

Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II

К.т.н. В.М. Жгутов*,

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

В предыдущих работах [1, 2] были рассмотрены изотропные и ортотропные оболочки общего вида, находящиеся под действием статической или динамической механической нагрузки в условиях проявления упругих, нелинейно-упругих и вязкоупругих свойств материала.

При этом предполагалось, что оболочки, закрепленные по контуру определенным образом, могут быть подкреплены ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий (направленных по линиям кривизны) с внутренней стороны (со стороны вогнутости в случае выпуклых оболочек).

В работе [1], исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получен функционал полной энергии деформации ребристых оболочек общего вида при динамических нагрузках (действие) и при определенных допущениях выведены из условия стационарности действия уравнения движения (с соответствующими граничными и начальными условиями) для пологих ребристых оболочек.

В работе [2], исходя из вариационного принципа Лагранжа, получен функционал полной энергии деформации ребристых оболочек общего вида при статических нагрузках (разность потенциальной энергии и работы внешних сил) и выведены из условия стационарности функционала Лагранжа общие уравнения равновесия ребристых оболочек, а также естественные граничные условия.

В настоящей работе выполнено обобщение, развитие и анализ предложенных автором статических математических моделей на случаи задач динамики для ребристых оболочек общего вида и при учете различных свойств материала.

Рассматриваем процесс движения оболочки на промежутке времени $[t_0, t_1]$.

В соответствии с фундаментальным принципом наименьшего действия (в форме Гамильтона – Остроградского) истинные траектории движения точек системы для данного промежутка времени должны доставлять стационарное значение величине (действию) [1]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A^E) dt, \quad (1)$$

где K и Π – кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно;

A^E – работа внешних сил.

Математически принцип наименьшего действия в этом случае выражается в виде вариационного уравнения

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A^E) dt = 0, \quad (2)$$

где δ – символ (изохронной) вариации.

Здесь

$$K = \frac{\rho}{2} \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \quad (3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^z + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy}^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] d\Omega, \quad (4)$$

$$A^E = \frac{1}{2} \iint_S (P_x U + P_y V + q W) dS, \quad (5)$$

где $\rho = \gamma / g \approx const$ (γ – удельный вес материала оболочки, g – ускорение силы тяжести);

P_x, P_y и q – компоненты внешней механической нагрузки в направлении координатных линий x, y и z ; Ω – область в пространстве (x, y, z) ;

S – область в плоскости (x, y) ;

$d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ($d\Omega = ABdx dy dz$; $dS = ABdx dy$).

Проинтегрировав по z ($-h/2 \leq z \leq h/2 + H$) выражения (4) и (3), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S [N_{xx} \varepsilon_{xx} + N_{yy} \varepsilon_{yy} + N_{xy} \gamma_{xy} + M_{xx} \chi_1 + M_{yy} \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} + Q_{xz} (\psi_x - \theta_1) + Q_{yz} (\psi_y - \theta_2)] dS, \quad (6)$$

где внутренние силовые факторы (усилия, моменты и поперечные силы) вычисляются (в зависимости от учитываемых свойств материала) с помощью соотношений (4), (7) или (10), приведенных в работах [1, 2], а деформации – по формулам (1) и (2) работ [1, 2].

Кроме того,

$$K = \frac{\rho}{2} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left\{ (h + \bar{F})(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) + 2\bar{S}(\dot{U}\dot{\psi}_x + \dot{V}\dot{\psi}_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) \right\} dS. \quad (7)$$

Преобразуем вариационное уравнение (2) с учетом соотношений (3)–(6) так, чтобы под знаком (тройного) интеграла не было вариаций от производных искомых функций U, V, W, ψ_x, ψ_y .

В результате вариационное уравнение (2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left\{ \Phi_1(U, V, W, \psi_x, \psi_y) + P_x - \rho \left((h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \rho \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right) \right\} \delta U + \\ & + \left[\Phi_2(U, V, W, \psi_x, \psi_y) + P_y - \rho \left((h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \rho \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right) \right] \delta V + \\ & + \left[\Phi_3(U, V, W, \psi_x, \psi_y) + q - \rho (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] \delta W + \\ & + \left[\Phi_4(U, V, W, \psi_x, \psi_y) - Q_{xz} - \rho \bar{S} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \rho \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] \delta \psi_x + \\ & + \left[\Phi_5(U, V, W, \psi_x, \psi_y) - Q_{yz} - \rho \bar{S} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \rho \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] \delta \psi_y \Big\} ABdx dy dt + \\ & + \rho \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left\{ \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right] \delta U + \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right] \delta V + \right. \\ & \left. + (h + \bar{F}) \frac{\partial W}{\partial t} \delta W + \left[\bar{S} \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right] \delta \psi_x + \right. \\ & + \left. \left[\bar{S} \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right] \delta \psi_y \right\} \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} ABdx dy - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-b}^b [N_{xx} \delta U + N_{xy} \delta V - (N_{xx} \theta_1 + \\ & + N_{xy} \theta_2 + Q_{xz}) \delta W + M_{xx} \delta \psi_x + M_{xy} \delta \psi_y] \Big|_{x=-a}^{x=a} Bdy dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-a}^a [N_{xy} \delta U + N_{yy} \delta V - (N_{yy} \theta_2 + \\ & + N_{xy} \theta_1 + Q_{yz}) \delta W + M_{xy} \delta \psi_x + M_{yy} \delta \psi_y] \Big|_{y=-b}^{y=b} Adx dt = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_1(U, V, W, \psi_x, \psi_y) = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(AN_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial x} N_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right) - K_x Q_{xz} + K_x (N_{xx} \theta_1 + N_{xy} \theta_2),$$

$$\Phi_2(U, V, W, \psi_x, \psi_y) = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(BN_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} N_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy} \right) - K_y Q_{yz} + K_y (N_{yy} \theta_2 + N_{xy} \theta_1),$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(U, V, W, \psi_x, \psi_y) = \\ = K_x N_{xx} + K_y N_{yy} + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BQ_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(AQ_{yz})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B(N_{xx} \theta_1 + N_{xy} \theta_2)}{\partial x} + \frac{\partial A(N_{yy} \theta_2 + N_{xy} \theta_1)}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\Phi_4(U, V, W, \psi_x, \psi_y) = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BM_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(AM_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial x} M_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} \right),$$

$$\Phi_5(U, V, W, \psi_x, \psi_y) = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(AM_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(BM_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} M_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} M_{xy} \right).$$

Очевидно, что в уравнении (8) вариации $\delta U, \delta V, \delta W, \delta \psi_x$ и $\delta \psi_y$ следует считать произвольными. Следовательно, приравнявая нулю сомножители, стоящие перед каждой из указанных вариаций, получаем уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned} \Phi_1(U, V, W, \psi_x, \psi_y) + P_x - \rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] &= 0; \\ \Phi_2(U, V, W, \psi_x, \psi_y) + P_y - \rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] &= 0; \\ \Phi_3(U, V, W, \psi_x, \psi_y) + q - \rho(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0; \\ \Phi_4(U, V, W, \psi_x, \psi_y) - Q_{xz} - \rho \left[\bar{S} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] &= 0; \\ \Phi_5(U, V, W, \psi_x, \psi_y) - Q_{yz} - \rho \left[\bar{S} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] &= 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Из вариационного уравнения (8) получаем естественные *граничные (краевые)* условия:

- при $x = -a$ и $x = a$
 $N_{xx} = const$ или $U = const$, $N_{xy} = const$ или $V = const$,
 $-N_{xx} \theta_1 - N_{xy} \theta_2 + Q_{xz} = const$ или $W = const$,
 $M_{xx} = const$ или $\psi_x = const$, $M_{xy} = 0$ или $\psi_y = const$;
- при $y = -b$ и $y = b$
 $N_{xy} = const$ или $U = const$, $N_{yy} = const$ или $V = const$,
 $-N_{yy} \theta_2 - N_{xy} \theta_1 + Q_{yz} = const$ или $W = const$,
 $M_{xy} = const$ или $\psi_x = const$, $M_{yy} = const$ или $\psi_y = const$.

Из вариационного уравнения (8) получаем также и *начальные* условия при $t = t_0$:

$$(h + \bar{F}) \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} = const \text{ или } U = const;$$

$$(h + \bar{F}) \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} = const \text{ или } V = const ;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = const \text{ или } W = const ;$$

$$\bar{S} \frac{\partial U}{\partial t} + [(h^3 / 12) + \bar{J}] \frac{\partial \psi_x}{\partial t} = const \text{ или } \psi_x = const ;$$

$$\bar{S} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + [(h^3 / 12) + \bar{J}] \frac{\partial \psi_y}{\partial t} = const \text{ или } \psi_y = const .$$

Полученные уравнения движения (9) ортотропных и изотропных ребристых оболочек общего вида учитывают геометрическую нелинейность, дискретность расположения ребер (или вырезов), их ширину, сдвиговую и крутильную жесткость ребер, а также эффект поперечных сдвигов и инерции вращения.

Кроме того, уравнения (9) позволяют учитывать нелинейную упругость, а также возможные деформации ползучести материала.

Примечание. В частном случае *пологих* ребристых оболочек (в процессе деформирования которых полагается, что величины $K_x U$ и $K_y V$ малы, $\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \gg K_x U$ и $\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} \gg K_y V$, а значит $\theta_1 \approx -\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x}$; $\theta_2 \approx -\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y}$, причем $A = B = 1$) уравнения движения (9) существенно упрощаются и имеют вид

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - K_x Q_{xz} + K_x (N_{xx} \theta_1 + N_{xy} \theta_2) + P_x - \rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] = 0 ;$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - K_y Q_{yz} + K_y (N_{yy} \theta_2 + N_{xy} \theta_1) + P_y - \rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] = 0 ;$$

$$K_x N_{xx} + K_y N_{yy} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - \left(\frac{\partial (N_{xx} \theta_1 + N_{xy} \theta_2)}{\partial x} + \frac{\partial (N_{yy} \theta_2 + N_{xy} \theta_1)}{\partial y} \right) + q - \rho (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 ;$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} - \rho \left[\bar{S} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] = 0 ;$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} - \rho \left[\bar{S} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] = 0 .$$

Граничные и начальные условия для пологих оболочек сохраняют прежний вид.

Литература

1. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 1. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov.html.
2. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 2. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_02/zhgoutov1.html.

*Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru