

# Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях

К.т.н. В.М. Жгутов,  
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Известно, что для получения истинной картины деформирования оболочек наряду с геометрической нелинейностью (проявляющейся при достаточно больших перемещениях) важно учитывать еще и физическую нелинейность (нелинейную упругость), что связано с серьезными математическими трудностями.

Исследование устойчивости нелинейно-упругих оболочек проводилось В.А. Крысько [1], который рассматривал пологие оболочки без ребер жесткости при шарнирно-подвижном закреплении их контура. При этом В.А. Крысько использовал уравнения равновесия в смешанной форме, т.е. упрощенную математическую модель технической теории оболочек, и решал задачи устойчивости в геометрически линейной постановке.

В работе [1] на примере пологих оболочек, выполненных из металла, показано, что учет нелинейного поведения материала приводит к снижению критической нагрузки (в сравнении с критической нагрузкой, найденной при учете только геометрической нелинейности) на 60-70 %.

В одной из работ [2] автора данной статьи также устанавливается, что при совместном учете геометрической и физической нелинейностей процент снижения критических нагрузок оказывается весьма значительным, что имеет большое практическое значение для проектировщиков.

Рассматриваем оболочки общего вида, подразумевая достаточно широкий класс оболочек наиболее распространенных частных видов: пологих прямоугольного плана и вращения (в частности, цилиндрических, конических, сферических, торообразных), а также многих других оболочек.

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной  $h$  принимаем за отсчетную поверхность  $z = 0$ .

Полагаем, что оси  $x$  и  $y$  криволинейной ортогональной системы координат ( $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ ) направлены по линиям кривизны отсчетной поверхности (параллелям и меридианам в случае оболочки вращения), а ось  $z$  – по нормали к поверхности  $z = 0$  в сторону ее вогнутости.

Со стороны вогнутости оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра задаем дискретно с помощью функции  $H=H(x, y)$ , характеризующей распределение ребер по оболочке и их высоту [3, 4].

Таким образом, толщина всей конструкции равна  $h + H$ , и  $-h/2 \leq z \leq h/2 + H$ .

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее контура.

Будем учитывать геометрическую и физическую нелинейности, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги.

Как известно, математическая модель деформирования оболочки включает в себя:

- геометрические соотношения (связь деформаций и перемещений);
- физические соотношения (связь напряжений и деформаций);
- функционал полной энергии деформации оболочки, из условия минимума которой могут быть получены уравнения устойчивого равновесия (или движения) данной оболочки.

## 1. Геометрические соотношения для ребристых оболочек при больших перемещениях

Геометрические соотношения в отсчетной поверхности  $z=0$  получаются с помощью операции ковариантного дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - K_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2 ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - K_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} U + \frac{\partial B}{\partial x} V \right) + \theta_1 \theta_2,$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  – деформации удлинения вдоль осей  $x$ ,  $y$  и, соответственно, сдвига в касательной плоскости  $(dx, dy)$ ;  $U$ ,  $V$  и  $W$  – компоненты вектора перемещений (перемещения) точек вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $A$  и  $B$  – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например,  $A=B=1$  для полой оболочки и  $A=const$ ,  $B=B(x)$  в случае оболочки вращения);  $K_x = 1/R_1$ ,  $K_y = 1/R_2$  – главные кривизны ( $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;

$$\theta_1 = - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + K_x U \right); \quad \theta_2 = - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + K_y V \right)$$

В указанных соотношениях квадратичные члены характеризуют геометрическую нелинейность, которую следует учитывать в случаях, когда квадратом длины вектора перемещений нельзя пренебречь в сравнении с его длиной [в частности, когда поперечные перемещения  $W$  (прогибы) соизмеримы с толщиной оболочки  $h$ ].

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = k f(z) (\psi_x - \theta_1); \quad \gamma_{yz} = k f(z) (\psi_y - \theta_2)$$

Здесь  $\psi_x$  и  $\psi_y$  – углы поворота отрезка нормали в плоскостях  $(dx, dz)$  и  $(dy, dz)$  соответственно;  $f(z)$  – функция, характеризующая распределение напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  вдоль оси  $z$ ;  $k$  – константа.

Будем полагать, что материалы обшивки и ребер имеют одинаковые (или близкие) сдвиговые жесткости. Тогда функция  $f(z)$  может быть принята в виде [2 – 4]

$$f(z) = - \frac{6}{(h+H)^2} \left( z + \frac{h}{2} \right) \left( z - \frac{h}{2} - H \right)$$

Эта функция при  $z = -h/2$  и  $z = h/2 + H$  обращается в нуль и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f(z) dz = 1; \quad \frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f^2(z) dz = \frac{1}{k} \quad (k = 5/6).$$

Перемещения в слое  $z \neq 0$  определяем по формулам

$$U^z = U + z\psi_x, \quad V^z = V + z\psi_y, \quad W^z = W,$$

откуда для деформаций в слое  $z \neq 0$  немедленно получаем соотношения в виде

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где  $\chi_1, \chi_2$  и  $\chi_{12}$  – функции изменения кривизны и кручения, определяемые, как легко видеть, по формулам:

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x;$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_y \right)$$

## 2. Физические соотношения для нелинейно-упругого материала

В соответствии с деформационной теорией пластичности физические соотношения для нелинейно-упругого изотропного материала имеют вид

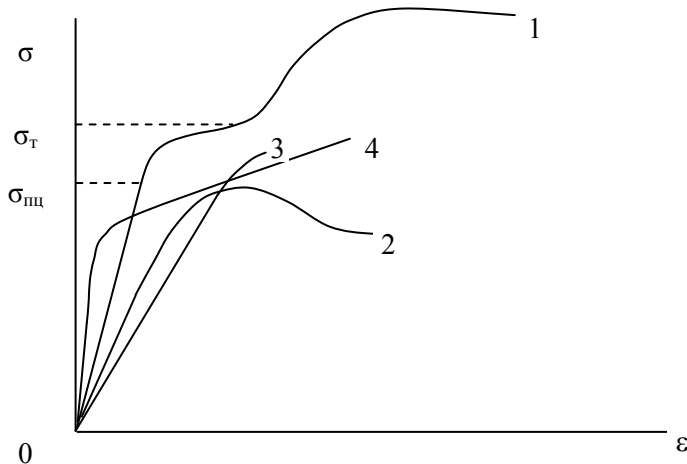
$$\sigma_x = \frac{E_c}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E_c}{1-\mu^2}(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E_c}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}^z;$$

$$\tau_{xz} = \frac{E_c}{2(1+\mu)}\gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{E_c}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}, \quad (1)$$

где  $E_c = \sigma_i / \varepsilon_i$  – «секущий» модуль упругости, представляющий собой нелинейную функцию интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$ , определяемую на основе экспериментальных данных для данного материала.

Интенсивность деформации  $\varepsilon_i$  определяем с помощью выражения [5]

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + \varepsilon_x^z \varepsilon_y^z + (\varepsilon_y^z)^2 + \frac{1}{4}[(\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]} \quad (2)$$



**Рисунок 1. Примерный вид диаграмм «σ – ε» для стали (кривая 1), винипласта (кривая 2), оргстекла (кривая 3) и алюминия (кривая 4)**

Как известно, зависимости (диаграммы) «напряжение  $\sigma$  – деформация  $\varepsilon$ » для различных материалов определяются опытным путем в результате испытаний на растяжение (сжатие) соответствующего образца.

Эти зависимости, вообще говоря, имеют ярко выраженный нелинейный характер и обладают большим разнообразием форм, отличаясь друг от друга даже в пределах одной группы материалов (металлы, полимеры, бетоны и т. п.).

Нелинейные характеристики « $\sigma$  –  $\varepsilon$ » обычно задаются в виде таблиц (значений аргумента и функции) или графиков, иллюстрирующих таблицы экспериментальных значений.

Для исследования НДС оболочек необходимо иметь аналитическое описание нелинейных зависимостей « $\sigma$  –  $\varepsilon$ » материала в виде одной или нескольких функций, определяемых для каждого из (рабочих) участков диаграммы.

Из физических соображений можно предположить ту или иную аналитическую форму описания нелинейной функции  $\sigma = f(\varepsilon)$ ; входящие же в эту функцию константы могут быть найдены путем аппроксимации при помощи известных математических процедур (обычно основывающихся на минимизации среднеквадратичного отклонения между аналитической функцией и экспериментальными данными).

Найденная таким образом аналитическая зависимость  $\sigma = f(\varepsilon)$ , соответствующая простому напряженному состоянию, экстраполируется на случай сложного напряженного состояния в виде  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ .

Приведем несколько вариантов аппроксимации экспериментальных нелинейных зависимостей « $\sigma$  –  $\varepsilon$ » и, соответственно, « $\sigma_i$  –  $\varepsilon_i$ ».

1<sup>0</sup>. В ряде случаев зависимость « $\sigma$  –  $\varepsilon$ » удобно представить аналитически в форме, предложенной А.А. Ильюшиным:

$$\sigma = E(1 - \omega)\varepsilon.$$

Здесь  $E$  – начальный модуль упругости;  $\omega = \omega(\varepsilon)$  – безразмерная функция деформации (функция А.А. Ильюшина),  $0 \leq \omega < 1$  [по определению  $\omega = 0$ , если  $\sigma < \sigma_{\text{пц}}$ , где  $\sigma_{\text{пц}}$  – предел пропорциональности (для данного материала)].

Для случая сложного напряженного состояния принимается

$$\sigma_i = E[1 - \omega(\varepsilon_i)] \varepsilon_i.$$

Если, например, диаграмма « $\sigma - \varepsilon$ » (а, следовательно, и « $\sigma_i - \varepsilon_i$ ») может быть аппроксимирована (с достаточной степенью точности) двумя наклонными прямыми, то функцию  $\omega = \omega(\varepsilon_i)$  целесообразно записать в виде

$$\omega = \lambda[1 - (\varepsilon_T / \varepsilon_i)]. \quad (3)$$

Здесь  $\lambda = 1 - (E_T / E)$ , где  $E_T$  – модуль упрочнения (для данного материала);  $\varepsilon_T$  – деформация текучести, соответствующая пределу текучести  $\sigma_T$ .

Значения  $E_T$ ,  $E$ ,  $\sigma_T$  и  $\varepsilon_T$  считаются известными и для некоторых материалов представлены в табл. 1 [6].

**Таблица 1**

Материал	$E$ , МПа	$E_T/E$	$\varepsilon_T = \sigma_T/E$
Сталь закаленная 40 X	$2,1 \cdot 10^5$	0,028	0,00409
Сталь закаленная 30 XГС	$1,95 \cdot 10^5$	0,224	0,00495
Сплав ВТ1	$1,17 \cdot 10^5$	0,079	0,00367

<sup>2</sup> . Для некоторых материалов в качестве аналитического описания диаграммы « $\sigma - \varepsilon$ » применима степенная функция

$$\sigma = C\varepsilon^n,$$

где  $C$  – константа;  $n$  – показатель степени (натуральное число).

Для случая сложного напряженного состояния имеем

$$\sigma_i = C\varepsilon_i^n.$$

<sup>3</sup> . Для металлов и бетона аппроксимирующая функция  $\sigma = f(\varepsilon)$  может быть представлена с помощью двучлена

$$\sigma = (C_1 - C_2\varepsilon^n)\varepsilon,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы.

Тогда

$$\sigma_i = (C_1 - C_2\varepsilon_i^n)\varepsilon_i,$$

в частности,

$$\sigma_i = E[1 - \omega(\varepsilon_i)]\varepsilon_i, \quad (4)$$

где

$$\omega(\varepsilon_i) = m(\varepsilon_i)^2.$$

Здесь  $m$  – безразмерная константа (для металлов, например,  $m = 10^{-5}$ ).

В дальнейшем будем использовать аналитические зависимости  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ , записанные с помощью соотношения (4).

Тогда для «секущего» модуля упругости имеем

$$E_c = E[1 - \omega(\varepsilon_i)] = E - Em(\varepsilon_i)^2, \quad (5)$$

на основании чего соотношения (1) могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^p, \quad \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^p, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^p,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^p, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^e - \tau_{yz}^p, \quad (6)$$

где линейно упругие составляющие (отмечены индексом «е») определяются с помощью известных формул

$$\begin{aligned} \sigma_x^e &= G_1(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z), \quad \sigma_y^e = G_2(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \\ \tau_{xy}^e &= G_{12}\gamma_{xy}^z, \quad \tau_{xz}^e = G_{13}\gamma_{xz}^z, \quad \tau_{yz}^e = G_{23}\gamma_{yz}^z, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых  $G_1 = G_2 = E/(1-\mu^2)$ ;  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E/2(1-\mu)$ ,

а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (отмечены индексом «р») вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_x^p &= G_1 m \varepsilon_i^2 (\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z), \quad \sigma_y^p = G_2 m \varepsilon_i^2 (\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \\ \tau_{xy}^p &= G_{12} m \varepsilon_i^2 \gamma_{xy}^z, \quad \tau_{xz}^p = G_{13} m \varepsilon_i^2 \gamma_{xz}^z, \quad \tau_{yz}^p = G_{23} m \varepsilon_i^2 \gamma_{yz}^z. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение для  $\varepsilon_i^2$  с учетом (2) запишем в следующем виде

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{3} [b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 f^2(z)],$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2; \quad b_2 = 2\varepsilon_x \chi_1 + \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1 + 2\varepsilon_y \chi_2 + \gamma_{xy} \chi_{12}; \\ b_3 &= \chi_1^2 + \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + \chi_{12}^2; \quad b_4 = k^2 (\beta_x^2 + \beta_y^2) / 4. \end{aligned}$$

Здесь  $\beta_x = \psi_x - \theta_1$ ,  $\beta_y = \psi_y - \theta_2$ .

Следуя А.С. Вольмиру [7], положим  $\gamma_{xz} \approx \beta_x$ ,  $\gamma_{yz} \approx \beta_y$ . Тогда можно записать

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{3} (b_1 + b_2 z + b_3 z^2),$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \beta_x^2 + \beta_y^2); \quad b_2 = 2\varepsilon_x \chi_1 + \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1 + 2\varepsilon_y \chi_2 + \gamma_{xy} \chi_{12}; \\ b_3 &= \chi_1^2 + \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + \chi_{12}^2. \end{aligned}$$

Интегрируя напряжения (1) по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2 + H$ , с учетом (5) и (6) получим выражения для усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности и приходящихся на единицу длины сечения) в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^e - N_x^p, \quad N_y = N_y^e - N_y^p, \quad N_{xy} = N_{xy}^e - N_{xy}^p, \\ M_x &= M_x^e - M_x^p, \quad M_y = M_y^e - M_y^p, \quad M_{xy} = M_{xy}^e - M_{xy}^p, \\ Q_x &= Q_x^e - Q_x^p, \quad Q_y = Q_y^e - Q_y^p, \end{aligned}$$

