Расчет конструкций промышленных полов с учетом динамического воздействия нагрузок от перемещения грузоподъёмного транспорта

Доцент И.А. Войлоков*,
ГОУ Санкт-Петербургский государственный политехнический университет;
генеральный директор А.М. Горб,
ООО «Конкрит инжиниринг»

Интенсивное перемещение подъёмно-транспортного оборудования является характерным для большинства современных промышленных объектов. При этом данные воздействия часто являются определяющими при расчёте и конструировании промышленных полов. Авторами статьи были проведены теоретические исследования, в результате которых были получены соответствующие решения и формулы, а также обоснована необходимость учёта данных воздействий при конструировании полов, в том числе, с использованием решений динамической задачи теории упругости.

Особенностью решения данной задачи, в отличие от статической, является необходимость учета сил инерции, являющихся функциями массы рассматриваемой (рассчитываемой) плиты пола и её ускорений при воздействии многократно повторяющихся подвижных (динамических) нагрузок с учётом наличия подстилающего упругого основания. При динамическом расчете расчетная модель назначается с учётом необходимой точности решения, которая соответствует системе с бесконечным числом степеней свободы, которая приводит к необходимости интегрирования неоднородного дифференциального уравнения в частных производных, так как перемещения точек плиты являются функциями координат и времени:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-p(x,y)=g(x,y,t)\,, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость плиты;

w – прогиб плиты;

x, y – координаты срединной плоскости плиты;

m – масса плиты;

$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ – силы инерции плиты;

$p(x, y)$ – реактивный отпор основания;

$g(x,y,t)$ – нагрузка.

Рассмотрим решение уравнения (1) для случая движения нагрузки, распределенной по площади малого (по сравнению с размерами плиты) прямоугольника, по плите неограниченных размеров. Для упрощения примем в качестве расчётной винклеровскую одноконстантную модель основания (модель местных упругих деформаций). Использование других моделей (например, упругого полупространства) в данном случае возможно путём соответствующего приведения упругой характеристики гибкости плиты к одноконстантной модели с использованием вместо значения коэффициента постели статического или динамического модуля деформации (упругости) грунта.

Определение усилий в рассматриваемой плите при действии нескольких нагрузок может быть произведено с помощью принципа суперпозиции нагрузок. Введем вместо неподвижных координат x и y (в случае рассмотрения статических нагрузок) подвижные ξ и η, движущиеся вместе с нагрузкой с постоянной скоростью v (рис. 1). Тогда получим:

$$\xi = x - v_x t\,; \quad \eta = y - v_y t\,, \quad (2)$$

где: v_x, v_y – проекции скорости на оси координат x и y; t – время.

Произведя замену переменных x и y в уравнении (1) на ξ и η, получим:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2\partial \eta^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}\right)+m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}v_x^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta}v_x\right)v_y+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}v_y^2+cw=p(\xi;\eta) \quad (3)$$

Согласно этому методу, если $\varphi(x, y)$ и ее частные производные есть непрерывные функции, равные нулю в бесконечности, то для трансформанта Фурье

$$E_{\varphi(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{i(\alpha x+\beta y)}dxdy \quad (4)$$

существует обратное преобразование:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E_{\varphi(\alpha,\beta)}e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta . \quad (5)$$

Уравнение (3) умножаем на $\frac{1}{2\pi} \quad e^{i(\alpha x+\beta y)}$ и, интегрируя по всей плоскости, получаем:

$$D(\alpha^2+\beta^2)E_{(\alpha,\beta)} - m(v_x\alpha+v_y\beta)^2E_{(\alpha,\beta)} -$$

$$+cE_{(\alpha,\beta)} = E_{p(\alpha,\beta)} . \quad (6)$$

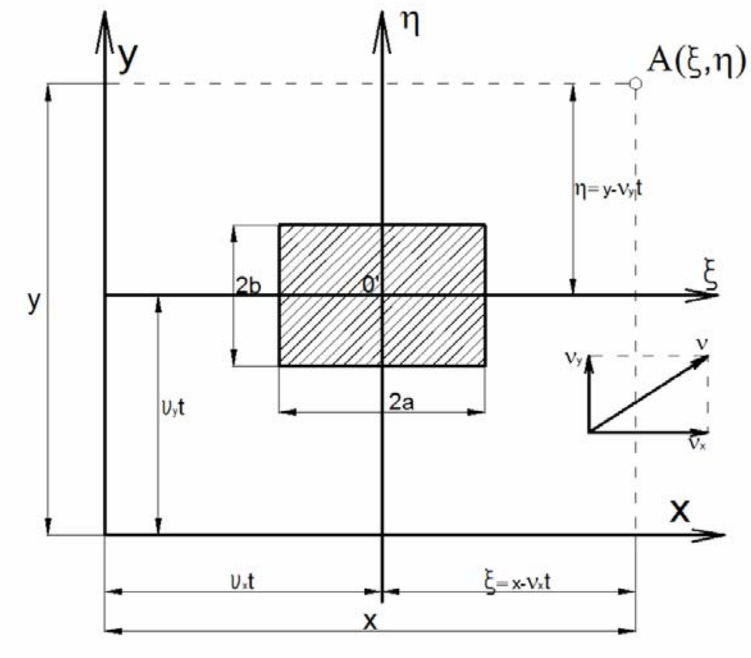

Рисунок 1. Расчётная схема для определения динамического воздействия подвижной нагрузки

Откуда:

$$E_{(\alpha,\beta)} = \frac{E_p(\alpha,\beta)}{c - m(v_x\alpha+v_y\beta)^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha d\beta \quad (7)$$

Используя выражение (5), получаем:

$$w_{\xi,\eta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E_{p(\alpha,\beta)}e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}}{c - m(v_x\alpha+v_y\beta)^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha d\beta \quad (8)$$

Если принять, что $v_y = 0$ – нормальный режим движения транспортного средства ($-v_x = v$), а $p(\xi;\eta)$ соответствует нагрузке, равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами *2a* и *2b* с интенсивностью *q*, то после ряда преобразований получим выражения для прогибов плиты и изгибающих моментов:

$$w_{(\xi,\eta)} = \frac{4q}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha\xi\cos\beta\eta\sin\alpha a\sin\beta b d\beta}{\alpha\beta\left[c - mv^2\alpha^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]}$$

$$M_{\xi} = \frac{4qD}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\alpha^2+\beta^2\mu)\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha\xi\cos\beta\eta d\alpha d\beta}{\alpha\beta\left[c - mv^2\alpha^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} \quad (9)$$

$$M_{\eta} = \frac{4qD}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\mu\alpha^2+\beta^2)\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha\xi\cos\beta\eta d\alpha d\beta}{\alpha\beta\left[c - mv^2\alpha^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} .$$

С целью получения решения для движущейся сосредоточенной силы *P* необходимо принять условия $a \to 0, b \to 0$, $4abq = P$.

После соответствующих преобразований получим:

$$w_{(\xi,\eta)} = \frac{P}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos\alpha\xi\cos\beta\eta d\alpha d\beta}{c - mv^2\alpha^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

$$M_\xi = \frac{PD}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(\alpha^2+\mu\beta^2)\cos\alpha\xi\cos\beta\eta d\alpha d\beta}{c - mv^2\alpha^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2} \qquad (10)$$

$$M_\eta = \frac{PD}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(\mu\alpha^2+\beta^2)\cos\alpha\xi\cos\beta\eta d\alpha d\beta}{c - mv^2\alpha^2 + D(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

На основании полученных выражений можно вычислить динамические коэффициенты как отношение моментов или прогибов плиты пола при динамической и статической нагрузках (статические моменты и прогибы вычисляются по формулам (9), (10), при условии, что $v = 0$).

Для многих практических задач можно удовлетвориться приближенным решением, рассматривая плиту как систему с несколькими степенями свободы. Наиболее простой моделью для приближенного решения динамической задачи будет система с одной степенью свободы, которая дает приемлемую точность.

Дифференциальное уравнение движения для системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$M_П \frac{d^2w}{dt^2} + k\Phi\frac{dw}{dt} + kw = P(t), \qquad (11)$$

где $M_п$ – приведенная масса плиты;

w – прогиб плиты;

k – коэффициент жесткости плиты;

Φ – модуль затухания;

$P(t)$ – подвижная нагрузка.

Приведенную массу плиты с присоединенной массой грунта определим из условия, что кинетическая энергия системы, состоящей из плиты с присоединенной массой основания, равняется кинетической энергии сосредоточенной массы, расположенной в заданной точке. Примем условие, что при колебаниях сохраняется одна и та же форма упругой поверхности плиты. Уравнение поверхности выразим так:

$$w_{(x,y)} = w_{max}\varphi_{(x,y)}\, sin\, p(t-\alpha), \qquad (12)$$

где $w_{(x,\, y)}$ – прогиб в произвольной точке с координатами *x* и *y*;

w_{max} – максимальный прогиб; *α* – угол, определяемый начальными условиями.

Условие равенства кинетической энергии плиты с присоединенной массой основания кинетической энергии сосредоточенной массы запишем следующим образом:

$$U_{пл} + U_{осн} = U_{пр}, \qquad (13)$$

где $U_{пл}$ – кинетическая энергия плиты с распределенной массой;

$U_{осн}$ – кинетическая энергия присоединенного грунтового основания;

$U_п$ – кинетическая энергия приведенной сосредоточенной массы.

Выражения для определения $U_{пл}$, $U_{осн}$, $U_{пр}$ имеют вид:

$$U_{\text{пл}} = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \lambda_n h(w')^2\,dxdy$$

$$U_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l\int_0^l \lambda_r h(w'\frac{z}{h_0})^2\,dxdydz \quad (14)$$

$$U_{np} = \frac{1}{2}M_{\text{п}}(w')^2,$$

где l – длина плиты (для бесконечных плит – диаметр чаши прогиба или удвоенное значение упругой характеристики плиты);

λ_n – масса плиты, отнесенная к единице объема;

λ_r – масса единицы объема грунтового основания;

h – толщина плиты;

h_o – глубина деформируемого слоя;

z – ордината точки, расположенной на произвольной глубине.

