

## Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I

К.т.н. В.М. Жгутов\*,

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Оболочки обладают практически неисчерпаемым разнообразием геометрических форм и высокой несущей способностью (при относительно небольшой материалоемкости), а потому как элементы разного рода конструкций находят широкое применение в технике и строительстве.

Для придания большей жесткости тонкостенная часть оболочки зачастую подкрепляется ребрами (или накладками), что существенно повышает ее прочность при незначительном увеличении массы конструкции. По технологическим причинам оболочки могут иметь вырезы, которые в ряде случаев также подкрепляются ребрами.

Таким образом, в одной конструкции могут быть и ребра, и вырезы; следовательно, всю конструкцию необходимо рассматривать как оболочку ступенчато-переменной толщины (или ребристую оболочку).

Указанные конструкции могут подвергаться не только статическим, но и динамическим нагрузкам, допуская прогибы, соизмеримые с толщиной оболочки.

Расчеты на прочность, колебания и устойчивость таких конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций, содержащих ребра (накладки или вырезы), с учетом дискретности расположения ребер, их сдвиговой и крутильной жесткостей, поперечных сдвигов, геометрической и физической нелинейностей, возможности развития деформации ползучести при длительных нагрузках, исследовано недостаточно. Причины тому – сложность совместного учета всех упомянутых факторов и необходимость решения громоздких нелинейных краевых задач.

В процессе деформирования в зависимости от уровня и длительности внешних воздействий могут проявиться различные свойства материала конструкции: упругость, пластичность, ползучесть и т.д. Проявление пластичности или ползучести приводит к необратимым последствиям. Для того чтобы конструкция являлась заведомо прочной и устойчивой, необходимо исключить возможность проявления этих свойств.

В свете изложенного актуальными и важными представляются задачи разработки более совершенных моделей деформирования ребристых оболочек и соответствующих им алгоритмов их исследования, а также анализа прочности и устойчивости ребристых оболочек при учете различных свойств материала.

Исследование свободных нелинейных колебаний оболочек проводилось В.М. Жгутовым в работе [1]. Автором были получены уравнения (колебательного) движения упругих изотропных пологих оболочек при учете геометрической нелинейности, дискретного расположения ребер, их ширины, сдвиговой и крутильной жесткости, а также эффекта поперечных сдвигов и инерции вращения.

В настоящей работе предпринята попытка обобщения и развития предложенных автором математических моделей на случаи оболочек общего вида и при учете различных свойств материала.

Рассматриваем оболочки общего вида с краем (пологие на прямоугольном плане и вращения, в частности, цилиндрические, конические, сферические, торообразные, а также некоторые другие оболочки).

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной  $h$  принимаем за отсчетную поверхность  $z = 0$ . Оси  $x$  и  $y$  криволинейной ортогональной системы координат ( $-a \leq x \leq a$  и  $-b \leq y \leq b$ ) направляем по линиям кривизны отсчетной поверхности, а ось  $z$  – по внутренней нормали поверхности  $z = 0$  так, чтобы система координат  $x, y, z$  была правой. (Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на отсчетной поверхности не имеет особенностей).

С внутренней стороны оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра (или вырезы) задаем дискретно с помощью функции  $H = H(x, y)$ , характеризующей распределение ребер (вырезов) по оболочке, их ширину и высоту [1,2,3]. Таким образом, толщина всей конструкции равна  $h + H$  и  $-h/2 \leq z \leq h/2 + H$ . (Если  $H > 0$ , то оболочка подкреплена ребрами (или накладками), если же  $H < 0$ , то она ослаблена вырезами).

Считаем, что оболочка находится под действием динамической механической нагрузки при определенном закреплении ее края (контур).

Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I

Будем учитывать геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, эффект поперечных сдвигов и инерции вращения, а также возможные нелинейную упругость и ползучесть материала оболочки.

1. Геометрические соотношения в срединной поверхности  $z = 0$  получаются с помощью ковариантного дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - K_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - K_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} U + \frac{\partial B}{\partial x} V \right) + \theta_1 \theta_2, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  – деформации удлинения вдоль осей  $x, y$  и сдвига в касательной плоскости  $(dx, dy)$ ;  $U, V$  и  $W$  – компоненты вектора перемещений точек вдоль осей  $x, y$  и  $z$  соответственно;  $A$  и  $B$  – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например,  $A = B = 1$  для пологой оболочки и  $A = const, B = B(x)$  в случае оболочки вращения);  $K_x = 1/R_1$  и  $K_y = 1/R_2$  – главные кривизны ( $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + K_x U\right)$ ;  $\theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + K_y V\right)$ .

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = c f(z) (\psi_x - \theta_1); \quad \gamma_{yz} = c f(z) (\psi_y - \theta_2), \quad (2)$$

где  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  – углы поворота отрезка нормали в плоскостях  $(dx, dz)$  и  $(dy, dz)$  соответственно;  $f(z)$  – функция, характеризующая распределение напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  вдоль оси  $z$  [1,3];  $c$  – константа.

Перемещения и деформаций в слое  $z \neq 0$  вычисляем по формулам [1,3]

$$\begin{aligned} U^z &= U + z \psi_x, \quad V^z = V + z \psi_y, \quad W^z = W; \\ \varepsilon_x^z &= \varepsilon_x + z \chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z \chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z \chi_{12}, \end{aligned}$$

где  $\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_y$ ;  $\chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x$ ;  $2\chi_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_y \right)$

суть функции изменения кривизны и кручения.

2. Физические соотношения в произвольной точке оболочки, выполненной из линейно упругого ортотропного материала, в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= G_1 [\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_2 \chi_2)], \quad \sigma_y = G_2 [\varepsilon_y + \mu_1 \varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_1 \chi_1)]; \quad \tau_{xy} = G_{12} [\gamma_{xy} + 2z \chi_{12}] \quad (3) \\ \tau_{xz} &= G_{13} \gamma_{xz} = G_{13} k f(z) (\psi_x - \theta_1); \quad \tau_{yz} = G_{23} \gamma_{yz} = G_{23} k f(z) (\psi_y - \theta_2), \end{aligned}$$

где  $E_1, E_2$  и  $\mu_1, \mu_2$  – продольные модули Юнга и коэффициенты Пуассона данного материала, причем  $E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$ ;  $G_{12}, G_{13}$  и  $G_{23}$  – модули сдвига соответственно в плоскостях симметрии  $(dx, dy)$ ,  $(dx, dz)$  и  $(dy, dz)$  материала оболочки.

В случае изотропного линейно упругого материала физические соотношения являются частным случаем соотношений (3) при  $E_1 = E_2 = E$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , а также  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = E / 2(1 + \mu)$ .

Интегрируя напряжения из (3) по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2 + H$ , получаем погонные усилия, моменты и поперечные силы, приведенные к отсчетной поверхности [4]:

$$\begin{aligned} N_x &= G_1 [(h + \bar{F})(\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_2 \chi_2)], \quad N_y = G_2 [(h + \bar{F})(\varepsilon_y + \mu_1 \varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_1 \chi_1)], \\ N_{xy} &= G_{12} [(h + \bar{F})\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}]; \\ M_x &= G_1 \left[ \bar{S}(\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1 + \mu_2 \chi_2) \right], \quad M_y = G_2 \left[ \bar{S}(\varepsilon_y + \mu_1 \varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2 + \mu_1 \chi_1) \right], \end{aligned}$$

$$M_{xy} = G_{12} \left[ \bar{S} \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12} \right];$$

$$Q_x = kG_{13}(h + \bar{F})(\psi_x - \theta_1), \quad Q_y = kG_{23}(h + \bar{F})(\psi_y - \theta_2). \quad (4)$$

Здесь  $\bar{F}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{J}$  – площадь поперечного (продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz, \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz, \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz;$$

$$G_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2}, \quad G_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2}.$$

Физические соотношения для ортотропных материалов при учете ползучести материала в соответствии с теориями упругоползучего тела могут быть представлены в виде [5]

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^c, \quad \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^c, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^c,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^c, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^e - \tau_{yz}^c,$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие напряжений (отмечены индексом «е»), определяются с помощью формул

$$\sigma_x^e = G_1(\varepsilon_x^z + \mu_2 \varepsilon_y^z), \quad \sigma_y^e = G_2(\varepsilon_y^z + \mu_1 \varepsilon_x^z), \quad \tau_{xy}^e = G_{12} \gamma_{xy}^z;$$

$$\tau_{xz}^e = G_{13} \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz}^e = G_{23} \gamma_{yz}, \quad (5)$$

а составляющие, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «с»), вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_x^c = \int_{t_0}^t G_1(\varepsilon_x^z + \mu_2 \varepsilon_y^z) R_1(t, \tau) d\tau, \quad \sigma_y^c = \int_{t_0}^t G_2(\varepsilon_y^z + \mu_1 \varepsilon_x^z) R_1(t, \tau) d\tau, \quad \tau_{xy}^c = \int_{t_0}^t G_{12} \gamma_{xy}^z R_2(t, \tau) d\tau;$$

$$\tau_{xz}^c = \int_{t_0}^t G_{13} \gamma_{xz} R_2(t, \tau) d\tau, \quad \tau_{yz}^c = \int_{t_0}^t G_{23} \gamma_{yz} R_2(t, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Здесь  $R_1(t, \tau)$  и  $R_2(t, \tau)$  – функции влияния материала при растяжении (сжатии) и сдвиге, где  $t$  – время,  $\tau$  – переменная интегрирования (имеет смысл времени);

$$G_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2}, \quad G_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2}, \quad G_{12}, \quad G_{13} \quad \text{и} \quad G_{23} - \text{модули сдвига [константы либо переменные}$$

коэффициенты (функции  $t$ ) в общем случае], где  $E_1$ ,  $E_2$  и  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – продольные модули упругости и коэффициенты Пуассона (переменные либо константы).

Для изотропных материалов физические соотношения являются частным случаем соотношений (5) и (6) при  $E_1 = E_2 = E$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , а также  $G_1 = G_2 = E/(1 - \mu^2)$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = E/2(1 + \mu)$  [6,7].

Интегрируя напряжения (5) и (6) по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2 + H$ , получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [5]:

$$N_x = N_x^e - N_x^c, \quad N_y = N_y^e - N_y^c, \quad N_{xy} = N_{xy}^e - N_{xy}^c; \quad M_x = M_x^e - M_x^c, \quad M_y = M_y^e - M_y^c, \quad M_{xy} = M_{xy}^e - M_{xy}^c;$$

$$Q_x = Q_x^e - Q_x^c, \quad Q_y = Q_y^e - Q_y^c, \quad (7)$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие (с индексом «е») вычисляются по формулам

$$N_x^e(t) = G_1[(h + \bar{F})(\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_2 \chi_2)];$$

$$N_y^e(t) = G_2[(h + \bar{F})(\varepsilon_y + \mu_1 \varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_1 \chi_1)];$$

$$N_{xy}^e(t) = G_{12}[(h + \bar{F})\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}].$$

$$M_x^e(t) = G_1 \left[ \bar{S}(\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1 + \mu_2 \chi_2) \right];$$

$$M_y^e(t) = G_2 \left[ \bar{S}(\varepsilon_y + \mu_1 \varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2 + \mu_1 \chi_1) \right];$$

$$M_{xy}^e(t) = G_{12} \left[ \bar{S} \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12} \right];$$

$$Q_x^e(t) = kG_{13} (h + \bar{F})(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y^e(t) = kG_{23} (h + \bar{F})(\psi_y - \theta_2),$$

а составляющие внутренних силовых факторов, обусловленные ползучестью материала (с индексом «с»), определяются с помощью выражений

$$N_x^c = \int_{t_0}^t N_x^e(\tau) R_1(t, \tau) d\tau; \quad N_y^c = \int_{t_0}^t N_y^e(\tau) R_1(t, \tau) d\tau;$$

$$N_{xy}^c = \int_{t_0}^t N_{xy}^e(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad M_x^c = \int_{t_0}^t M_x^e(\tau) R_1(t, \tau) d\tau;$$

$$M_y^c = \int_{t_0}^t M_y^e(\tau) R_1(t, \tau) d\tau; \quad M_{xy}^c = \int_{t_0}^t M_{xy}^e(\tau) R_2(t, \tau) d\tau;$$

$$Q_x^c(t) = \int_{t_0}^t Q_x^e(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad Q_y^c = \int_{t_0}^t Q_y^e(\tau) R_2(t, \tau) d\tau.$$

*Примечание.* При решении задач ползучести интегралы по переменной  $\tau$  разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам  $[t_{i-1}, t]$  заданной длины  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников [6,7].

