Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала

К.т.н. В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Известно, что в процессе деформирования оболочек в зависимости от уровня и длительности внешних воздействий могут проявиться различные свойства материала конструкции: упругость, пластичность, ползучесть и т.д. Проявление пластичности или ползучести приводит к необратимым последствиям. Для того чтобы конструкция являлась заведомо прочной и устойчивой, необходимо исключить возможность проявления этих свойств.

Вот почему актуальными и важными являются задачи разработки более совершенных моделей деформирования ребристых оболочек и соответствующих им алгоритмов исследования, а также анализа прочности и устойчивости ребристых оболочек при учете различных свойств материала.

В работе [1] автором фактически были получены уравнения равновесия упругих изотропных пологих оболочек [являющиеся с точки зрения известного принципа Германа-Эйлера-Даламбера составной частью уравнений динамики (движения) данных оболочек] при учете геометрической нелинейности, дискретного расположения ребер, их ширины, сдвиговой и крутильной жесткости, а также эффекта поперечных сдвигов и инерции вращения.

В настоящей работе выполнено обобщение, развитие и анализ предложенных автором математических моделей на случаи оболочек общего вида и при учете различных свойств материала при статических (как кратковременных, так и долговременных) нагрузках.

Рассматриваем оболочки общего вида с краем, подразумевая достаточно широкий класс оболочек наиболее распространенных частных видов: пологих на прямоугольном плане, вращения (например, цилиндрических, конических, сферических, торообразных), а также многих других (в том числе и составных) оболочек.

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной h принимаем за отсчетную координатную поверхность $z=0$. Координатные линии x и y ортогональной криволинейной системы координат ($-a \le x \le a$ и $-b \le y \le b$) направляем по линиям кривизны отсчетной поверхности (параллелям и меридианам в случае оболочек вращения), а ось z – по внутренней нормали поверхности $z=0$ так, чтобы система координат x, y, z была право-ориентированной.

Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на отсчетной поверхности не имеет особенностей.

С внутренней стороны оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра (или вырезы) задаем дискретно с помощью функции $H = H(x, y)$, характеризующей распределение ребер (вырезов) по оболочке, их ширину и высоту [1,2,3].

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$ и $-h/2 \le z \le h/2 + H$. Если $H > 0$, то оболочка подкреплена ребрами (или накладками), если же $H < 0$, то она ослаблена вырезами.

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее края (контура).

Будем учитывать геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги, а также возможные нелинейную упругость и ползучесть материала оболочки.

1. **Геометрические соотношения** в срединной поверхности $z=0$ получаются с помощью операции ковариантного (абсолютного) дифференцирования векторного поля *смещения* (поля *деформаций*) и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{DU}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_{11}^2 = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}V - K_x W + \frac{1}{2}\theta_{11}^2;$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{DV}{\partial y} + \frac{1}{2}\theta_{22}^2 = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}U - K_y W + \frac{1}{2}\theta_{22}^2; \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{DV}{\partial x} + \frac{DU}{\partial y} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}U + \frac{\partial B}{\partial x}V\right) + \theta_{12}^2.$$

Здесь ε_{xx}, ε_{yy} и γ_{xy} – компоненты тензора деформаций: деформации растяжения (сжатия) вдоль координатных линий x, y и, соответственно, сдвига в касательной плоскости (dx, dy);

$U = U(x, y), V = V(x, y)$ и $W = W(x, y)$ – компоненты вектора смещения (вектора деформаций) точек вдоль координатных линий x, y и z соответственно;

$A = A(x, y)$ и $B = (x, y)$ – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например, $A = B = 1$ для пологой оболочки и $A = const$, $B = B(x)$ в случае оболочки вращения);

$K_x = K_x(x, y) = 1/R_1$ и $K_y = K_y = 1/R_2$ – главные кривизны ($R_1 = R_1(x, y)$ и $R_2 = R_2(x, y)$ – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль линий x и y соответственно;

$$\theta_{11}^2 = \left(\frac{DU}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{DV}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{DW}{\partial x}\right)^2; \ \theta_{22}^2 = \left(\frac{DU}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{DV}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{DW}{\partial y}\right)^2;$$

$$\theta_{12}^2 = \frac{DU}{\partial x}\cdot\frac{DU}{\partial y} + \frac{DV}{\partial x}\cdot\frac{DV}{\partial y} + \frac{DW}{\partial x}\cdot\frac{DW}{\partial y},$$

где $\frac{D}{\partial x}$ и $\frac{D}{\partial y}$ – операторы ковариантного дифференцирования по криволинейным координатам x и y [DU, DV и DW – абсолютные (геометрические) дифференциалы смещений U, V и W].