где линейно упругие составляющие (с индексом «е») вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} N_x^e &= G_1 [(h + \bar{F})(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \\ N_y^e &= G_2 [(h + \bar{F})(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\ N_{xy}^e &= G_{12} [(h + \bar{F})\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}]; \\ M_x^e &= G_1 \left[ \bar{S}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1 + \mu\chi_2) \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$M_y^e = G_2 \left[ \bar{S}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2 + \mu\chi_1) \right];$$

$$M_{xy}^e = G_{12} \left[ \bar{S}\gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12} \right],$$

$$Q_x^e = kG_{13}(h + \bar{F})(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y^e = kG_{23}(h + \bar{F})(\psi_y - \theta_2),$$

а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (с индексом «р») внутренних силовых факторов определяются с помощью выражений

$$N_x^p = G_1[I_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)];$$

$$N_y^p = G_2[I_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$

$$N_{xy}^p = G_{12}(I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12});$$

$$M_x^p = G_1[I_2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \quad (10)$$

$$M_y^p = G_2[I_2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$

$$M_{xy}^p = G_{12}(I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12});$$

$$Q_x^p = G_{13}kI_4(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y^p = G_{23}kI_4(\psi_y - \theta_2).$$

В соотношениях (9) и (10)  $\bar{F}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{J}$  – площадь поперечного (или продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz, \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz, \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz;$$

$$I_s = m \int_{-h/2}^{h/2+H} \varepsilon_i^2 z^{s-1} dz, \quad 1 \leq s \leq 3; \quad I_4 = m \int_{-h/2}^{h/2+H} \varepsilon_i^2 f(z) dz - \text{жесткостные параметры.}$$

В развернутом виде параметры  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  принимают вид

$$I_1 = \frac{4}{3} m [(h + \bar{F})b_1 + \bar{S}b_2 + (\bar{J} + h^3/12)b_3]; \quad I_2 = \frac{4}{3} m [\bar{S}b_1 + (\bar{J} + h^3/12)b_2 + \bar{K}b_3];$$

$$I_3 = \frac{4}{3} m [(\bar{J} + h^3/12)b_1 + \bar{K}b_2 + (h^5/80 + \bar{M})b_3],$$

где

$$\bar{K} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^3 dz, \quad \bar{M} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^4 dz.$$

*Примечание 1.* Если, следуя А.С.Вольмиру [7], в соотношениях (10) вместо  $I_4$  положить  $I_1$ , для поперечных сил будем иметь

$$Q_x^p = G_{13}kI_1(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y^p = G_{23}kI_1(\psi_y - \theta_2).$$

*Примечание 2.* Если в некоторой точке оболочки происходит уменьшение интенсивности деформаций, то соотношения (1) следует заменить нижеследующими соотношениями, относящимися к разгрузке (в процессе разгрузки меняются только упругие составляющие деформаций):

$$\sigma_x = \tilde{\sigma}_x + G_1(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z - \tilde{\varepsilon}_x^z - \mu\tilde{\varepsilon}_y^z); \quad \sigma_y = \tilde{\sigma}_y + G_2(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z - \tilde{\varepsilon}_y^z - \mu\tilde{\varepsilon}_x^z);$$

$$\tau_{xy} = \tilde{\tau}_{xy} + G_{12}(\gamma_{xy}^z - \tilde{\gamma}_{xy}^z); \quad \tau_{xz} = \tilde{\tau}_{xz} + G_{13}(\gamma_{xz}^z - \tilde{\gamma}_{xz}^z);$$

$$\tau_{yz} = \tilde{\tau}_{yz} + G_{23}(\gamma_{yz}^z - \tilde{\gamma}_{yz}^z).$$

В этих формулах с помощью «тильды» отмечены напряжения и деформации (в данной точке) в момент начала разгрузки.

Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях

Подчеркнем, что если в процессе исследования НДС оболочки с учетом упругопластических свойств материала необходимо определять зоны пластических деформаций, и, соответственно, решать задачу разгрузки, всю информацию о НДС оболочки (в каждой ее точке) следует запоминать.

*Примечание 3.* В случае произвольной функции  $\omega(\varepsilon_i)$  напряжения (8) обретают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^p &= G_1 \omega(\varepsilon_i) (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z), \quad \sigma_y^p = G_2 \omega(\varepsilon_i) (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z); \\ \tau_{xy}^p &= G_{12} \omega(\varepsilon_i) \gamma_{xy}^z, \quad \tau_{xz}^p = G_{13} \omega(\varepsilon_i) \gamma_{xz}^z, \quad \tau_{yz}^p = G_{23} \omega(\varepsilon_i) \gamma_{yz}^z. \end{aligned}$$

Нелинейно-упругие составляющие внутренних силовых факторов сохраняют вид (10) с той лишь разницей, что входящие в (10) жесткостные параметры  $I_1, I_2$  и  $I_3$  следует вычислять по общим формулам

$$I_s = \int_{-h/2}^{h/2+H} \omega(\varepsilon_i) z^{s-1} dz, \quad 1 \leq s \leq 3.$$

*Примечание 4.* Если функцию  $\omega(\varepsilon_i)$  взять в виде (3), то интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  целесообразно преобразовать следующим образом:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b_1 + b_2 z + b_3 z^2} = \frac{2\sqrt{b_3}}{\sqrt{3}} \sqrt{(z+b)^2 + c}.$$

где

$$b = \frac{b_2}{2b_3}, \quad c = \frac{b_1}{b_3} - \left(\frac{b_2}{2b_3}\right)^2 \quad \text{и} \quad b_3 > 0.$$

Таким образом,

$$\omega(\varepsilon_i) = \lambda - \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{(z+b)^2 + c}}.$$

Здесь

$$\lambda = \left(1 - \frac{E_T}{E}\right), \quad \lambda_1 = \frac{\lambda \varepsilon_T \sqrt{3}}{2\sqrt{b_3}}.$$

Вычисляя интегралы  $I_1, I_2$  и  $I_3$ , в этом случае получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda(h + \bar{F}) - \lambda_1 \ln \frac{h/2 + \bar{F} + b + \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c}}{-h/2 + b + \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c}}; \\ I_2 &= \lambda \bar{S} + \lambda_1 b \ln \frac{h/2 + \bar{F} + b + \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c}}{-h/2 + b + \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c}} - \\ &\quad - \lambda_1 \left( \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c} - \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c} \right); \\ I_3 &= \lambda \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) - \lambda_1 \left[ (h/2 + \bar{F} + b) \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c} - (-h/2 + b) \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left( \frac{h}{2} + \bar{F} + b + \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( -\frac{h}{2} + b + \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} c \ln \frac{h/2 + \bar{F} + b + \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c}}{-h/2 + b + \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c}} + \frac{1}{8} c^2 \frac{1}{\left( h/2 + \bar{F} + b + \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c} \right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} c^2 \frac{1}{\left( -h/2 + b + \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c} \right)^2} \right] + \lambda_1 2b \left( \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c} - \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c} \right) - \\ &\quad - \lambda_1 b^2 \ln \frac{h/2 + \bar{F} + b + \sqrt{(h/2 + \bar{F} + b)^2 + c}}{-h/2 + b + \sqrt{(-h/2 + b)^2 + c}}. \end{aligned}$$

### 3. Функционал полной энергии деформации нелинейно-упругих ребристых оболочек

Функционал  $\mathcal{E}$  полной энергии деформации оболочки для задач статики представляет собой разность потенциальной энергии  $\Pi$  и работы внешних сил  $A^E$ :

$$\mathcal{E} = \Pi - A^E,$$

где

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] d\Omega$$

$$A^E = \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS.$$

Здесь  $P_x, P_y$  и  $q$  – компоненты внешней нагрузки в направлении осей  $x, y$  и  $z$ ;  $\Omega$  – область в пространстве  $(x, y, z)$ ;

$S$  – область в плоскости  $(x, y)$ ;  $d\Omega$  и  $dS$  – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ( $d\Omega = AB dx dy dz, dS = AB dx dy$ ).

На основании соотношений (6) представим функционал  $\mathcal{E}$  в виде [2, 8 – 11]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e - \mathcal{E}_p,$$

где функционал

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x^e \varepsilon_x^z + \sigma_y^e \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^e \gamma_{xz} + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}] d\Omega - \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS \quad (11)$$

соответствует линейно упругой постановке задачи, а функционал

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x^p \varepsilon_x^z + \sigma_y^p \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^p \gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^p \gamma_{xz} + \tau_{yz}^p \gamma_{yz}] d\Omega \quad (12)$$

описывает нелинейную упругость.

Проинтегрируем функционалы (11 и (12) по переменной  $z$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2+H$ ). В результате получим

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ N_x^e \varepsilon_x + N_y^e \varepsilon_y + N_{xy}^e \gamma_{xy} + M_x^e \chi_1 + M_y^e \chi_2 + 2M_{xy}^e \chi_{12} + Q_x^e (\psi_x - \theta_1) + Q_y^e (\psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \} AB dx dy.$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ N_x^p \varepsilon_x + N_y^p \varepsilon_y + N_{xy}^p \gamma_{xy} + M_x^p \chi_1 + M_y^p \chi_2 + 2M_{xy}^p \chi_{12} + Q_x^p (\psi_x - \theta_1) + Q_y^p (\psi_y - \theta_2) \} AB dx dy.$$

Функционалы  $\mathcal{E}_e$  и  $\mathcal{E}_p$ , выраженные через деформации, примут вид

$$\mathcal{E}_e = \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ (h + \bar{F}) [\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1 \gamma_{xy}^2 + \mu_1 k (\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1 k (\psi_y - \theta_2)^2] + 2\bar{S} \left( \varepsilon_x \chi_1 + \mu \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_2 + \mu \varepsilon_y \chi_1 + 2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2) - \frac{2}{G_1} (P_x U + P_y V + qW) \} AB dx dy$$



и

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = & \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ I_1 \left[ \varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1 \gamma_{xy}^2 + \mu_1 k (\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1 k (\psi_y - \theta_2)^2 \right] + \right. \\ & + I_2 \left[ 2\varepsilon_x \chi_1 + 2\mu \varepsilon_x \chi_2 + 2\mu \varepsilon_y \chi_1 + 2\varepsilon_y \chi_2 + 4\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12} \right] + \\ & \left. + I_3 \left[ \chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2 \right] \right\} AB dx dy, \end{aligned}$$

где  $\mu_1 = 0,5(1 - \mu)$ .

Граничные условия (определяемые способом закрепления контура оболочки) считаются заданными.

Таким образом, математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях построена.

Алгоритм исследования предложенной математической модели и некоторые результаты анализа устойчивости нелинейно-упругих оболочек при больших прогибах приведены в работе В.М. Жгутова [2].

### Литература

1. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов, 1976. 216 с.
2. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых пологих оболочек с учетом геометрической и физической нелинейностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, № 4. М., 2009. С.65–70.
3. Карпов В.В., Игнатъев О.В., Сальников А.Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М., СПб., 2002. 420 с.
4. Жгутов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17: СПб., 2004. 177 с.
5. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М., 1956. 419 с.
6. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968. 448 с.
7. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972. 432 с.
8. Жгутов В.М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. СПб., 2008. С.110-131.
9. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Известия Орловского государственного технического университета. Серия «Строительство, транспорт», № 4. Орел, 2007. С.20-23.
10. Жгутов В.М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. 7-11 апреля 2008 года, РУДН. М., 2008. С.341-346.
11. Жгутов В.М., Мухин Д.Е., Панин А.Н. Прочность и устойчивость пологих ребристых оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, № 2. М., 2008. С. 41-44.

*\*Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*

*Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc\_kitezh@mail.ru*