Подставляя выражение (14) в равенство (13), для упрощения заменяя прямоугольные координаты полярными и производя необходимые преобразования, получаем:

$$M_n = 4\lambda_n h\int_0^{\pi/2}\int_0^R [2f_0(\xi)]^2 rdrd\varphi + \frac{4\lambda_0}{h_0^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{h_0}[2f_0(\xi)]^2 z^2 dzdrd\varphi \quad (15)$$

Обозначив R = 3,8, $l = \sqrt[4]{\frac{D}{c}}$ и через $f_0(\xi)$ – функцию Бесселя, окончательно получим:

$$M_n = 3{,}76l^2\left(\lambda_n h + \frac{1}{3}\lambda_0 h_0\right) \quad (16)$$

Коэффициент жесткости плиты k выражает усилие, необходимое для создания единичного перемещения. Он может быть выражен величиной, обратной прогибу плиты:

$$k = 2{,}4\sqrt{cE_б h^3}, \quad (17)$$

где c – коэффициент постели грунта; $E_б$ – модуль упругости бетона; h – толщина плиты.

Модуль затухания $Ф$ характеризует влияние неупругих сопротивлений грунта и определяется опытным путем (значение $Ф$ меняется от 0,003 до 0,010 в зависимости от вида грунтов). Чтобы определить нагрузку $P(t)$, переменную во времени, воспользуемся методом приведенных сил. Для этого быстро перемещающуюся по плите нагрузку заменим одной неподвижной силой в центре приведения, но меняющей свое значение во времени. Закон изменения приведенной силы во времени определим из условия, что статическое перемещение центра приведения в любое мгновение от любой силы при её фактическом для данного мгновения положения на плите равняется перемещению такого же центра от приведенной силы с соответственно подобранным значением. Принимая значение прогиба центра плиты при любом расположении нагрузки в виде одной полуволны – синусоиды, получим:

$$P(t) = P\sin mt \quad (18)$$

$$m = \pi v / l,$$

где m – частота вынужденных колебаний плиты заданной жёсткости;

v – скорость движения нагрузки;

l – то же, что и в формуле (14).

При расчетах конструкций плит учитывают максимальные значения прогибов и усилий, то есть начало колебательного процесса, а не конец. Поэтому при выполнении практических расчетов влияние неупругих сопротивлений грунта можно не учитывать. С учетом такого допущения интеграл дифференциального уравнения (11) может быть определен следующими формулами:

- при $mt_1 < \pi$ (нагрузка движется по плите)

$$w = w_{cm}^{max} \frac{P}{p^2 - m^2}(p \sin mt - m \sin pt) \quad (19)$$

- при $mt_1 > \pi$ (нагрузка сошла с плиты)

$$w = w_{cm}^{max} \frac{P}{p^2 - m^2}\{[p \sin mt - m \sin pt] + [p \sin m(t - t_1) - m \sin p(t - t_1)]\}, \quad (20)$$

где $p = \sqrt{\frac{k}{M_П}}$ – частота собственных колебаний плиты;

$w_{cm}^{max} = \frac{P}{p^2 M_П}$ – прогиб плиты при статической нагрузке *P.*

По формулам (19) и (20) можно определить коэффициент динамичности как отношение прогибов покрытий при динамической и статической нагрузках.

Формулы для коэффициентов динамичности в зависимости от $\beta = p/m$, т.е. от соотношения частот собственных *p* и вынужденных *m* колебаний, а также от характера колебаний плиты будут следующие:

1) свободные колебания $\beta < 1$: $k_Д = \frac{2\beta}{1 - \beta^2} \cos\frac{\beta\pi}{2}$;

2) вынужденные колебания $\beta = 1$: $k_Д = \pi/2$ (21);

3) вынужденные колебания $\beta = 1 \div 3$: $k_Д = \frac{\beta}{\beta - 1} \sin\frac{2\pi}{\beta + 1}$;

4) вынужденные колебания $\beta > 3$: $k_Д = \frac{\beta}{\beta - 1}$.

Для практических расчетов с достаточной точностью можно применять решения для системы и с одной степенью свободы. Суммарное воздействие подвижной нагрузки будет определяться коэффициентом динамичности.

Литература

1. Бондаренко С.В. Теория сопротивления конструкций режимным нагружениям. М.,1984.
2. Белов В.В., Васильев П.И. Пространственная блочно-контактная модель деформирования железобетонных оболочек и плит с трещинами // Пространственные конструкции зданий и сооружений-Вып.7. М.,1991.
3. Лехницкий С.Г.Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
4. Муращев В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона. М., 1988.

**Илья Анатольевич Войлоков, Санкт-Петербург*

Тел. моб.: +7(921)944-52-99; эл. почта: ilya@voilokov.ru