Примечание 1. Известно, что в некоторой системе ортогональных криволинейных координат $x_\alpha, 1 \le \alpha \le 3$ оператор $\frac{D}{\partial x_\alpha}$ ковариантного дифференцирования произвольного *скалярного поля* $a = a(x_1, x_2, x_3)$, *векторного поля* $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3), 1 \le i \le 3$ и *тензорного поля* $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, x_3), 1 \le i, k \le 3$ действует по следующим правилам [13]:

$$a \mapsto \frac{Da}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}, \quad a_i \mapsto \frac{Da_i}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha} - \sum_{k=1}^{3} a_k \Gamma_{ik\alpha}$$

и, соответственно, $a_{ik} \mapsto \frac{Da_{ik}}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\alpha} - \sum_{l=1}^{3}(a_{lk}\Gamma_{il\alpha} + a_{il}\Gamma_{kl\alpha})$,

где h_α – метрические коэффициенты Ламе; $\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{ik\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ – символы Кристоффеля.

Известно также [13], что символы Кристоффеля симметричны по крайним индексам при $k \ne i, k \ne \alpha$ ($\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{\alpha ki}$) и антисимметричны по первым двум индексам ($\Gamma_{ik\alpha} = -\Gamma_{ki\alpha}$), а потому величины $\Gamma_{ik\alpha}$ с разными значениями индексов равны нулю ($\Gamma_{ik\alpha} = 0$ при $i \ne k, i \ne \alpha, k \ne \alpha$). Это значит, что в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$ ненулевыми могут быть не более 12: $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik}$. При этом $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik} = \frac{1}{h_i h_k}\cdot\frac{\partial h_k}{\partial x_i} = \frac{1}{h_i}\cdot\frac{\partial \ln h_k}{\partial x_i}$.

Поясним, что в нашем случае и в наших обозначениях $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ и $h_1 = A, h_2 = B, h_3 = 1$, а те 12 из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$, которые в ортогональной криволинейной системе координат могут быть отличными от нуля, имеют вид

$$\Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial x}; \ \Gamma_{133} = -\Gamma_{313} = 0; \ \Gamma_{211} = -\Gamma_{121} = \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial y}; \ \Gamma_{233} = -\Gamma_{323} = 0;$$

$$\Gamma_{311} = -\Gamma_{131} = \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial z} = -K_x; \ \Gamma_{322} = -\Gamma_{232} = \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial z} = -K_y.$$

В соотношениях (1) квадратичные члены характеризуют геометрическую нелинейность, которую необходимо учитывать в случаях достаточно больших смещений (деформаций), иными словами, в случаях, когда квадратом длины вектора смещений нельзя пренебречь в сравнении с его длиной.

Как правило, в процессе деформирования оболочек продольные смещения U и V на порядок превосходят поперечные смещения (прогибы) W. Очевидно, что в этом случае вместе с U и V малы и соответствующие их производные по координатам x и y. Тогда в каждом из общих выражений для величин $\theta_{11}^2, \theta_{11}^2$ и θ_{12}^2 можно пренебречь двумя первыми членами как малыми величинами второго порядка. Следовательно, можно положить

$$\theta_{11}^2 \approx \left(\frac{DW}{\partial x}\right)^2 = \theta_1 ;\ \theta_{22}^2 \approx \left(\frac{DW}{\partial y}\right)^2 = \theta_2 ;\ \theta_{12}^2 \approx \frac{DW}{\partial x}\cdot\frac{DW}{\partial y} = \theta_1\cdot\theta_2 ,$$

где $\theta_1 = -\dfrac{DW}{\partial x} = -\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial W}{\partial x} + K_x U\right);\ \theta_2 = -\dfrac{DW}{\partial y} = -\left(\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial W}{\partial y} + K_y V\right).$

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = c f(z)(\psi_x - \theta_1);\ \gamma_{yz} = c f(z)(\psi_y - \theta_2), \quad (2)$$

где φ_x и φ_y – углы поворота отрезка нормали в плоскостях (dx,dz) и (dy,dz) соответственно;

$f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} вдоль оси z [1,3];
c – константа.

Смещения и деформации в координатной поверхности $z \neq 0$ вычисляем по формулам [1,3]

$$U^z = U + z\psi_x,\ V^z = V + z\psi_y,\ W^z = W;$$

$$\varepsilon_{xx}^z = \varepsilon_{xx} + z\chi_1,\ \varepsilon_{yy}^z = \varepsilon_{yy} + z\chi_2,\ \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где

$$\chi_1 = \frac{D\psi_x}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\psi_y;\ \chi_2 = \frac{D\psi_y}{\partial y} = \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\psi_x;$$

$$2\chi_{12} = \frac{D\psi_y}{\partial x} + \frac{D\psi_x}{\partial y} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\psi_y\right)$$

суть функции изменения кривизны и кручения.

2. **Физические соотношения** в произвольной точке оболочки, выполненной из *линейно упругого ортотропного* материала, в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид [4]:

$$\sigma_{xx} = G_{11}[\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy} + z(\chi_1 + \mu_2\chi_2)],\ \sigma_{yy} = G_{22}[\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx} + z(\chi_2 + \mu_1\chi_1)];\ \tau_{xy} = G_{12}[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}] \quad (3)$$

$$\tau_{xz} = G_{13}\gamma_{xz} = G_{13}k f(z)\left(\psi_x - \theta_1\right);\ \tau_{yz} = G_{23}\gamma_{yz} = G_{23}k f(z)\left(\psi_y - \theta_2\right),$$

где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – продольные модули упругости и коэффициенты Пуассона данного материала, причем

$E_1\mu_2 = E_2\mu_1;\ G_{11} = \dfrac{E_1}{1-\mu_1\mu_2},\ G_{22} = \dfrac{E_2}{1-\mu_1\mu_2};$

G_{12}, G_{13} и G_{23} – модули сдвига соответственно в плоскостях симметрии (dx,dy), (dx,dz) и (dy,dz) материала оболочки.

В случае *изотропного* линейно упругого материала физические соотношения являются частным случаем соотношений (3) при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$,

а также $G_{11} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$, $G_{22} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$ и $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

Интегрируя компоненты тензора напряжений (3) по переменной z ($-h/2 \le z \le h/2 + H$), получаем погонные усилия, моменты и поперечные силы, приведенные к отсчетной поверхности [4]:

$$N_{xx} = G_{11}[(h+\bar{F})(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_2\chi_2)],\ N_{yy} = G_{22}[(h+\bar{F})(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_1\chi_1)],$$

$$N_{xy} = G_{12}[(h+\overline{F})\gamma_{xy} + 2\overline{S}\chi_{12}];$$

$$M_{xx} = G_{11}\left[\overline{S}(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right],\ M_{yy} = G_{22}\left[\overline{S}(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right],$$

$$M_{xy} = G_{12}\left[\overline{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_{xz} = kG_{13}(h+\overline{F})(\psi_x - \theta_1),\ Q_{yy} = kG_{23}(h+\overline{F})(\psi_y - \theta_2). \quad (4)$$

Здесь $\overline{F},\ \overline{S},\ \overline{J}$ – площадь поперечного (продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно:

$$\overline{F} = \int\limits_{h/2}^{h/2+H} dz,\ \overline{S} = \int\limits_{h/2}^{h/2+H} zdz,\ \overline{J} = \int\limits_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

Физические соотношения для ортотропных материалов при учете *ползучести* материала в соответствии с теориями *упругоползучего тела* могут быть представлены в виде [5]

$$\sigma_{xx} = \sigma^e_{xx} - \sigma^c_{xx},\ \sigma_{yy} = \sigma^e_{yy} - \sigma^c_{yy},\ \tau_{xy} = \tau^e_{xy} - \tau^c_{xy},$$

$$\tau_{xz} = \tau^e_{xz} - \tau^c_{xz},\ \tau_{yz} = \tau^e_{zy} - \tau^c_{zy},$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие компонент тензора напряжений (отмечены индексом «*e*»), определяются с помощью формул

$$\sigma^{\mathrm{e}}_{xx} = G_{11}(\varepsilon^z_{xx} + \mu_2\varepsilon^z_{yy}),\ \sigma^{\mathrm{e}}_{yy} = G_2(\varepsilon^z_{yy} + \mu_1\varepsilon^z_{xx}),\ \tau^{\mathrm{e}}_{xy} = G_{12}\gamma^z_{xy};$$

$$\tau^{\mathrm{e}}_{xz} = G_{13}\gamma_{xz},\ \tau^{\mathrm{e}}_{yz} = G_{23}\gamma_{yz}, \quad (5)$$

а составляющие компонент тензора напряжений, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «*c*»), вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma^{\mathrm{c}}_{xx} = \int\limits_{t_0}^{t} G_{11}\left(\varepsilon^z_{xx} + \mu_2\varepsilon^z_{yy}\right)R_1(t,\tau)d\tau,\ \sigma^{\mathrm{c}}_{yy} = \int\limits_{t_0}^{t} G_{22}\left(\varepsilon^z_{yy} + \mu_1\varepsilon^z_{xx}\right)R_1(t,\tau)d\tau,\ \tau^{\mathrm{c}}_{xy} = \int\limits_{t_0}^{t} G_{12}\gamma^z_{xy}R_2(t,\tau)d\tau;$$

$$\tau^{\mathrm{c}}_{xz} = \int\limits_{t_0}^{t} G_{13}\gamma_{xz}R_2(t,\tau)d\tau,\ \tau^{\mathrm{c}}_{yz} = \int\limits_{t_0}^{t} G_{23}\gamma_{yz}R_2(t,\tau)d\tau. \quad (6)$$

Здесь $R_1(t,\tau)$ и $R_2(t,\tau)$ – функции влияния материала при растяжении (сжатии) и сдвиге, где t – время, τ – переменная интегрирования (имеет смысл времени);

$G_{11} = \dfrac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}$, $G_{22} = \dfrac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}$, G_{12}, G_{13} и G_{23} – модули сдвига [константы либо переменные коэффициенты (функции t) в общем случае], где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – продольные модули упругости и коэффициенты Пуассона (переменные либо константы).

Для изотропных материалов физические соотношения являются частным случаем соотношений (5) и (6) при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, а также $G_{11} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$, $G_{22} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$ и $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$. [6,7].

Интегрируя напряжения (5) и (6) по переменной z ($-h/2 \le z \le h/2 + H$), получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [5]:

$$N_{xx} = N^{\mathrm{e}}_{xx} - N^{\mathrm{c}}_{xx},\ N_{yy} = N^{\mathrm{e}}_{yy} - N^{\mathrm{c}}_{yy},\ N_{xy} = N^{\mathrm{e}}_{xy} - N^{\mathrm{c}}_{xy};\ M_x = M^{\mathrm{e}}_x - M^{\mathrm{c}}_x,\ M_y = M^{\mathrm{e}}_y - M^{\mathrm{c}}_y,$$

$$M_{xy} = M^{\mathrm{e}}_{xy} - M^{\mathrm{c}}_{xy};\ Q_{xz} = Q^{\mathrm{e}}_{xz} - Q^{\mathrm{c}}_{xz},\ Q_{yz} = Q^{\mathrm{e}}_{yz} - Q^{\mathrm{c}}_{yz}, \quad (7)$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие (с индексом «*e*») внутренних силовых факторов вычисляются по формулам

$$N^e_{xx}(t) = G_{11}\left[(h+\overline{F})(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \overline{S}(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$N^e_{yy}(t) = G_{22}\left[(h+\overline{F})(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \overline{S}(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$N_{xy}^e(t) = G_{12}\left[(h+\overline{F})\gamma_{xy} + 2\overline{S}\chi_{12}\right].$$

$$M_{xx}^e(t) = G_{11}\left[\overline{S}(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$M_{yy}^e(t) = G_{22}\left[\overline{S}(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$M_{xy}^e(t) = G_{12}\left[\overline{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_{xz}^e(t) = kG_{13}(h+\overline{F})(\psi_x - \theta_1);\; Q_{yz}^e(t) = kG_{23}(h+\overline{F})(\psi_y - \theta_2),$$

а составляющие внутренних силовых факторов, обусловленные ползучестью материала (с индексом «*c*»), определяются с помощью выражений

$$N_{xx}^c = \int_{t_0}^{t} N_{xx}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;\; N_{yy}^c = \int_{t_0}^{t} N_{yy}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$N_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} N_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;\; M_{xx}^c = \int_{t_0}^{t} M_{xx}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$M_{yy}^c = \int_{t_0}^{t} M_{yy}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;\; M_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} M_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;$$

$$Q_{xx}^c(t) = \int_{t_0}^{t} Q_{xx}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;\; Q_{yy}^c = \int_{t_0}^{t} Q_{yy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau.$$

Примечание 2. При решении задач ползучести интегралы по переменной τ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t]$ заданной длины $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников [6,7].

В соответствии с деформационной теорией пластичности физические соотношения для *нелинейно-упругого изотропного* материала имеют вид [8–12]

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{e} - \sigma_{xx}^{p},\; \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{e} - \sigma_{yy}^{p},\; \tau_{xy} = \tau_{xy}^{e} - \tau_{xy}^{p},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{e} - \tau_{xz}^{p},\; \tau_{yz} = \tau_{yz}^{e} - \tau_{yz}^{p},$$

где линейно упругие составляющие тензора напряжений (отмечены индексом «*e*») определяются с помощью известных формул

$$\sigma_{xx}^{e} = G_{11}(\varepsilon_{xx}^{z} + \mu\varepsilon_{yy}^{z}),\; \sigma_{yy}^{e} = G_{22}(\varepsilon_{yy}^{z} + \mu\varepsilon_{xx}^{z});$$

$$\tau_{xy}^{e} = G_{12}\gamma_{xy}^{z},\; \tau_{xz}^{e} = G_{13}\gamma_{xz},\; \tau_{yz}^{e} = G_{23}\gamma_{yz}, \quad (8)$$

являющихся частным случаем соотношений (3) при $G_{11} = G_{22} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$ и $G_{12} = G_{13} = G_{23} = \dfrac{E}{2(1-\mu)}$, а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие тензора напряжений (отмечены индексом «*p*») вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_{xx}^{p} = G_{11}\omega(\varepsilon_i)(\varepsilon_{xx}^{z} + \mu\varepsilon_{yy}^{z}),\; \sigma_{yy}^{p} = G_{22}\omega(\varepsilon_i)(\varepsilon_{yy}^{z} + \mu\varepsilon_{xx}^{z});$$

$$\tau_{xy}^{p} = G_{12}\omega(\varepsilon_i)\gamma_{xy}^{z},\; \tau_{xz}^{p} = G_{13}\omega(\varepsilon_i)\gamma_{xz},\; \tau_{yz}^{p} = G_{23}\omega(\varepsilon_i)\gamma_{yz}, \quad (9)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – безразмерная функция деформации (функция А.А. Ильюшина);

$\varepsilon_i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + \varepsilon_x^z\varepsilon_y^z + (\varepsilon_y^z)^2 + \dfrac{1}{4}[(\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]}$ – интенсивность деформации [5].

Интегрируя напряжения (8) и (9) по переменной z ($-h/2 \le z \le h/2 + H$), получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [8-11]:

$$N_{xx} = N_{xx}^{e} - N_{xx}^{p},\; N_{yy} = N_{yy}^{e} - N_{yy}^{p},\; N_{xy} = N_{xy}^{e} - N_{xy}^{p},$$

$$M_{xx} = M_{xx}^{e} - M_{xx}^{p},\; M_{yy} = M_{yy}^{e} - M_{yy}^{p},\; M_{xy} = M_{xy}^{e} - M_{xy}^{p}$$

$$Q_{xz} = Q_{xz}^{\mathrm{e}} - Q_{xz}^{\mathrm{p}},\ Q_{yz} = Q_{yz}^{\mathrm{e}} - Q_{yz}^{\mathrm{p}}, \quad (10)$$

