

Гидравлическая форма условия экстремума диссипации мощности для безнапорных потоков в призматических руслах

Д.т.н., профессор ГОУ СПбГПУ В.Н. Бухарцев,
д.т.н., профессор ГОУ СПбГПУ М.Р. Петриченко*

Пусть, по аналогии с «медленными» движениями вязкой жидкости, справедливо эвристическое предположение:

$$h_f \rightarrow \text{extr}_{\pm}, Q = \text{fix}, \quad (1)$$

либо

$$Q \rightarrow \text{extr}_{\mp}, h_f = \text{fix}. \quad (1_1)$$

Здесь extr_{\pm} обозначает, например, \min (\max). Тогда extr_{\mp} обозначает \max (\min). Иначе, предполагается, что **в действительном движении с фиксированным расходом потери напора не больше (не меньше), чем в любом виртуальном движении; или, при фиксированных потерях напора расход в действительном потоке не меньше (не больше), чем в любом виртуальном.** Виртуальность потоков понимается как их кинематическая совместимость. Например, набор $(Q, m, n, i, b, h) = \text{idem}$ в действительном и в любом допустимом движении, но при этом в действительном движении потери напора h_f минимальны (максимальны). Либо, в двойственной формулировке, $(h_f, m, n, i, b, h) = \text{idem}$ в действительном и в любом допустимом движении, но при этом в действительном движении расход Q максимален (минимален). Здесь h означает начальное (в сечении $x=0$) значение глубины потока. Но, если набор (Q, m, n, i, b, h) задан, глубины потока (однозначно) определяются как решение «уравнения неравномерного движения». Будет доказано, что экстремальная формулировка (1) или (1₁) совпадает с традиционной постановкой в классе движений с медленным изменением гидравлических характеристик вдоль потока.

1. Необходимое условие экстремума

Пусть p, q, r, s, t – обозначения Монжа для частных производных h_f :

$$p := \frac{\partial h_f}{\partial x}, \quad q := \frac{\partial h_f}{\partial h}, \quad r := \frac{\partial^2 h_f}{\partial x^2}, \quad s := \frac{\partial^2 h_f}{\partial x \partial h}, \quad t := \frac{\partial^2 h_f}{\partial h^2}.$$

В этих обозначениях из уравнения неравномерного движения следует

$$i_f = \frac{p + iNq}{1 + Nq}, \quad (2)$$

$$N := \frac{dh}{d\Theta}.$$

Действительно, вдоль потока $i_f = p + \frac{dh}{dx}q = p + Nq(i - i_f)$. Остается исключить уклон трения i_f .

Вместо изопериметрических задач (1) можно поставить задачу на экстремум потерь напора на всем множестве $X \times H$ допустимых значений продольной координаты и глубин потока:

$$\int_{(x)} dx \int_{(h)} dh \frac{p + iNq}{1 + Nq} \rightarrow \text{extr}_{\pm}, \quad (3)$$

с плотностью лагранжиана $\Lambda(p, q) := \frac{p + iNq}{1 + Nq}$.

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$N(1 + Nq)s + N(i - p)(Nt + N_1q) - \frac{N_1}{2}(i - p)(1 + Nq) = 0, \quad N_1 := \frac{dN}{dh}. \quad (4)$$

Уравнение (4) допускает решение:

$$h_f = ix + \mathcal{E}' - \mathcal{E}, \quad (5)$$

Т.е. интеграл Бернулли является интегралом (4). Предположив, что условие (3) имеет место, получаем интеграл Бернулли (5). Иначе, условие (5) необходимо для предположения (3) о минимуме диссипации: **для движений (потоков), обладающих условием экстремума потерь напора (3), выполняется интеграл Бернулли (5)**. Или наличие экстремума потерь напора свидетельствует о существовании интеграла энергии (5). Поэтому и движения (потоки), удовлетворяющие условию (1) или (1₁) обладают интегралом Бернулли (5).

Пример. Вдоль характеристики уравнение (4) имеет вид:

$$(i - p) \left(N^2 \frac{dq}{dh} + \frac{1}{2} NN_1 q - \frac{N_1}{2} \right) = 0, \quad (4_1)$$

откуда:

$$1) \text{ либо } i = p, \quad Nq + 1 = 0,$$

$$2) \text{ либо } q = -\frac{1}{N} + \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad p = i_f - qN(i - i_f) = (1 + Nq)i_f - qNi = i - C\sqrt{N}(i - i_f),$$

C – постоянная интегрирования.

Тогда:

$$h_f = ix - C \int_0^x \sqrt{N}(i - i_f) d\xi + C \int_h^h \frac{d\eta}{\sqrt{N(\eta)}} - \int_h^h \frac{d\eta}{N(\eta)} = ix - \mathcal{E} + \mathcal{E}' + C \int_0^x \sqrt{N} [d\mathcal{E}(\xi) - (i - i_f) d\xi],$$

где греческими буквами обозначены переменные интегрирования. Ввиду произвольности x и N, получается, что или C=0, или $d\mathcal{E} - (i - i_f) dx = 0$.

2. Достаточность интеграла Бернулли для каноничности уравнения неравномерного движения

Пусть выполняется (5). Оказывается, что существование интеграла (5) приводит к условию, равносильному (1), (1₁), (3).

Интеграл (5) в виде $\mathcal{E} - ix + h_f = E = \text{const}$, можно рассматривать как функцию Гамильтона E(x, h) для векторного поля

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial E}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \quad (6)$$

или, произведя дифференцирование, получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{N} + q, \quad \frac{dx}{dt} = i - p. \quad (6_1)$$

$$\text{Значит, } \frac{dh}{dx} = N \frac{i - p}{1 + Nq}. \quad (6_2)$$

Уравнение (6₂) равносильно традиционному уравнению неравномерного движения:

$$\frac{dh}{dx} = N(i - i_f). \quad (6_3)$$

Действительно, $p = i_f - q \frac{dh}{dx}$. Остается исключить из (6₂) уклон свободной поверхности.

Получается, что интеграл Бернулли (5) порождает каноническую систему (6, 6₁). Содержание пунктов 1 и 2 следует нашей заметке [1].

Бухарцев В.Н., Петриченко М.Р. Гидравлическая форма условия экстремума диссипации мощности для безнапорных потоков в призматических руслах

3. Условие экстремума, связанное с системой (6₁)

Эта каноническая система связана с некоторым условием экстремума для первообразной функции (или «главной» функции по Гамильтону) $F(T, x) = \int_0^T \sup_{(h)} \left(h \frac{dx}{dt} - E \right) dt$. Выясним смысл этого условия [2].

Функция $F(t, x)$ удовлетворяет уравнению переноса:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathfrak{E} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) - ix + \int_0^x i_f d\xi = 0, \quad h := \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (7)$$

Покажем, что уравнение (7) непротиворечиво: решения уравнения (7) совпадают с известными решениями, доставляемыми традиционной теорией. Ясно, что (7) – «замаскированная» запись интеграла

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\mathfrak{E}'$$

Бернулли, если отделить переменные и положить: \mathfrak{E}' – значение удельной энергии в сечении $x=0$. Продифференцируем (7) по x вдоль свободной поверхности $h=h(x)$:

$$\frac{1}{N} \frac{dh}{dx} - i + i_f = 0, \quad (8)$$

Уравнение (8) равносильно (6₃), что и требовалось доказать. Далее, легко проверяется:

$$L := h x - E = h \frac{d\mathfrak{E}}{dh} - \mathfrak{E}'. \quad (9)$$

Значит, в действительном движении $\int_h^h \frac{hN^{-1} - \mathfrak{E}'}{i - i_f} dh \rightarrow \text{extr}_{\pm}$. (10)

И далее, пусть $F(0) = \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=0} - h' = 0$. Тогда:

$$F(x) = \int_0^x (x - \xi) N(i - i_f) d\xi = \int_0^x (x - \xi) \frac{dh}{d\xi} d\xi + xh' = \int_0^x h(\xi) d\xi \rightarrow \text{extr}_{\pm}. \quad (10_1)$$

Условие (10) означает, что в действительном движении *площадь криволинейной трапеции, образованной вертикалями $\xi=0$, $\xi=x$, прямолинейной образующей дна и кривой свободной поверхности не больше (или не меньше), чем в любом допустимом движении, для любого конечного участка потока*. Можно показать, что *площадь трапеции минимальна у кривых подпора и максимальна у кривых спада*.

Итак, существование интеграла Бернулли для движений (потоков) означает, что такие движения обладают экстремальными свойствами по расходу и по потерям напора. Иначе говоря, *интеграл Бернулли для целого потока – критерий того, что действительное движение обладает свойствами минимума потерь напора при заданном расходе, или, что при фиксированном перепаде уровней воды действительное движение (поток) обладает максимальным расходом*. Такой результат для диссипативной системы (потока) кажется необычным. Действительно, если бы система (поток) была консервативной, то каноничность уравнений движения порождается интегралом энергии и обратно, интеграл энергии для консервативных систем с неизменяемыми (склерономными) связями прямо получается как двойственная лагранжиану функция, [2]. К счастью, гидравлическая традиция рассматривает потерю напора как позиционную функцию (или как функцию координаты потока x). Поэтому потеря напора фигурирует как (формально) консервативная составляющая интеграла энергии – такая же, например, как $z(x)$, с одним только ограничением: $h_f(x) > 0$.

Литература:

1. Бухарцев В.Н., Петриченко М.Р. Экстремальные свойства потоков, В сборнике: «Механика и процессы управления», УНЦ РАН, Миасс, 2006, с. 79...84.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики, Ч.2, М., Наука, 1966, 332 с.

*Владимир Николаевич Бухарцев, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Тел. раб. 297-59-54, 297-59-88, эл. почта gts.bu@cef.spbstu.ru