Средняя квадратичная аппроксимация кривой депрессии (для случая плоской совершенной траншеи с вертикальными стенками)

Д.т.н., профессор ГОУ СПбГПУ В.Н. Бухарцев,
д.т.н., профессор ГОУ СПбГПУ М.Р. Петриченко,
магистр ГОУ СПбГПУ Н.В. Головкова*

Построение кривой депрессии в условиях плоской задачи о фильтрации в однородных грунтах возникает при решении многих инженерных задач гидротехнического строительства. Такая задача может быть связана с организацией поверхностного водопонижения в котловане при строительстве какого-либо сооружения, или при поддержании перепада уровней фильтрующей насыпью и т.д. Во всех этих задачах важно иметь представление о реальном положении депрессионной поверхности для оценки устойчивости грунтовых массивов, подверженных фильтрационному воздействию. Выход фильтрационного потока в открытое водное пространство (траншею, водоем) должен сопровождаться качественным изменением движения, выражающимся в данном случае скачком уровней – участком высачивания. В современных методах это философское положение не имеет отражения, что побудило авторов этой статьи предложить некоторое усовершенствование в этом вопросе, изложенное ниже на примере совершенной траншеи с вертикальными стенками.

1. Прямой метод минимизации главной функции

Уравнение неравномерного фильтрационного движения связано с неотрицательным функционалом, достигающим неотрицательного минимума в действительном движении:

$$F(h)=\int_0^X\left\{\left(\frac{dh}{dx}\right)^2+\left(i-i_f\right)^2\right\}dx\geq 0,$$

где X – длина потока.

Легко доказывается, что уравнение неравномерного движения представляет необходимое условие минимума для F(h); в равномерном движении F(h)=0. Иначе, значение F(h) в действительном неравномерном движении не больше, чем в любом допустимом неравномерном движении. Равномерное движение – наилучшее: значение функционала F(h) достигает точной нижней грани и не может быть уменьшено [1].

Решения уравнения неравномерного фильтрационного движения известны. Например, депрессионная кривая для притока воды к траншее не допускает вертикального живого сечения и приводит к конечной области питания траншеи. Среди функций, доставляющих минимум функционалу F(h), существуют отличные от решений уравнения Дюпюи. Будем минимизировать F(h) непосредственно, не решая уравнений Эйлера-Лагранжа. Пусть *i=0,* т.е. водоупор горизонтален. Навязываем следующее распределение глубины и уклона трения по длине потока:

$$h=H-\left(H-h'\right)\exp(-\alpha x),$$
$$i_f=i'\exp(-\alpha x),$$

где α — искомый параметр, H – напор грунтовой воды вне области влияния траншеи относительно водоупора, штрихом обозначены значения гидравлических переменных в створе x=0, совпадающем со стенкой траншеи. Так, h' – напор в сечении x=0, $h'=h_0+\Delta$, h_0- глубина воды в траншее, Δ — высота высачивания, $i':=i_f(0)$. Тогда:

1) F(h) достигает минимума, если $\alpha=\dfrac{i'}{H-h'}$;

2) распределение глубины потока определяется выражением

$$h(x)=H-\left(H-h'\right)\exp\left(-\frac{\xi}{2}\frac{H^2-h_0^2}{h'\left(H-h'\right)}\right),\quad \xi:=\frac{x}{L},\quad 0\leq\xi<\infty.$$

Здесь для расчета уклона трения использованы тождества $i' := \frac{q}{kh'}$, $q = \frac{k}{2L}\left(H^2 - h_0^2\right)$, т.е. расход сосчитан по Дюпюи, L – условная длина влияния траншеи. Следовательно, безразмерная глубина потока может быть аппроксимирована так:

$$\vartheta := \frac{H - h}{H - h'} = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\frac{1-\eta_0^2}{\eta'\left(1-\eta'\right)}\right), \quad (1)$$

где безразмерные переменные $\eta' := \frac{h'}{H}$, $\eta_0 := \frac{h_0}{H}$, причем $0 \le \vartheta < 1$.

Аппроксимация по Дюпюи в этих же переменных:

$$\vartheta_D = \frac{1-\sqrt{1+\left(1-\eta_0^2\right)\xi}}{1-\eta_0}, \quad 0 \le \xi \le 1. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что «длина влияния» траншеи L возникает в (1) как мера близости безразмерного перепада на траншее ϑ к нулю. Например, пусть $\varepsilon>0$ – некоторая калибровка безразмерного перепада. Тогда $\vartheta < \varepsilon$, если $\xi > 2\frac{\eta'\left(1-\eta'\right)}{1-\eta_0^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}$.