где линейно упругие составляющие (с индексом «*e*») вычисляются по формулам

$$N_{xx}^{e} = G_{11}[(h+\bar{F})(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}) + \bar{S}(\chi_1 + \mu\chi_2)];$$

$$N_{yy}^{e} = G_{22}[(h+\bar{F})(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}) + \bar{S}(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$

$$N_{xy}^{e} = G_{12}[(h+\bar{F})\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}];$$

$$M_{xx}^{e} = G_{11}\left[\bar{S}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\chi_1 + \mu\chi_2)\right]; \quad (11)$$

$$M_{yy}^{e} = G_{22}\left[\bar{S}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\chi_2 + \mu\chi_1)\right];$$

$$M_{xy}^{e} = G_{12}\left[\bar{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\chi_{12}\right],$$

$$Q_{xz}^{e} = kG_{13}(h+\bar{F})(\psi_x - \theta_1);\ Q_{yz}^{e} = kG_{23}(h+\bar{F})(\psi_y - \theta_2),$$

а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (с индексом «*p*») внутренних силовых факторов определяются с помощью выражений

$$N_{xx}^{\mathrm{p}} = G_{11}[I_1(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)];$$

$$N_{yy}^{\mathrm{p}} = G_{22}[I_1(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$

$$N_{xy}^{\mathrm{p}} = G_{12}(I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12});$$

$$M_{xx}^{\mathrm{p}} = G_{11}[I_2(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \quad (12)$$

$$M_{yy}^{\mathrm{p}} = G_{22}[I_2(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}) + I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$

$$M_{xy}^{\mathrm{p}} = G_{12}(I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12});$$

$$Q_{xz}^{\mathrm{p}} = G_{13}kI_4(\psi_x - \theta_1);\ Q_{yz}^{\mathrm{p}} = G_{23}kI_4(\psi_y - \theta_2).$$

В соотношениях (12) $I_s = \int\limits_{-h/2}^{h/2+H} \omega(\varepsilon_i) z^{s-1} dz,\ 1 \le s \le 3;\ I_4 = \int\limits_{-h/2}^{h/2+H} \omega(\varepsilon_i) f(z) dz$ – жесткостные параметры.

3. В соответствии с фундаментальным принципом минимума потенциальной энергии (принципом Лагранжа) из всех кинематически возможных смещений упругой системы в действительности реализуются лишь те, которые доставляют стационарное значение величине (полной энергии) [1]

$$Э = \Pi - A^E, \quad (11)$$

где Π – потенциальная энергия системы;

A^E – работа внешних сил.

Математически принцип Лагранжа в нашем случае выражается в виде вариационного уравнения

$$\delta Э = \delta\Pi - \delta A^E, \quad (12)$$

где δ – символ вариации.

Здесь $\Pi = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}^{z} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}^{z} + \tau_{xy}\gamma_{xy}^{z} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}] d\Omega$, (13)

$A^E = \frac{1}{2}\iint\limits_{S} (P_x U + P_y V + qW) dS$, (14)

где P_x, P_y и q – компоненты внешней механической нагрузки в направлении координатных линий x, y и z;

Ω – область в пространстве (x, y, z);

S – область в плоскости (x, y);

$d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ($d\Omega = ABdxdydz$; $dS = ABdxdy$).

Проинтегрировав по z ($-h/2 \le z \le h/2 + H$) выражение (13), получим:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_S \left[N_{xx}\varepsilon_{xx} + N_{yy}\varepsilon_{yy} + N_{xy}\gamma_{xy} + M_{xx}\chi_1 + M_{yy}\chi_2 + 2M_{xy}\chi_{12} + Q_{xz}(\psi_x - \theta_1) + Q_{yz}(\psi_y - \theta_2) \right] dS \text{ , (15)}$$

где внутренние силовые факторы (усилия, моменты и поперечные силы) вычисляются (в зависимости от учитываемых свойств материала) с помощью соотношений (4), (7) или (10), а деформации – по формулам (1) и (2).

С учетом (14) вариационное уравнение (12) обретает вид

$$\delta Э = \frac{1}{2}\iint_S \left[N_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + N_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + N_{xy}\delta\gamma_{xy} + M_{xx}\delta\chi_1 + M_{yy}\delta\chi_2 + 2M_{xy}\delta\chi_{12} + \right.$$

$$\left. + Q_{xz}\delta(\psi_x - \theta_1) + Q_{yz}\delta(\psi_y - \theta_2) - (P_x\delta U + P_y\delta V + q\delta W) \right] dS = 0 \text{ . (16)}$$

Преобразуем вариационное уравнение (16) так, чтобы под знаком (двойного) интеграла не было вариаций от производных искомых функций U, V, W и ψ_x, ψ_y .

Суть преобразования вариационного уравнения (с применением интегрирования по частям) поясним на примере первого члена:

$$\iint_S N_{xx}\delta\varepsilon_{xx} dS = \iint_S N_{xx}\delta\frac{DU}{\partial x}dS + \iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{DW}{\partial x}dS ,$$

где

$$\iint_S N_{xx}\delta\frac{DU}{\partial x}dS = \iint_S N_{xx}\delta\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x}dS + \iint_S \left(N_{xx}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\delta V - N_{xx}K_x\delta W \right) dS ,$$

$$\iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{DW}{\partial x}dS = -\iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}dS - \iint_S N_{xx}\theta_1 K_x\delta U dS ,$$

причем

$$\iint_S N_{xx}\delta\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x}dS = \int_{-b}^{b} N_{xx}\delta U \Big|_{x=-a}^{x=a} Bdy - \iint_S \frac{1}{A}\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}\delta U dS ,$$

$$-\iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}dS = -\int_{-b}^{b} (N_{xx}\theta_1)\delta W \Big|_{x=-a}^{x=a} Bdy + \iint_S \frac{1}{A}\frac{\partial (N_{xx}\theta_1)}{\partial x}\delta W dS .$$

В результате, используя известные из тензорного анализа [13,14] выражения (для дивергенции тензора в ортогональных криволинейных координатах) типа

$$\frac{DN_{xx}}{\partial x} + \frac{DN_{xy}}{\partial y} = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AN_{xy})}{\partial y} \right), \quad \frac{DN_{yy}}{\partial y} + \frac{DN_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BN_{xy})}{\partial x} \right)$$

и т.д., приведем вариационное уравнение (16) к виду

$$\delta Э = -\iint_S \left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AN_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial x}N_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y}N_{xy} \right) - K_xQ_{xz} + K_x(N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2) + P_x \right]\delta U dS -$$

$$-\iint_S \left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BN_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}N_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x}N_{xy} \right) - K_yQ_{yz} + K_y(N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1) + P_y \right]\delta V dS -$$

$$-\iint_S \left[K_xN_{xx} + K_yN_{yy} + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BQ_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (AQ_{yz})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B(N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2)}{\partial x} + \frac{\partial A(N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1)}{\partial y} \right) + q \right]\delta W dS -$$

$$-\iint_S \left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BM_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AM_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial x}M_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y}M_{xy} \right) - Q_{xz} \right]\delta\psi_x dS -$$

$$-\iint_S \left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (AM_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BM_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y} M_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} M_{xy} \right) - Q_{yz} \right] \delta\psi_y dS +$$

$$+ \int_{-b}^{b} \left[N_{xx}\delta U + N_{xy}\delta V + \left(Q_{xz} - N_{xx}\theta_1 - N_{xy}\theta_2 \right)\delta W + M_{xx}\delta\psi_x + M_{xy}\delta\psi_y \right] \Bigg|_{x=-a}^{x=a} B dy +$$

$$+ \int_{-a}^{a} \left[N_{xy}\delta U + N_{yy}\delta V + \left(Q_{yz} - N_{yy}\theta_2 - N_{xy}\theta_1 \right)\delta W + M_{xy}\delta\psi_x + M_{yy}\delta\psi_y \right] \Bigg|_{y=-b}^{y=b} A dx = 0. \quad (17)$$

Полагая в вариационном уравнении (17) вариации $\delta U, \delta V, \delta W$ и $\delta\psi_x, \delta\psi_y$ произвольными под знаком двойного интеграла и приравнивая нулю сомножители, стоящие перед ними, получим искомые *уравнения равновесия оболочки*:

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AN_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial x} N_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right) - K_x Q_{xz} + K_x (N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2) + P_x = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BN_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y} N_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy} \right) - K_y Q_{yz} + K_y (N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1) + P_y = 0;$$

$$K_x N_{xx} + K_y N_{yy} + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BQ_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (AQ_{yz})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B(N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2)}{\partial x} + \frac{\partial A(N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1)}{\partial y} \right) + q = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (BM_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AM_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial x} M_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} \right) - Q_{xz} = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial (AM_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BM_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y} M_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} M_{xy} \right) - Q_{yz} = 0. \quad (18)$$

Из равенства нулю одномерных интегралов, входящих в вариационное уравнение (17), получаем естественные *граничные* (*краевые) условия* на контуре оболочки:

- при $x = -a$ и $x = a$

$$N_{xx} = const \text{ или } U = const,\ N_{xy} = const \text{ или } V = const,$$

$$-N_{xx}\theta_1 - N_{xy}\theta_2 + Q_{xz} = const \text{ или } W = const,$$

$$M_{xx} = const \text{ или } \psi_x = const,\ M_{xy} = 0 \text{ или } \psi_y = const;$$

- при $y = -b$ и $y = b$

$$N_{xy} = const \text{ или } U = const,\ N_{yy} = const \text{ или } V = const,$$

$$-N_{yy}\theta_2 - N_{xy}\theta_1 + Q_{yz} = const \text{ или } W = const,$$

$$M_{xy} = const \text{ или } \psi_x = const,\ M_{yy} = const \text{ или } \psi_y = const.$$

Полученные уравнения движения (18) ортотропных и изотропных ребристых оболочек общего вида позволяют совместно учитывать геометрическую нелинейность, дискретность расположения ребер (или вырезов), их конечную ширину, сдвиговую и крутильную жесткости ребер, а также эффект поперечных сдвигов.

Кроме того, уравнения (18) позволяют учитывать нелинейную упругость, а также возможные деформации ползучести материала.

Заметим, что в частном случае *пологих* ребристых оболочек (в процессе деформирования которых полагается, что величины $K_x U$ и $K_y V$ малы, $\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} >> K_x U$ и $\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} >> K_y V$, а значит $\theta_1 \approx -\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x};\ \theta_2 \approx -\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y}$, причем $A = B = 1$) уравнения равновесия (18) существенно упрощаются и имеют вид

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}-K_x Q_{xz}+K_x(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)+P_x=0;$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}-K_y Q_{yz}+K_y(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)+P_y=0;$$

$$K_x N_{xx}+K_y N_{yy}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}-\left(\frac{\partial(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)}{\partial x}+\frac{\partial(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)}{\partial y}\right)+q=0;$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_{xz}=0;\ \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_{yz}=0. \quad (19)$$

Граничные условия для пологих оболочек сохраняют прежний вид.

Примечание 3. Следуя А.К. Платонову и Э.Г. Перцеву [15], в первых двух уравнениях (19) членами, содержащими θ_1 и θ_2, можно пренебречь, считая их несущественными.

Примечание 4. Следует заметить, что если непосредственно выводить уравнения равновесия пологих оболочек с учетом сделанных выше предположений, то в первых двух уравнениях (19) будут отсутствовать члены $K_x Q_{xz}$ и $K_y Q_{yz}$ в силу того, что при выводе (19) в квадратичных членах от угловых перемещений (характеризующих геометрическую нелинейность) величины $K_x U$ и $K_y V$ принимались равными нулю.

Литература

1. Жгутов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. … канд. техн. наук: 05.23.17. СПб., 2004.
2. Жгутов В.М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек. // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №8. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 08/zhgoutov1.html.
3. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования: Учебное пособие // В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.Ю. Сальников. М., СПб., 2002.
4. Жгутов В.М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7.– Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 07/zhgoutov1.html.
5. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009.– №7. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 07/zhgoutov1.html.
6. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале ребристых пологих оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 1. М., 2010.
7. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
8. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал.– 2009. – №6. – С.16–24. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 06/zhgoutov.html.
9. Жгутов В.М. Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2009.–№ 4. Спб., 2009.
10. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых пологих оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4.
11. Жгутов В.М. Устойчивость упругопластических ребристых оболочек при больших перемещениях // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
12. Жгутов В.М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Популярное бетоноведение. – 2009. – № 6. Спб., 2009.
13. Акивис М.А., В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. – М., 1969.
14. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М., 1965.
15. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин. – Л., 1987.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*
Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru