. 117–124.
19. Голованов А.И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. 165 с.
20. Бережной Д.В., Паймушин В.Н.. Математическое моделирование этапов строительства сложных сооружений по трансформирующимся расчетным схемам // Научные технологии. № 8–9. 2005. Т. 6. С. 59–64.
21. Бережной Д.В., Кузнецова И.С., Саченков А.А. Моделирование пластического деформирования многослойного грунта в зоне опоры многопролетного моста // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152. Кн. 1. С. 116–125.
22. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. Киев. 2005. Т. 41. №6. С. 36–43.
23. Голованов А.И., Султанов Л.У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. №4. С. 13–16.
24. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. №1. С. 81–93.
25. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Султанов Л.У. Численное моделирование больших деформаций неупругих трехмерных тел // Научные технологии. 2004. №4. Т. 5. С. 52–60.

Ленар Усманович Султанов, г. Казань, Республика Татарстан, Россия

Тел. раб.: +7(843)2337185; эл. почта: ls561@mail.ru

Дмитрий Валерьевич Бережной, г. Казань, Республика Татарстан, Россия

Тел. раб.: +7(843)2337185; эл. почта: Bereznoi.Dmitri@mail.ru

Андрей Васильевич Карамов, г. Казань, Республика Татарстан, Россия

Тел. моб.: +7(905)0251054; эл. почта: akaramovvnedry@mail.ru

© Султанов Л.У., Бережной Д.В., Карамов А.В., 2014

doi: 10.5862/MCE.48.1

FEM-based calculation of soil mass with the impact of dilatancy

L.U. Sultanov*Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Republic of Tatarstan, Russia
+78432337185; e-mail: ls561@mail.ru***D.V. Berezhnoi***Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Republic of Tatarstan, Russia
+78432337185; e-mail: Berezhnoi.Dmitri@mail.ru***A.V. Karamov***Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Republic of Tatarstan, Russia
+79050251054; e-mail: akaramovvnedry@mail.ru*

Key words

soil; plasticity; dilatancy; FEM

Abstract

There are a lot of papers about dilatancy, it is typical for the majority of highly concentrated dispersed systems. A three-dimensional deformation in the active zone of such systems is contraction and deformation by dilatancy. An increase is called dilatancy, a decrease is called negative dilatancy or contraction.

The violation of soil strength due to a shift in one of the ground on the other is the most common fracture in the construction of excavation slopes. In this paper, we use a model similar to the model of a perfectly plastic body. The construction of a computational algorithm is based on sampling the computational domain in the finite element method. The modeling of soil is based on specific strength properties which determine its bearing capacity. They include the cohesion coefficient, the angle of internal friction coefficient and dilatancy coefficient, which characterizes soil loosening or compaction under deviatoric loads.

The paper considered a number of model problems of elastic-plastic deformation of a dirt mound, studied the convergence of the solutions. It may be noted that the inclusion of the dilatancy decelerates the mound transition to the limiting state, and thereby a second band slip is forming. The implemented methodology allows the calculation of elastic-plastic deformation of soil masses, complying with the law of dry friction with and without dilatancy.

References

1. Cuss R. J., Rutter E. H., Holloway R. F. The application of critical state soil mechanics to the mechanical behaviour of porous sandstones. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. 2003. Vol. 40. No. 6. Pp. 847–862.
2. Schultz R. A., Siddharthan R. A general framework for the occurrence and faulting of deformation bands in porous granular rocks. *Tectonophysics*. 2005. Vol. 411. No. 1–4. Pp. 1–18.
3. Fossen H., Schultz R. A., Shipton Z.K., Mair K. Deformation bands in sandstone: A review. *Journal of Geological Society*. 2007. Vol. 164. No. 4. Pp. 755–769.
4. Schubnel A., Fortin J., Burlini L., Gueguen Y. Damage and Recovery of Calcite Rocks Deformed in the Cataclastic Regime. *High-Strain Zones: Structure and Physical Properties (No. 245)*. Ed. by D. Bruhn, L. Burlini. London: Geological Society of London, 2005. Pp. 203–222.
5. Zhu W., Wong T. The transition from brittle faulting to cataclastic flow. Permeability evolution. *Journal of Geophysical Research B: Solid Earth*. 1997. Vol. 102. No. 2. Pp. 3027–3041.
6. Stefanov Yu.P. Rezhimy dilatansii i uplotneniya razvitiya deformatsii v zonakh lokalizovannogo sdviga [Modes dilatancy and seal deformation development in the areas of localized shear]. *Physical Mesomechanics*. 2010. Vol. 13. No. Special Issue. Pp. 44–52. (rus)
7. Bied A.El, Sulema J., Martineau F. Microstructure of shear zones in Fontainebleau sandstone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2002. Vol. 39. No. 7. Pp. 917–932.
8. Issen K.A., Rudnicki J. W. Conditions for compaction bands in porous rock. *Journal of Geophysical Research B: Solid Earth*. 2000. Vol. 105. No. 9. Pp. 21529–21536.
9. Druker D., Prager V. Mekhanika gruntov i plasticheskiy analiz ili predelnoye proyektirovaniye [Soil mechanics and plastic analysis or limit design]. *Mekhanika. Novoye v zarubezhnoy nauke. Vyp. 2*. Sultanov L.U., Berezhnoi D.V., Karamov A.V. FEM-based calculation of soil mass with the impact of dilatancy

- Opredelyayushchiye zakony mekhaniki gruntov* [Mechanics. New in foreign science. Vol. 2. Constitutive laws of soil mechanics]. Moscow: Mir, 1975. Pp. 166–177. (rus)
10. Nikolayevskiy V.N. *Opredelyayushchiye uravneniya plasticheskogo deformirovaniya sypuchey sredy* [Constitutive equations of plastic deformation of the granular medium]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1971. Vol. 35. No. 6. Pp. 1017–1029. (rus)
 11. Garagash I.A., Nikolayevskiy V.N. *Neassotsirovannyye zakony techeniya i lokalizatsii plasticheskoy deformatsii* [Non-associated flow and and localization rule of plastic strains]. *Advances in Mechanics*. 1989. Vol. 12. No. 1. Pp. 131–183. (rus)
 12. Rudnicki J. W. Shear and compaction band formation on an elliptic yield cap. *Journal of Geophysical Research*. 2004. Vol. 109. B03402. doi:10.1029/2003JB002633.
 13. Grueschow E., Rudnicki J.W. Elliptic yield cap constitutive modeling for high porosity sandstone. *International Journal of Solid and Structures*. 2005. Vol. 42. Pp. 4574–4587.
 14. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material models for granular soils. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE. 1971. Vol. 97. No. EM3. Pp. 935–950.
 15. Berezhnoy D.V., Golovanov A.I., Kosterin A.V., Malkin S.A. *Protsess deformirovaniya poristoy matritsy slozhnoy fizicheskoy prirody s uchetom dvukhfaznoy filtratsii i temperaturnogo vozdeystviya* [The deformation of the porous matrix of complex physical nature, taking into account the two-phase filtration and thermal effects]. *Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet. Uchenye Zapiski*. 2005. Vol. 147. Book. 3. Pp. 49–56. (rus)
 16. Berezhnoy D.V., Golovanov A.I., Paymushin V.N., Piskunov A.A. *Raschet napryazhenno-deformirovannogo i predelnogo sostoyaniya zhelezobetonnykh konstruksiy, vzaimodeystvuyushchikh s gruntovym osnovaniyem* [Calculation of the stress-strain and limit states of reinforced concrete structures interacting with soil foundation]. *Problems of strength and plasticity*. 2001. Vol. 63. Pp. 170–179. (rus)
 17. Berezhnoy D.V., Paymushin V.N. *O dvukh postanovkakh uprugoplasticheskikh zadach i teoreticheskoye opredeleniye mesta obrazovaniya sheyki v obraztsakh pri rastyazhenii* [Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2001. Vol. 75. No. 4. Pp. 447–462. (rus)
 18. Sultanov L.U., Berezhnoy D.V. *Matematicheskoye modelirovaniye nesushchey sposobnosti gruntovykh nasypay* [Mathematical modeling of the bearing capacity of the dirt fill]. *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva*. 2013. No. 1. Pp. 117–124. (rus)
 19. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Teoreticheskiye osnovy vychislitelnoy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred* [Theoretical Foundations of Computing nonlinear mechanics of deformable medium]. Kazan: Izd-vo Kazansk. gos. un-ta, 2008. 165 p. (rus)
 20. Berezhnoy D.V., Paymushin V.N. *Matematicheskoye modelirovaniye etapov stroitelstva slozhnykh sooruzheniy po transformiruyushchimsya raschetnym skhemam* [Mathematical modeling of complex construction phases facilities for transforming design schemes]. *Naukoyemkie tekhnologii*. 2005. No. 8-9. Vol. 6. Pp. 59–64. (rus)
 21. Berezhnoy D.V., Kuznetsova I.S., Sachenkov A.A. *Modelirovaniye plasticheskogo deformirovaniya mnogoslownogo grunta v zone opory mnogoproletnogo mosta* [Modelling of plastic deformation multilayer soil in the area of multispans bridge abutment]. *Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet. Uchenye Zapiski*. 2010. Vol. 152. Book. 1. Pp. 116–125. (rus)
 22. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Chislennoye issledovaniye bolshikh uprugoplasticheskikh deformatsiy trekhmernykh tel* [Numerical Investigation of Large Elastoplastic Strains of Three-Dimensional Bodies]. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41. Issue 6. Pp. 614–620. (rus)
 23. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Issledovaniye zakriticheskogo uprugoplasticheskogo sostoyaniya trekhmernykh tel s uchetom konechnykh deformatsiy* [Postbuckling elastoplastic state analysis of three-dimensional bodies taking into account finite strains]. *Russian Aeronautics*. 2008. Vol. 51. Issue 4. Pp. 362–368. (rus)
 24. Davydov R.L., Sultanov L.U. *Chislennyy algoritm resheniya zadachi o bolshikh uprugoplasticheskikh deformatsiyakh MKE* [Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by fem]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2013. Issue 1. Pp. 81–93. (rus)
 25. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Kuznetsov S.A., Sultanov L.U. *Chislennoye modelirovaniye bolshikh deformatsiy neuprugikh trekhmernykh tel* [Numerical simulation of large inelastic deformations of three-dimensional bodies]. *Naukoyemkiye tekhnologii*. 2004. No. 4. Pp. 52–60. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 3–9