Далее, площади $S = \int_0^\infty \vartheta d\xi$, $S_D = \int_0^1 \vartheta_D d\xi$ изображают количества жидкости, поступающей из насыщенного пласта в траншею на единицу ширины пласта, см. рисунок 1. Тогда, полагая $S=S_D$, т.е. уравнивая площади «областей питания» в традиционном методе и в квадратичной аппроксимации, получим связь начальной глубины η' с глубиной воды в траншее η_0:

$$\eta' = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{\eta_0}{6} + \frac{\eta_0^2}{3}}.$$

Выбираем знак перед радикалом так, чтобы при $\eta_0 = 1$ было $\eta' = 1$. Значит, необходимо брать верхний знак:

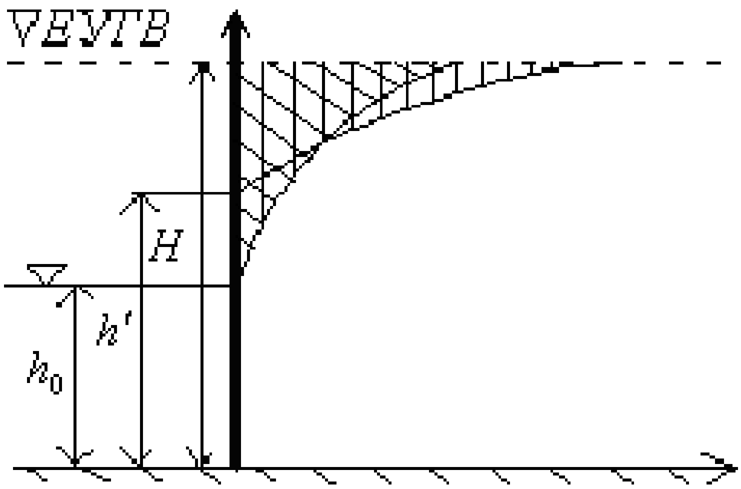

Рисунок 1. Схема к вычислению радиуса влияния траншеи

$$\eta' = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{\eta_0}{6} + \frac{\eta_0^2}{3}}.$$

Высота промежутка высачивания:

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{H} = \frac{1}{2} - \eta_0 + \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{\eta_0}{6} + \frac{\eta_0^2}{3}}.$$

Результаты расчетов приводятся на рисунке 2. Как видно, использование прямой минимизации F(h) позволяет решить основные задачи фильтрационного расчета траншеи, явно не прибегая к теории Дюпюи и не используя аппарата теории фуксовых групп.

2. Использование уравнения Лагранжа, второго рода

Плотность лагранжиана (главной функции) имеет вид:

$$\Lambda(h, h_1) := h_1^2 + \frac{q^2}{(kh)^2}, \quad h_1 := \frac{dh}{dx}.$$

Тогда необходимое условие минимума главной функции F(h) записывается в виде уравнения Лагранжа, второго рода: $\frac{d}{dx}\frac{\partial\Lambda}{\partial h_1} = \frac{\partial\Lambda}{\partial h}$ [2]. В данном случае:

$$2h_2 = -\frac{2q^2}{k^2h^3}, \quad h_2 := \frac{d^2h}{dx^2}.$$

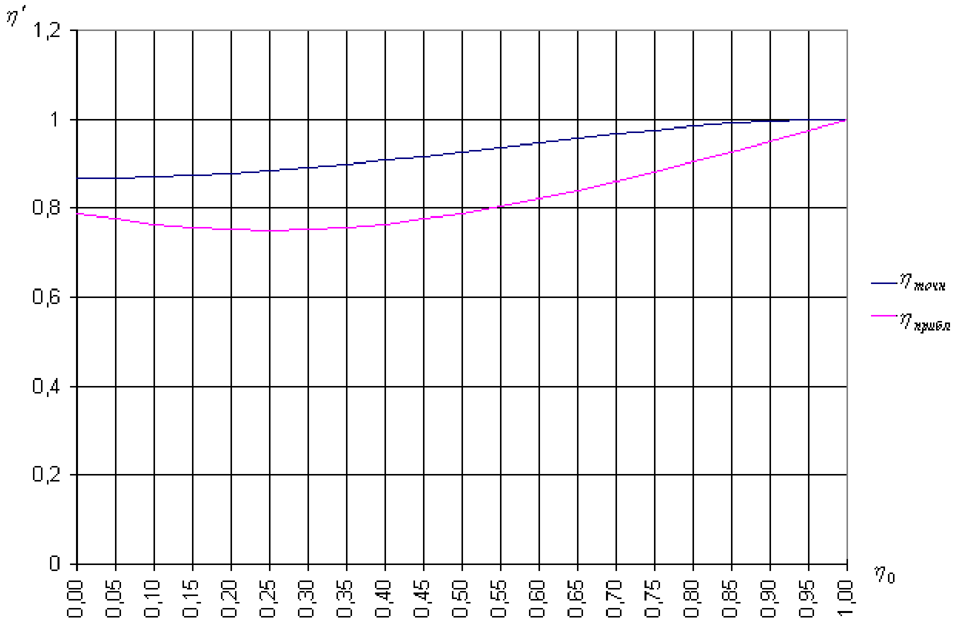

Рисунок 2.а. Высота выклинивания депрессионной кривой, как функция глубины воды в траншее

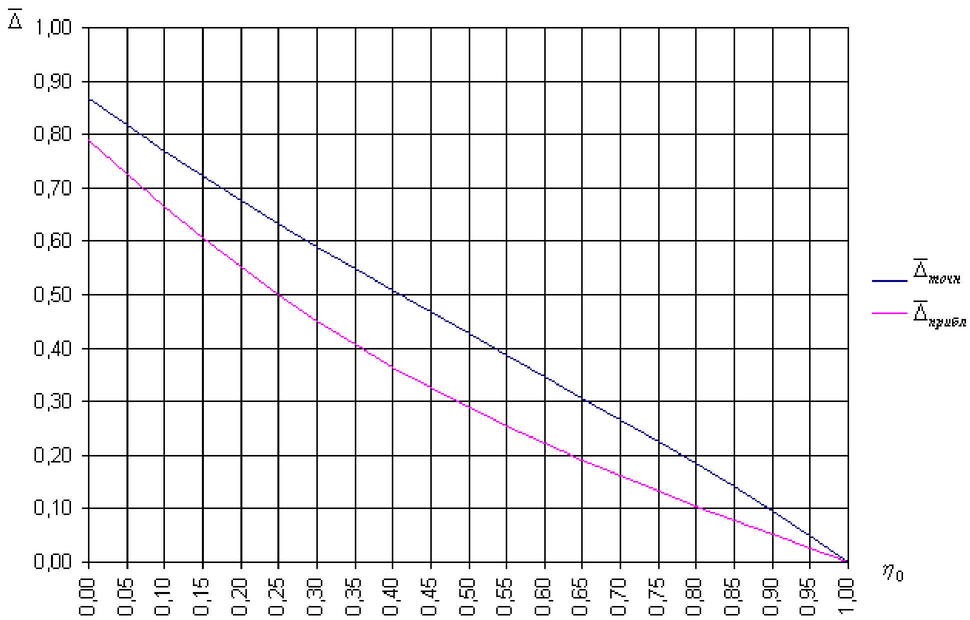

Рисунок 2.б. Высота промежутка высачивания, как функция от глубины воды в траншее

Граничные условия: $h(0)-h^{'}=h_1(H)=0$. Тогда:

$$\sqrt{1-\eta^{'2}}-\sqrt{1-\eta^2}=\frac{q\varsigma}{kH},\quad \varsigma:=\frac{x}{H}\in[0,\frac{R}{H}],\quad \eta:=\frac{h}{H}\in[\eta^{'}:=\frac{h^{'}}{H},1].$$

В отличие от решения Дюпюи, предлагаемое решение изображает депрессию, касающуюся естественного горизонта воды в сечении x=L, т.е. на удалении от траншеи, равном условной длине влияния. Итак, пусть x=L и расход исчисляется по Дюпюи. Тогда $\eta=1, \sqrt{1-\eta^{'2}}=\frac{qL}{kH^2}$ и:

$$2\sqrt{1-\eta^{'2}}=1-\eta_0^2,$$

$$\eta^{'}=\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(1-\eta_0^2\right)^2},$$

$$\overline{\Delta}:=\eta^{'}-\eta_0=\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(1-\eta_0^2\right)^2}-\eta_0.$$

Результаты расчета глубины потока в точке выклинивания депрессии и высоты промежутка высачивания показаны на рисунке 2 пунктиром. Результаты близки со средней квадратичной аппроксимацией, хотя в основу решений положены, на первый взгляд, разные соображения. На самом же деле, при использовании решения уравнения Лагранжа протяженность области питания траншеи принимается такой же, как и по Дюпюи.

Допустим, что мы отказываемся от допущения об одинаковой протяженности областей питания. Тогда, если h=H, то для длины влияния получим:

$$R=\frac{kH^2}{q}\sqrt{1-\eta^{'2}}=\frac{2L\sqrt{1-\eta^{'2}}}{1-\eta_0^2}.$$

И, наконец, если пренебречь высотой промежутка высачивания ($\eta_0=\eta^{'}$), то:

$$R=\frac{2L}{\sqrt{1-\eta_0^2}},$$

где, как всегда, L – длина влияния по Дюпюи.

Изложенный прием легко распространить на случай совершенного колодца. При этом плоская задача заменяется осесимметричной.

Литература

1. Сборник научных трудов СПбГТУ, №475, СПб, 1998. С.140-144.
2. Картан Анри. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.

**Наталья Владимировна Головкова,*

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,

Тел. раб. 535-79-92, эл. почта golovkova17@mail.ru