В соответствии с деформационной теорией пластичности физические соотношения для нелинейно-упругого изотропного материала имеют вид [8–12]

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^p, \quad \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^p, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^p,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^p, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^e - \tau_{yz}^p,$$

где линейно упругие составляющие (отмечены индексом «е») определяются с помощью известных формул

$$\sigma_x^e = G_1(\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z), \quad \sigma_y^e = G_2(\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy}^e = G_{12} \gamma_{xy}^z, \quad \tau_{xz}^e = G_{13} \gamma_{xz}^z, \quad \tau_{yz}^e = G_{23} \gamma_{yz}^z, \quad (8)$$

являющихся частным случаем соотношений (3) при  $G_1 = G_2 = E/(1 - \mu^2)$  и  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E/2(1 - \mu)$ , а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (отмечены индексом «р») вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_x^p = G_1 m \varepsilon_i^2 (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z), \quad \sigma_y^p = G_2 m \varepsilon_i^2 (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy}^p = G_{12} m \varepsilon_i^2 \gamma_{xy}^z, \quad \tau_{xz}^p = G_{13} m \varepsilon_i^2 \gamma_{xz}^z, \quad \tau_{yz}^p = G_{23} m \varepsilon_i^2 \gamma_{yz}^z, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + \varepsilon_x^z \varepsilon_y^z + (\varepsilon_y^z)^2 + \frac{1}{4}[(\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]}$  – интенсивность деформации [5].

Интегрируя напряжения (8) и (9) по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2 + H$  получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [8 – 11]:

$$N_x = N_x^e - N_x^p, \quad N_y = N_y^e - N_y^p, \quad N_{xy} = N_{xy}^e - N_{xy}^p,$$

$$M_x = M_x^e - M_x^p, \quad M_y = M_y^e - M_y^p, \quad M_{xy} = M_{xy}^e - M_{xy}^p$$

$$Q_x = Q_x^e - Q_x^p, \quad Q_y = Q_y^e - Q_y^p, \quad (10)$$

где линейно упругие составляющие (с индексом «е») вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 N_x^e &= G_1[(h + \bar{F})(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \\
 N_y^e &= G_2[(h + \bar{F})(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\
 N_{xy}^e &= G_{12}[(h + \bar{F})\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}]; \\
 M_x^e &= G_1\left[\bar{S}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\chi_1 + \mu\chi_2)\right]; \quad (11) \\
 M_y^e &= G_2\left[\bar{S}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\chi_2 + \mu\chi_1)\right]; \\
 M_{xy}^e &= G_{12}\left[\bar{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\chi_{12}\right], \\
 Q_x^e &= kG_{13}(h + \bar{F})(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y^e = kG_{23}(h + \bar{F})(\psi_y - \theta_2),
 \end{aligned}$$

а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (с индексом «р») внутренних силовых факторов определяются с помощью выражений

$$\begin{aligned}
 N_x^p &= G_1[I_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \\
 N_y^p &= G_2[I_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\
 N_{xy}^p &= G_{12}(I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12}); \\
 M_x^p &= G_1[I_2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \quad (12) \\
 M_y^p &= G_2[I_2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\
 M_{xy}^p &= G_{12}(I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12}); \\
 Q_x^p &= G_{13}kI_4(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y^p = G_{23}kI_4(\psi_y - \theta_2).
 \end{aligned}$$

В соотношениях (12)  $I_s = m \int_{-h/2}^{h/2+H} \varepsilon_i^2 z^{s-1} dz$ ,  $1 \leq s \leq 3$ ;  $I_4 = m \int_{-h/2}^{h/2+H} \varepsilon_i^2 f(z) dz$  – жесткостные параметры.

3. Рассмотрим процесс движения на промежутке времени  $[t_0, t_1]$ . В соответствии с фундаментальным принципом наименьшего действия (в форме Гамильтона – Остроградского) истинные траектории движения точек системы для данного промежутка времени должны доставлять стационарное значение величине (действию) [1]

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A^E) dt, \quad (11)$$

где  $K$  и  $\Pi$  – кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно;  $A^E$  – работа внешних сил.

Математически принцип наименьшего действия в этом случае выражается в виде вариационного уравнения

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A^E) dt = 0, \quad (12)$$

где  $\delta$  – символ (изохронной) вариации.

Здесь

$$K = \frac{\rho}{2} \iiint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \quad (13)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] d\Omega, \quad (14)$$

$$A^E = \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS, \quad (15)$$

где  $\rho = \gamma / g$  ( $\gamma$  – удельный вес материала оболочки,  $g$  – ускорение силы тяжести);  $P_x, P_y$  и  $q$  – компоненты внешней механической нагрузки в направлении координатных линий  $x, y$  и оси  $z$ ;  $\Omega$  – область в пространстве  $(x, y, z)$ ;  $S$  – область в плоскости  $(x, y)$ ;  $d\Omega$  и  $dS$  – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ( $d\Omega = ABdx dy dz$ ;  $dS = ABdx dy$ ).

Проинтегрировав по  $z$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2 + H$ ) выражения (13) и (14), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \{N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} + Q_x (\psi_x - \theta_1) + Q_y (\psi_y - \theta_2)\} dS, \quad (16)$$

где внутренние силовые факторы (усилия, моменты и поперечные силы) вычисляются (в зависимости от учитываемых свойств материала) с помощью соотношений (4), (7) или (10), а деформации – по формулам (1) и (2);

$$K = \frac{\rho}{2} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left\{ (h + \bar{F})(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) + 2\bar{S}(\dot{U}\dot{\psi}_x + \dot{V}\dot{\psi}_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) \right\} dS. \quad (17)$$

В соответствии с принятой в механике традиции точками здесь и далее обозначены производные по времени  $t$ .

Заметим, что неизвестные функции перемещений  $U, V, W$  и углов поворота нормали  $\psi_x, \psi_y$ , равно, как и воздействующие нагрузки  $P_x, P_y$  и  $q$ , зависят не только от внутренних координат  $x, y$ , но и времени  $t$ .

Преобразуем вариационное уравнение (12) с учетом соотношений (15), (16) и (17) так, чтобы под знаком (тройного) интеграла не было вариаций от производных функций  $U, V, W, \psi_x, \psi_y$ .

Будем рассматривать сначала пологие оболочки, для которых полагается, что в процессе деформирования величины  $K_x U$  и  $K_y V$  малы,  $\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \gg K_x U$  и  $\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} \gg K_y V$ , а значит

$$\theta_1 \approx -\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \theta_2 \approx -\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \text{причем } A = B = 1.$$

В результате с учетом принятых допущений вариационное уравнение (12) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left[ \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x - \rho(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \rho \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] \delta U + \right. \\ & + \left[ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y - \rho(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \rho \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] \delta V + \\ & + \left[ N_x K_x + N_y K_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial W}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] \delta W + \\ & \left. + \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - \rho \bar{S} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \rho \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] \delta \psi_x + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - \rho \bar{S} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \rho \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] \delta \psi_y \Bigg] dx dy dt + \\
& + \rho \int \int_{-a-b}^a \left\{ \left[ (h + \bar{F}) \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right] \delta U + \left[ (h + \bar{F}) \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right] \delta V + \right. \\
& \quad \left. + (h + \bar{F}) \frac{\partial W}{\partial t} \delta W + \left[ \bar{S} \frac{\partial U}{\partial t} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right] \delta \psi_x + \right. \\
& \quad \left. + \left[ \bar{S} \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right] \delta \psi_y \right\} \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} dx dy - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-b}^b \left[ N_x \delta U + N_{xy} \delta V + \left( N_x \frac{\partial W}{\partial x} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} + Q_x \right) \delta W + M_x \delta \psi_x + M_{xy} \delta \psi_y \right] \Bigg|_{x=-a}^{x=a} dy dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-a}^a \left[ N_{xy} \delta U + N_y \delta V + \left( N_y \frac{\partial W}{\partial y} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} + Q_y \right) \delta W + M_{xy} \delta \psi_x + M_y \delta \psi_y \right] \Bigg|_{y=-b}^{y=b} dx dt = 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Ясно, что в уравнении (18) вариации  $\delta U$ ,  $\delta V$ ,  $\delta W$ ,  $\delta \psi_x$ ,  $\delta \psi_y$  следует считать произвольными. Следовательно, приравнявая нулю сомножители, стоящие перед каждой из указанных вариаций, получаем уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x - \rho \left[ (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] = 0; \\
& \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y - \rho \left[ (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] = 0; \\
& N_x K_x + N_y K_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial W}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \\
& \quad + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - \rho \left[ \bar{S} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] = 0; \\
& \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - \rho \left[ \bar{S} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] = 0; \quad (19)
\end{aligned}$$

Из вариационного уравнения (18) получаем естественные краевые условия:

- при  $x = -a$  и  $x = a$   
 $N_x = 0$  или  $U = 0$ ,  $N_{xy} = 0$  или  $V = 0$ ,  
 $N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} + Q_x = 0$  или  $W = 0$ ,  
 $M_x = 0$  или  $\psi_x = 0$ ,  $M_{xy} = 0$  или  $\psi_y = 0$ ;
- при  $y = -b$  и  $y = b$   
 $N_{xy} = 0$  или  $U = 0$ ,  $N_y = 0$  или  $V = 0$ ,  
 $N_y \frac{\partial W}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} + Q_y = 0$  или  $W = 0$ ,  
 $M_{xy} = 0$  или  $\psi_x = 0$ ,  $M_y = 0$  или  $\psi_y = 0$ .



Из вариационного уравнения (18) получаем также и начальные условия при  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} (h + \bar{F}) \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} &= 0 \quad \text{или} \quad U = 0; \\ (h + \bar{F}) \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} &= 0 \quad \text{или} \quad V = 0; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= 0 \quad \text{или} \quad W = 0; \\ \bar{S} \frac{\partial U}{\partial t} + [(h^3 / 12) + \bar{J}] \frac{\partial \psi_x}{\partial t} &= 0 \quad \text{или} \quad \psi_x = 0; \\ \bar{S} \frac{\partial V}{\partial t} + [(h^3 / 12) + \bar{J}] \frac{\partial \psi_y}{\partial t} &= 0 \quad \text{или} \quad \psi_y = 0. \end{aligned}$$

Полученные уравнения движения (19) пологих ортотропных и изотропных ребристых оболочек учитывают геометрическую нелинейность, дискретность расположения ребер (или вырезов), их ширину, сдвиговую и крутильную жесткость ребер, а также эффект поперечных сдвигов и инерции вращения. Кроме того, уравнения (19) позволяют учитывать нелинейную упругость, а также возможные деформации ползучести материала.

#### Литература

1. Жгутов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17. СПб., 2004.
2. Жгутов В.М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек. // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №8. – Доступ в сети Интернет // <http://www.engstroy.spb.ru/index> 2009 08/zhgoutov1.html.
3. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования: Учебное пособие // В.В. Карпов, О.В. Игнатъев, А.Ю. Сальников. М., СПб., 2002.
4. Жгутов В.М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – Доступ в сети Интернет // <http://www.engstroy.spb.ru/index> 2009 07/zhgoutov1.html.
5. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – Доступ в сети Интернет // <http://www.engstroy.spb.ru/index> 2009 07/zhgoutov1.html.
6. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале ребристых пологих оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 1. М., 2010.
7. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
8. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №6. – С.16–24. – Доступ в сети Интернет // <http://www.engstroy.spb.ru/index> 2009 06/zhgoutov.html.
9. Жгутов В.М. Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2009. – № 4. СПб., 2009.
10. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых пологих оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4.
11. Жгутов В.М. Устойчивость упругопластических ребристых оболочек при больших перемещениях // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
12. Жгутов В.М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Популярное бетоноведение. – 2009. – № 6. СПб., 2009.

*\*Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*

*Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc\_kitezh@mail.ru*