

Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

К.т.н. В.М. Жгутов*,

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Известно, что при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости оболочек, находящихся под действием длительных нагрузок, важно учитывать, что с течением времени в материале может проявиться свойство ползучести, что приведет к снижению критических нагрузок, найденных при упругом поведении материала [1–5, 7–10].

Рассматриваем оболочки общего вида (пологие прямоугольного плана и вращения, в частности, цилиндрические, конические, сферические, торообразные, а также некоторые другие оболочки).

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной h принимаем за отсчетную поверхность $z=0$. Полагаем, что оси x и y криволинейной ортогональной системы координат ($-a/2 \leq x \leq a/2; -b/2 \leq y \leq b/2$) направлены по линиям кривизны отсчетной поверхности (параллелям и меридианам в случае оболочки вращения), а ось z – по нормали к поверхности $z=0$ в сторону ее вогнутости.

Со стороны вогнутости оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра задаем дискретно с помощью функции $H=H(x,y)$, характеризующей распределение ребер по оболочке и их высоту [4, 6]. Таким образом, $-h/2 \leq z \leq h/2 + H$.

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении её контура.

Учитываем геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги, возможность развития деформаций ползучести при длительной нагрузке.

Геометрические соотношения в отсчетной поверхности $z=0$ с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - K_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - K_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} U + \frac{\partial B}{\partial x} V \right) + \theta_1 \theta_2,\end{aligned}$$

где ε_x , ε_y и γ_{xy} – деформации удлинения вдоль осей x , y и сдвига в касательной плоскости (dx, dy) ; U , V и W – компоненты вектора перемещений точек вдоль осей x , y и z соответственно; A и B – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например, $A=B=1$ для пологой оболочки и $A=const$, $B=B(x)$ в случае оболочки вращения); $K_x = 1/R_1$, $K_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1 , R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно;

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + K_x U \right); \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + K_y V \right).$$

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = cf(z)(\psi_x - \theta_1); \quad \gamma_{yz} = cf(z)(\psi_y - \theta_2).$$

Здесь ψ_x и ψ_y – углы поворота отрезка нормали в плоскостях (dx, dz) и (dy, dz) соответственно; $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} вдоль оси z ; c – константа.

Будем полагать, что $f(z)$ имеет вид [4, 6]

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2} \left(z + \frac{h}{2} \right) \left(z - \frac{h}{2} - H \right).$$

Эта функция при $z = -h/2$ и $z = h/2 + H$ обращается в нуль и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f(z) dz = 1; \quad \frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f^2(z) dz = \frac{1}{c} \quad (c = 5/6).$$

Перемещения в слое $z \neq 0$ определяем по формулам

$$U^z = U + z\psi_x, \quad V^z = V + z\psi_y, \quad W^z = W,$$

откуда для деформаций в слое $z \neq 0$ получаем соотношения в виде

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где χ_1 , χ_2 и χ_{12} – функции изменения кривизны и кручения, определяемые по формулам:

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x;$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_y \right).$$

Физические соотношения для упругих оболочек в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z, \quad (1)$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона для данного материала.

Кроме того, при учете поперечных сдвигов

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}. \quad (2)$$

Ползучесть материала будем учитывать на основе линейной наследственной теории (широко применяемой в механике полимеров и для старого бетона).

Физические соотношения в этом случае могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^c, \quad \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^c, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^c,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^c, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^e - \tau_{yz}^c,$$

где упругие составляющие напряжений (отмечены индексом «е»), определяются с помощью формул (1) и (2), а составляющие напряжений, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «с»), имеют вид

$$\sigma_x^c = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_x^z(\tau) + \mu\varepsilon_y^z(\tau)] R_1(t, \tau) d\tau; \quad \sigma_y^c = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_y^z(\tau) + \mu\varepsilon_x^z(\tau)] R_1(t, \tau) d\tau;$$

$$\tau_{xy}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xy}^z(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad \tau_{xz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad \tau_{yz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{yz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau.$$

Здесь $R_1(t, \tau)$ и $R_2(t, \tau)$ – функции влияния при растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно; t – время наблюдения; τ – время, предшествующее моменту наблюдения.

Функции влияния для полимерных материалов (в частности, оргстекла) могут быть взяты в виде [3, 5, 8-12]

$$R_l(t, \tau) = A_l e^{-\beta_l(t-\tau)} \cdot (t-\tau)^{\alpha_l-1},$$

где A_l , α_l , β_l – константы, определяемые экспериментально ($1 \leq l \leq 2$).

Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

Функционал Э полной энергии деформации оболочки для задач статики представляет собой разность потенциальной энергии П и работы внешних сил A^E :

$$\mathcal{E} = \Pi - A^E,$$

где

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] d\Omega$$

$$A^E = \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS.$$

Здесь P_x , P_y и q – компоненты внешней нагрузки в направлении осей x , y и z ; Ω – область в пространстве (x, y, z) ; S – область в плоскости (x, y) ; $d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ($d\Omega = ABdx dy dz$; $dS = ABdx dy$).

Представим функционал Э в виде [5, 7–10]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^e - \mathcal{E}^c, \quad (3)$$

где функционал

$$\mathcal{E}^e = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x^e \varepsilon_x^z + \sigma_y^e \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^e \gamma_{xz} + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}] d\Omega - \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS \quad (4)$$

соответствует линейно упругой постановке задачи, а функционал

$$\mathcal{E}^c = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x^c(t) \varepsilon_x^z(t) + \sigma_y^c(t) \varepsilon_y^z(t) + \tau_{xy}^c(t) \gamma_{xy}^z(t) + \tau_{xz}^c(t) \gamma_{xz}(t) + \tau_{yz}^c(t) \gamma_{yz}(t)] d\Omega \quad (5)$$

описывает процесс развития ползучести.

После интегрирования в функционале (4) по переменной z будем иметь

$$\mathcal{E}^e = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \times \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ (h + \bar{F}) [\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1 \gamma_{xy}^2 + \mu_1 c(\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1 c(\psi_y - \theta_2)^2] + \right.$$

$$\left. + 2\bar{S} (\varepsilon_x \chi_1 + \mu \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_2 + \mu \varepsilon_y \chi_1 + 2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12}) \right\} +$$

$$\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2) - \frac{2(1-\mu^2)}{E} (P_x U + P_y V + qW) \Big\} dS,$$

где $\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz$; $\bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz$; $\bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz$ – жесткостные характеристики ребер.

Для функционала (5) далее имеем:

$$\mathcal{E}^c(t) = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \varepsilon_x(t) \int_{t_0}^t [(h + \bar{F}) (\varepsilon_x(\tau) + \mu \varepsilon_y(\tau)) + \bar{S} (\chi_1(\tau) + \mu \chi_2(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \chi_1(t) \int_{t_0}^t \left[\bar{S} (\varepsilon_x(\tau) + \mu \varepsilon_y(\tau)) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(\tau) + \mu \chi_2(\tau)) \right] R_1(t, \tau) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_y(t) \int_{t_0}^t [(h + \bar{F})(\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau)) + \bar{S}(\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau + \\
& + \chi_2(t) \int_{t_0}^t \left[\bar{S}(\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau)) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau)) \right] R_1(t, \tau) d\tau + \\
& + \mu_1 \gamma_{xy}(t) \int_{t_0}^t [(h + \bar{F})\gamma_{xy}(\tau) + 2\bar{S}\chi_{12}(\tau)] R_2(t, \tau) d\tau + 2\mu_1 \chi_{12}(t) \int_{t_0}^t \left[\bar{S}\gamma_{xy}(\tau) + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(\tau) \right] R_2(t, \tau) d\tau + \\
& + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_x(t) - \theta_1(t)) \int_{t_0}^t (\psi_x(\tau) - \theta_1(\tau)) R_2(t, \tau) d\tau + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_y(t) - \theta_2(t)) \int_{t_0}^t (\psi_y(\tau) - \theta_2(\tau)) R_2(t, \tau) d\tau \} dS.
\end{aligned}$$

Интеграл по переменной τ на интервале $[t_0, t_k]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t_i]$ длиной $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$ сут. каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников. В результате получим

$$\begin{aligned}
\Theta_c(t_k) = & \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varepsilon_x(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1}))] R1_{k,i-1} + \\
& + \chi_1(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \varepsilon_y(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1}))] R1_{k,i-1} + \\
& + \chi_2(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 \gamma_{xy}(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})\gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\bar{S}\chi_{12}(t_{i-1})] R2_{k,i-1} + \\
& + 2\mu_1 \chi_{12}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}\gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(t_{i-1}) \right] R2_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_x(t_k) - \theta_1(t_k)) \sum_{i=1}^k (\psi_x(t_{i-1}) - \theta_1(t_{i-1})) R2_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_y(t_k) - \theta_2(t_k)) \sum_{i=1}^k (\psi_y(t_{i-1}) - \theta_2(t_{i-1})) R2_{k,i-1} \} dS ;
\end{aligned}$$

Здесь

$$R1_{k,i-1} = R_1(t_k, t_{i-1})\Delta t; \quad R2_{k,i-1} = R_2(t_k, t_{i-1})\Delta t. \quad (6)$$

При $t = t_0$ решением исходной задачи является решение упругой задачи.

Заметим, что при нахождении момента времени $t = t_K$, при котором происходит потеря устойчивости оболочки вследствие ползучести, конкретное значение K , принимаемое индексом k (пробегающим значения 1, 2, ..., K), заранее неизвестно. В процессе изменения индекса k ($1 \leq k \leq K$) вместе со значениями (6) будем

пересчитывать все значения, соответствующие функционалу \mathcal{E}_c в полученном ниже расчетном уравнении (7) [11, 12].

Для отыскания минимума энергии (3) применяем метод Ритца при разложении искомых функций $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$, $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$ в виде

$$U = \sum_{I=1}^N U(I)X1(I)Y1(I); \quad V = \sum_{I=1}^N V(I)X2(I)Y2(I); \quad W = \sum_{I=1}^N U(I)X1(I)Y1(I);$$

$$\Psi_x = \sum_{I=1}^N PS(I)X4(I)Y4(I); \quad \Psi_y = \sum_{I=1}^N PN(I)X5(I)Y5(I),$$

где $U(I)$, $V(I)$, $W(I)$, $PS(I)$, $PN(I)$ – неизвестные параметры переменной t , подлежащие определению; $X1(I)Y1(I), \dots, X5(I)Y5(I)$ – известные аппроксимирующие функции переменных x и y , удовлетворяющие заданным краевым условиям.

В результате получаем нелинейную систему алгебраических уравнений, которую кратко можно записать в виде [5, 7 – 12]

$$F_n(X) - fq = -F_n(X) + F_c(X), \quad (7)$$

где $X = [U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)]^T$; fq – нагрузочный член (f – коэффициент); $F_n(X)$ и $F_c(X)$ – линейная и нелинейная (геометрически) части системы (7), соответствующие функционалу \mathcal{E}^e ; $F_c(X)$ – часть (7), отвечающая функционалу \mathcal{E}_c .

Начальным приближением X_0 в этом случае служит решение упругой или упругопластической задачи.

Далее, решаем систему (7) методом итераций:

$$F_n(X_i) - fq = -F_n(X_{i-1}) + F_c(\bar{X}_{i-1}),$$

где $\bar{X}_{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} X_k$.

Процесс продолжаем по времени t до критического его значения $t_{kp} = t_K$, отвечающего резкому возрастанию прогибов (в какой-либо характерной точке оболочки, например, ее центре, или четверти) при заданном значении нагрузки q . Так может быть получена зависимость дальнейшего снижения критической нагрузки, найденной в момент времени $t=0$.

Приведем некоторые результаты для пологих оболочек (на прямоугольном плане), выполненных из оргстекла.

Для удобства представления и анализа результатов функционал (3) был записан в безразмерных параметрах, описанных в [4, 6], в частности: безразмерных координатах $\xi = x/a$, $\eta = y/b$; безразмерных кривизнах $k_\xi = a^2 K_x / h$, $k_\eta = b^2 K_y / h$; безразмерных перемещениях $\bar{U} = aU / h^2$, $\bar{V} = bV / h^2$, $\bar{W} = W / h$ и углах $\bar{\psi}_x = a\psi_x / h$, $\bar{\psi}_y = b\psi_y / h$; безразмерной нагрузке $\bar{P} = a^4 q / Eh^4$; безразмерной интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i = \frac{a^2}{Eh^2} \sigma_i$, где $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$.

Варианты и соответствующие параметры проанализированных пологих оболочек представлены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры проанализированных оболочек

Вариант оболочки	Параметры оболочки			Возможные реальные размеры, м		
	$a = b$	$R_1 = R_2$	$k_\xi = k_\eta$	$a = b$	$R_1 = R_2$	h
I	$60h$	$225h$	16	18	67,5	0,3
II	$100h$	$251h$	40	18	45,3	0,18
III	$200h$	$503h$	79,5	18	45,3	0,09
IV	$600h$	$1510h$	238	18	45,3	0,03

Для каждого варианта рассматривались как гладкие оболочки (с числом ребер $N_p = 0$), так и ребристые оболочки при числе подкрепляющих ребер $N_p = 6$ и $N_p = 18$.

Считалось, что ребра расставлены равномерно вдоль координатных линий x и y соответственно по 3 ребра либо по 9 ребер в каждом из указанных направлений. Высота ребер принималась $3h$; ширина ребер полагалась равной $2h$, $3,3h$, $6,6h$ и $20h$ соответственно для вариантов оболочек I, II, III и IV.

Кроме того, при проведении расчетов предполагалось, что:

- 1) продольные составляющие нагрузки $P_x = P_y = 0$, а поперечная нагрузка q равномерно распределена ($q = \text{const}$);
- 2) контур оболочки закреплен шарнирно-неподвижным способом;
- 3) число членов разложения в методе Ритца $N=9$;
- 4) коэффициент Пуассона для оргстекла [3, 12] $\mu = 0,354$;
- 5) экспериментальные параметры [3, 12] $\alpha_1 = 0,05$; $\beta_1 = 0,045 \cdot 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$; $A_1 = 0,026945 \text{ сут.}^{1-\alpha_1}$; $\alpha_2 = 0,20$; $\beta_2 = 0,833 \cdot 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$; $A_2 = 0,013184 \text{ сут.}^{1-\alpha_2}$.

На рис. 1 – 4 в качестве примеров приведены зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(\xi, \eta)$ – время t » для гладких оболочек варианта I–IV.

Для оболочки варианта I (рис. 1) кривые 1–5 построены для точки, расположенной в четверти ($\xi = \pm 0,25; \eta = \pm 0,25$), при значениях безразмерной нагрузки $\bar{P} = 150$, $\bar{P} = 160$, $\bar{P} = 170$, $\bar{P} = 180$ и $\bar{P} = 185$ соответственно.

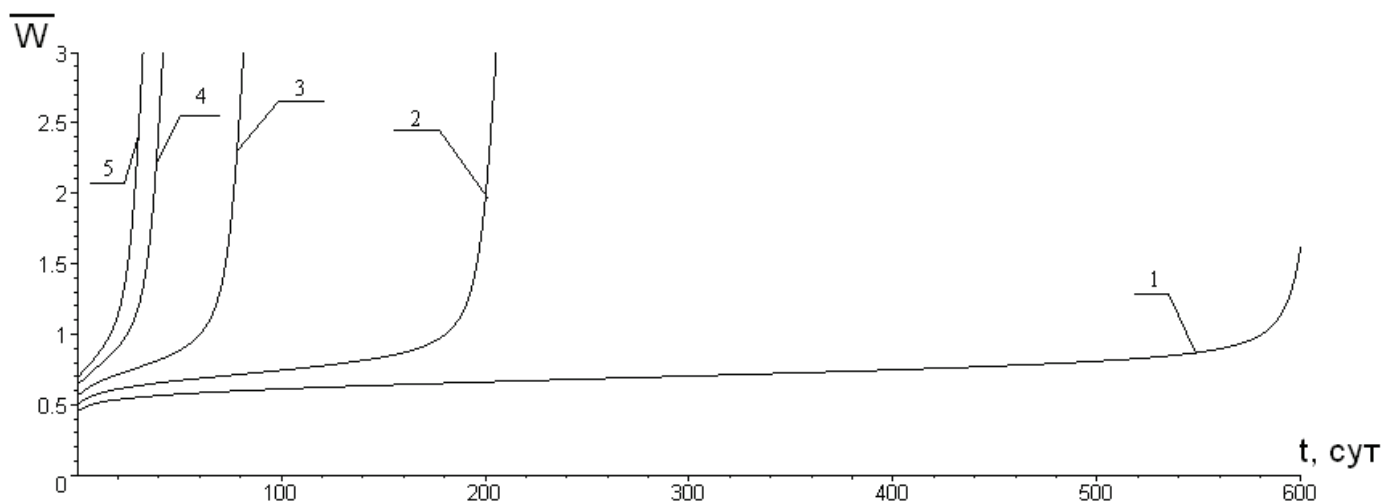


Рисунок 1. Зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(\pm 0,25; \pm 0,25)$ – время t » для гладкой оболочки варианта I. Кривые 1 – 5 построены при значениях безразмерных нагрузок $\bar{P} = 150$, $\bar{P} = 160$, $\bar{P} = 170$, $\bar{P} = 180$ и $\bar{P} = 185$ соответственно

Для центральной точки ($\xi = 0; \eta = 0$) оболочки варианта II (рис. 2) кривым 1–5 отвечают нагрузки $\bar{P} = 900$, $\bar{P} = 950$, $\bar{P} = 1000$, $\bar{P} = 1050$ и $\bar{P} = 1100$.

Для центральной точки оболочки варианта III (рис. 3) кривые 1–5 получены при нагрузках $\bar{P} = 4000$, $\bar{P} = 4500$, $\bar{P} = 4800$, $\bar{P} = 5000$ и $\bar{P} = 5100$.

Для оболочки варианта IV (рис. 4) кривые 1 – 5 приведены для точки, расположенной в четверти, и отвечают значениям нагрузок $\bar{P} = 55000$, $\bar{P} = 60000$, $\bar{P} = 68000$, $\bar{P} = 70000$ и $\bar{P} = 71000$ соответственно.

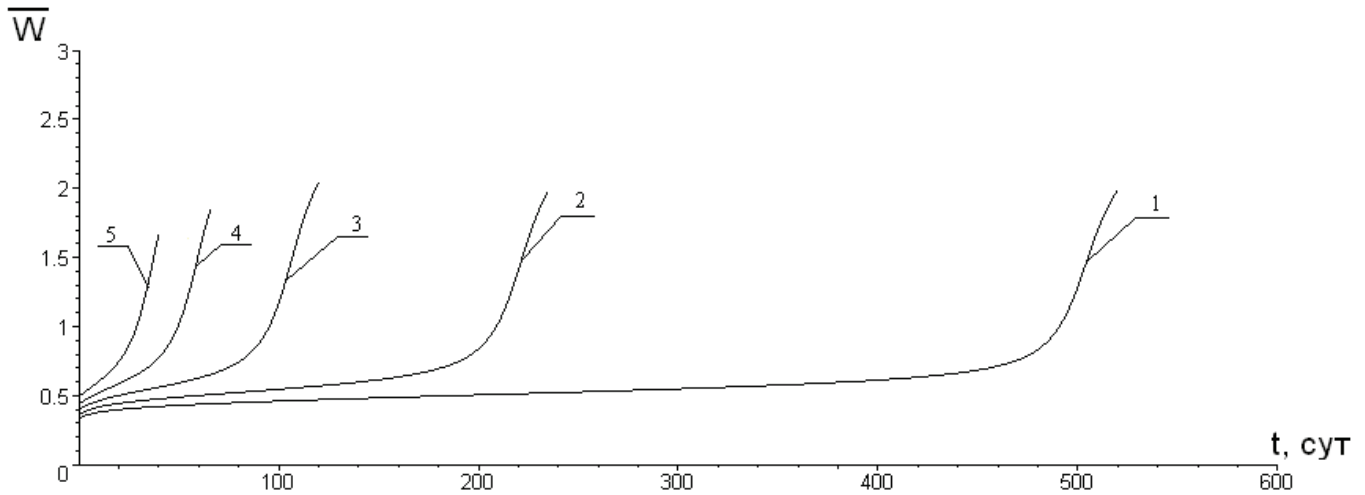


Рисунок 2. Зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(0;0)$ – время t » для гладкой оболочки варианта II.
Кривым 1 – 5 отвечают нагрузки $\bar{P} = 900$, $\bar{P} = 950$, $\bar{P} = 1000$, $\bar{P} = 1050$ и $\bar{P} = 1100$

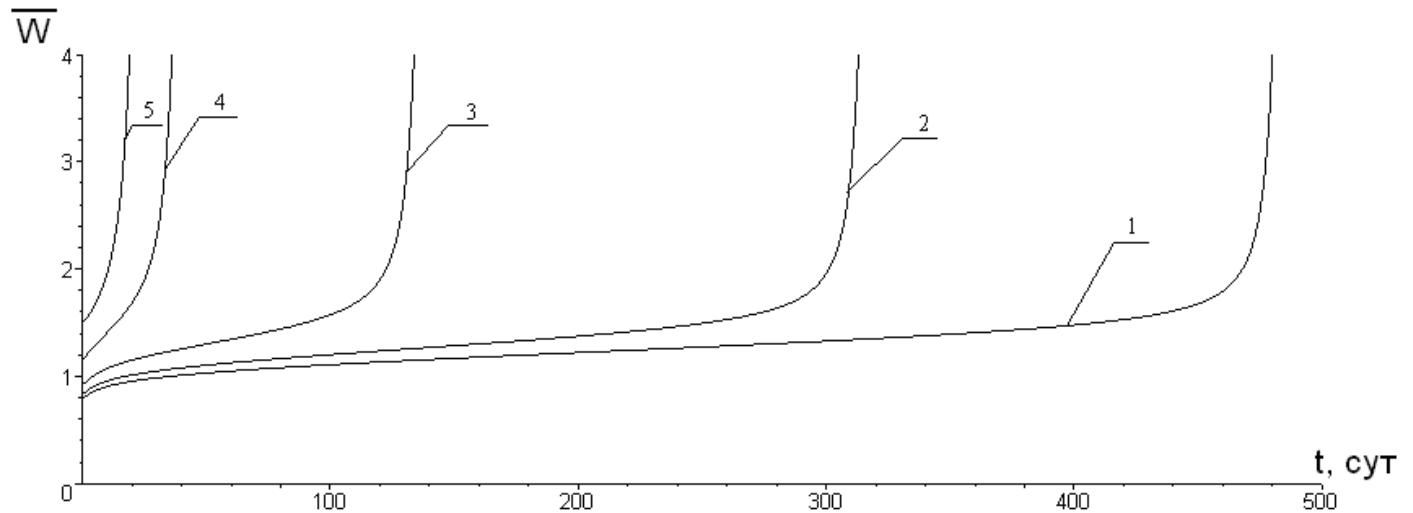


Рисунок 3. Зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(0;0)$ – время t » для гладкой оболочки варианта III.
Кривые 1 – 5 получены при нагрузках $\bar{P} = 4000$, $\bar{P} = 4500$, $\bar{P} = 4800$, $\bar{P} = 5000$ и $\bar{P} = 5100$

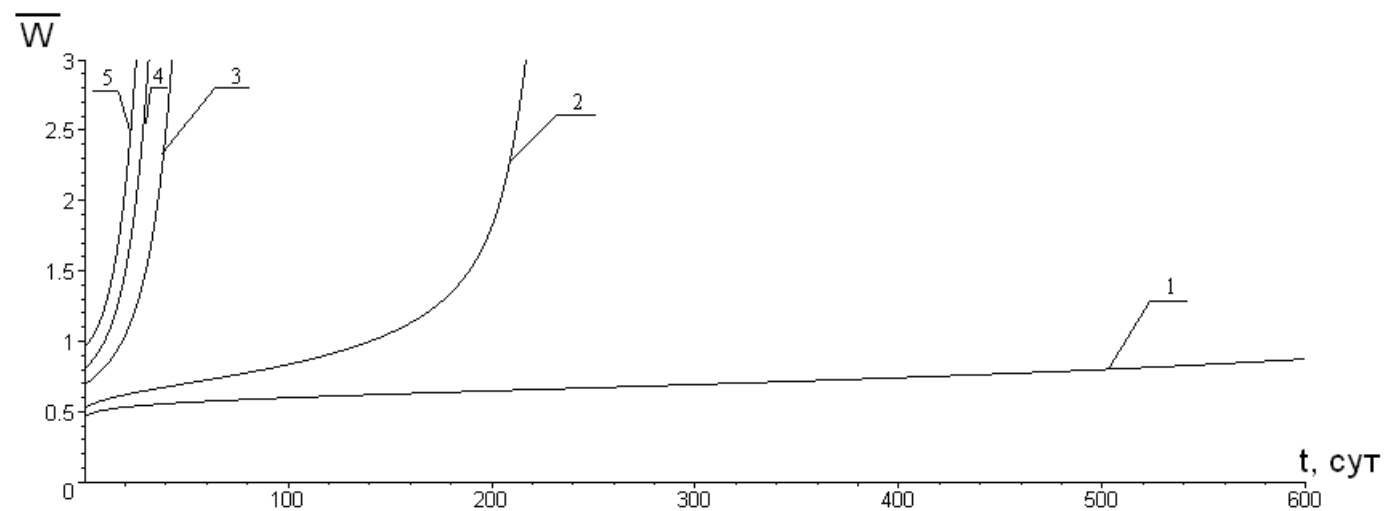


Рисунок 4. Зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(\pm 0,25; \pm 0,25)$ – время t » для гладкой оболочки варианта IV. Кривые 1 – 5 отвечают значениям нагрузок $\bar{P} = 55000$, $\bar{P} = 60000$, $\bar{P} = 68000$, $\bar{P} = 70000$ и $\bar{P} = 71000$ соответственно

На рис. 5 и 6 представлены аналогичные зависимости « $\bar{W}(0,0) - t$ » для ребристых оболочек варианта III (центральных их точек).

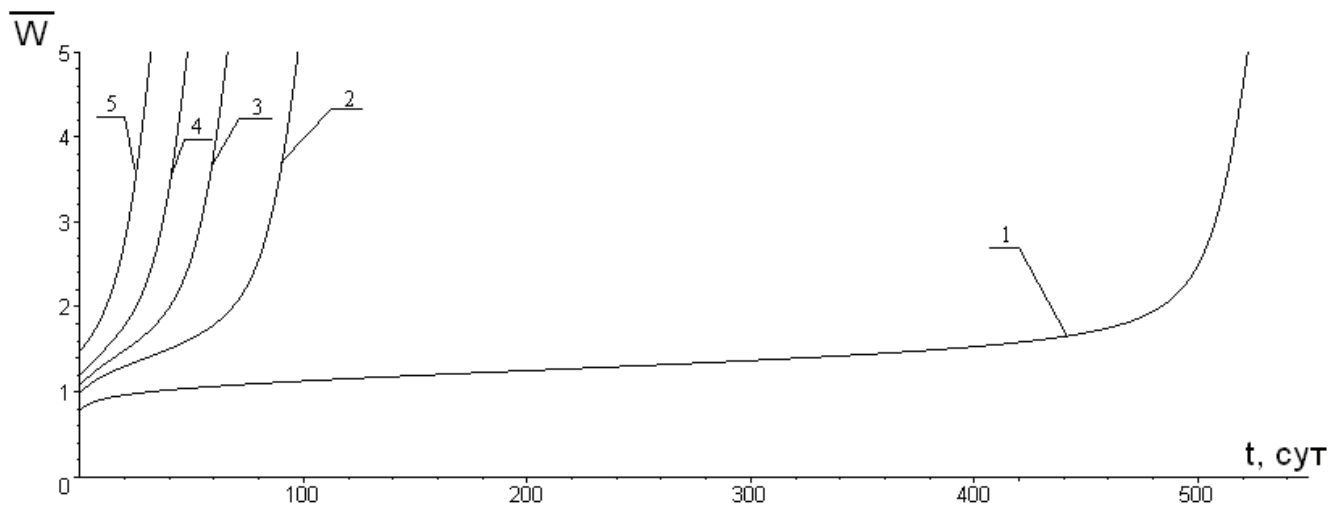


Рисунок 5. Зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(0;0)$ – время наблюдения t » для ребристой оболочки варианта III с 6 ребрами. Кривые 1–5 отвечают значениям нагрузки $\bar{P} = 10500$, $\bar{P} = 12000$, $\bar{P} = 12500$, $\bar{P} = 13000$ и $\bar{P} = 13700$ соответственно

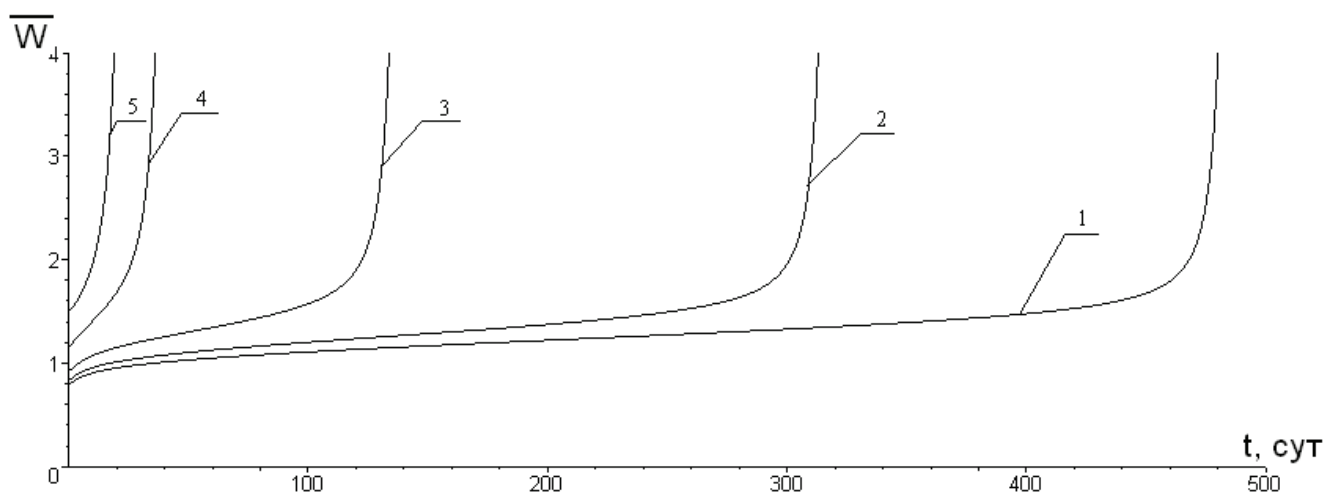


Рисунок 6. Зависимости «безразмерный прогиб $\bar{W}(0;0)$ – время t » для ребристой оболочки варианта III, подкрепленной 18 ребрами. Кривые 1–5 соответствуют нагрузкам $\bar{P} = 15000$, $\bar{P} = 16000$, $\bar{P} = 17000$, $\bar{P} = 19000$ и $\bar{P} = 20200$ соответственно

Так, для указанной оболочки с 6 ребрами (рис. 5) кривые 1–5 отвечают значениям нагрузки $\bar{P} = 10500$, $\bar{P} = 12000$, $\bar{P} = 12500$, $\bar{P} = 13000$ и $\bar{P} = 13700$ соответственно.

Для такой же оболочки, но подкрепленной 18 ребрами (рис. 6), кривые 1 – 5 соответствуют нагрузкам $\bar{P} = 15500$, $\bar{P} = 16000$, $\bar{P} = 17000$, $\bar{P} = 19000$ и $\bar{P} = 20200$ соответственно.

Проанализируем процесс развития ползучести в материале оболочки на примере изменения функций прогиба \bar{W} и интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$ и дадим ему нижеследующую графическую интерпретацию.

Рассмотрим гладкую оболочку варианта I.

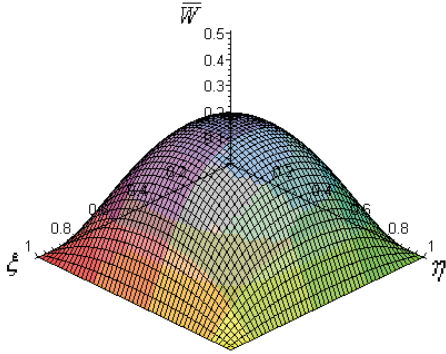
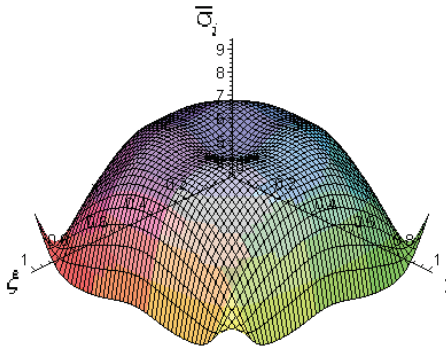
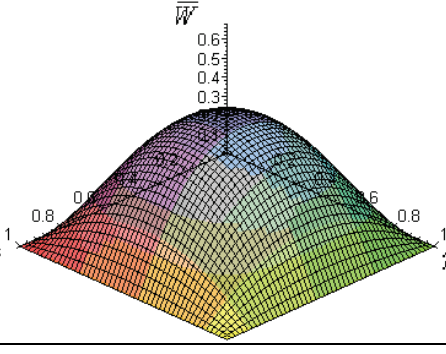
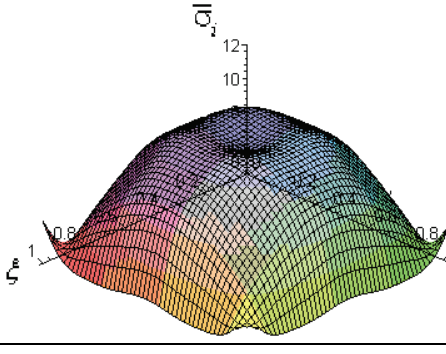
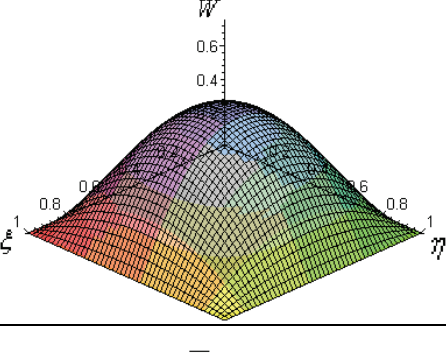
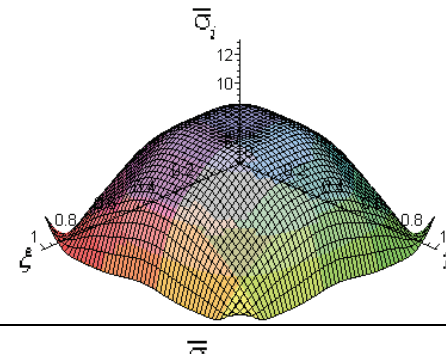
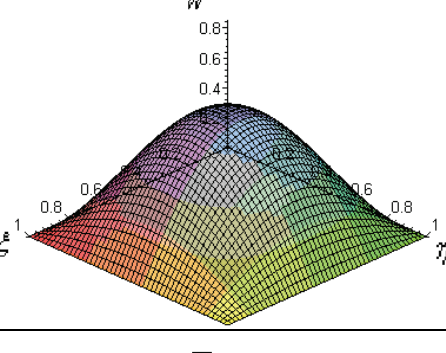
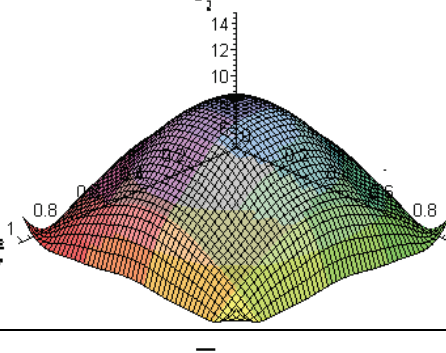
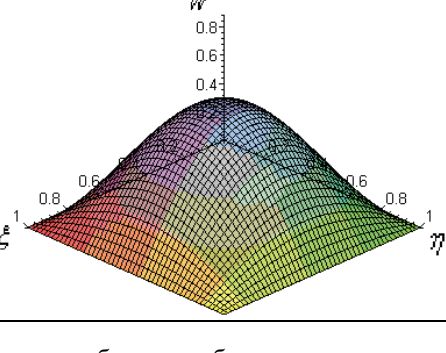
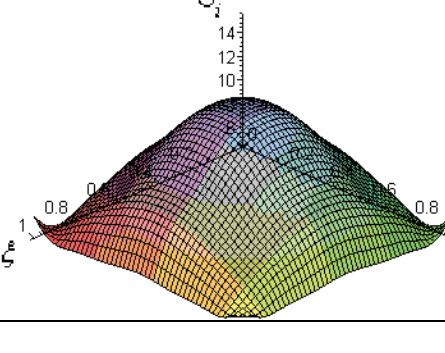
В табл. 2 представлены графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_i$ при значении нагрузки $\bar{P} = 100$, отвечающие моментам времени $t = 0, 100, 300, 500$ и 600 сут. Из рассмотрения графиков видно, что характер распределения прогибов и интенсивностей напряжения при указанной (сравнительно небольшой) нагрузке с течением времени практически не меняется. Следовательно, можно считать, что при данной начальной нагрузке ползучесть в материале рассматриваемой оболочки не проявляется.

Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

Таблица 2. Графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_i$ для гладкой оболочки варианта I (при нагрузке $\bar{P} = 100$)

$\bar{P} = 100$	Функции прогиба \bar{W}	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 0$		
$t = 100$		
$t = 300$		
$t = 500$		
$t = 600$		

Таблица 3. Графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_i$ для гладкой оболочки варианта I (при нагрузке $\bar{P} = 160$)

$\bar{P} = 160$	Функции прогиба \bar{W}	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 0$		
$t = 50$		
$t = 100$		
$t = 150$		
$t = 160$		

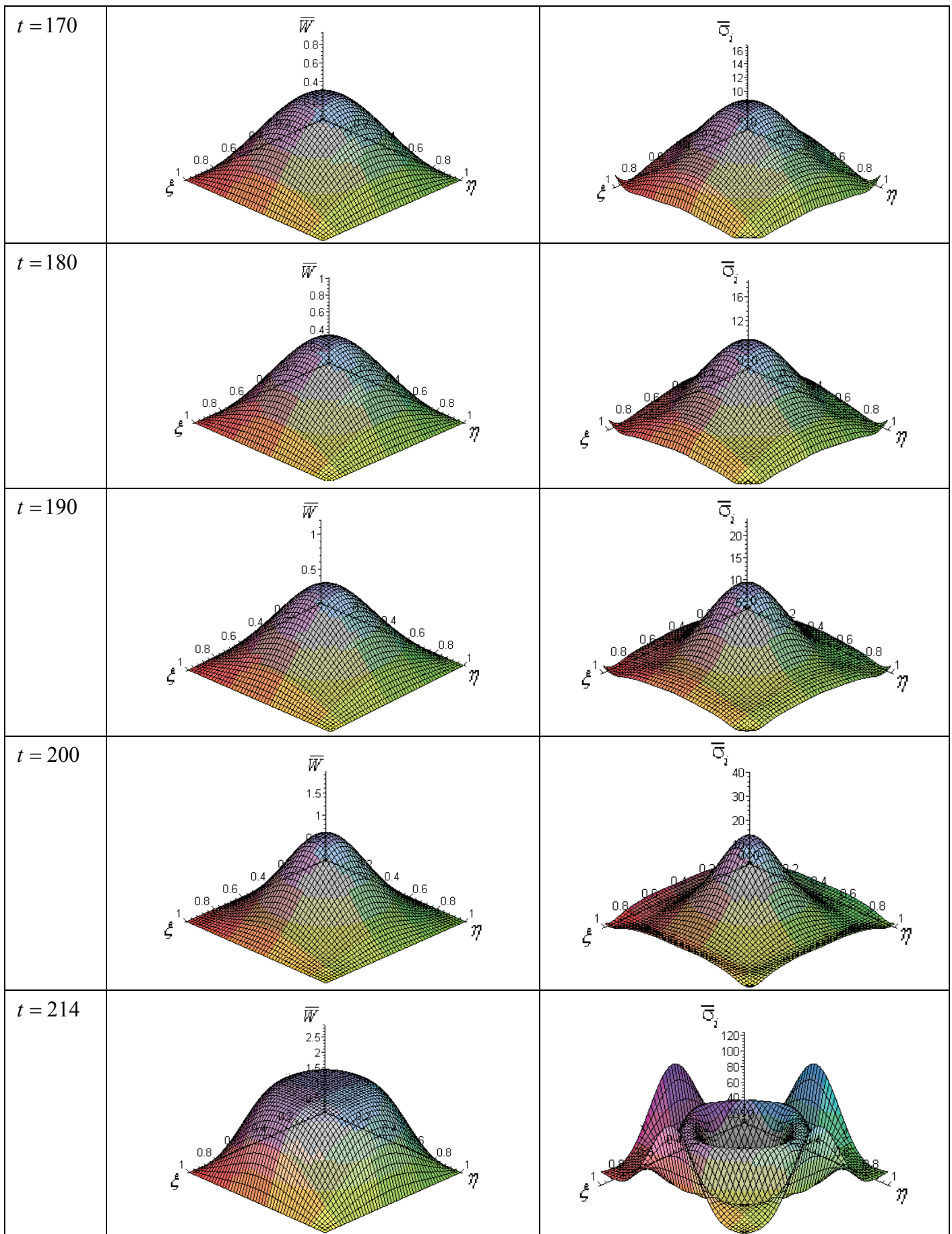


Таблица 4. Графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_i$ для гладкой оболочки варианта I (при нагрузке $\bar{P} = 185$)

$\bar{P} = 185$	Функции прогиба \bar{W}	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 10$		
$t = 15$		
$t = 20$		
$t = 25$		
$t = 35$		

В табл. 3 и 4 приведены аналогичные графики для той же оболочки при значениях предварительной нагрузки $\bar{P} = 160$ ($t = 0, 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190, 200$ и 214 сум.) и $\bar{P} = 185$ ($t = 10, 15, 20, 25, 35, 50, 70, 90, 108$ и 115 сум.), близких к критическому значению ($\bar{P}_{кр} = 202$).

Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

В этих случаях мы видим, что характер распределения прогибов и интенсивностей напряжения с течением времени достаточно быстро меняется, причем прогибы сильнее растут в тех местах, где имели место максимальные напряжения. Уровень напряжений при t , близком к $t_{кр}$, достигает предельно высокого уровня главным образом вблизи контура оболочки.

Таблица 5. Графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_i$ для гладкой оболочки варианта II (при нагрузке $\bar{P} = 4500$)

$\bar{P} = 4500$	Функции прогиба \bar{W}	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 50$		
$t = 70$		
$t = 90$		
$t = 108$		
$t = 115$		

Таблица 6. Графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_i$ для ребристой оболочки варианта II с 18 ребрами (при нагрузке $\bar{P} = 17000$)

$\bar{P} = 17000$	Функция прогибов \bar{W}	Функция интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 0$		
$t = 50$		
$t = 120$		
$t = 130$		
$t = 140$		

В табл. 5 и 6 приведены графики \bar{W} и $\bar{\sigma}_t$ для гладкой и подкрепленной 18 ребрами оболочки варианта II. Значения достаточно большой нагрузки принимались равными $\bar{P} = 4500$ ($t = 50, 70, 90, 108$ и 115 см.) (табл. 5) и, соответственно, $\bar{P} = 17000$ ($t = 0, 50, 120, 130$ и 140 см.) (табл. 6).

Результаты исследования показывают, что при длительности (достаточно большой) нагрузки порядка 100–150 суток критические нагрузки могут снизиться примерно вдвое.

Заметим, что при исследовании устойчивости оболочек весьма важно осуществлять и контроль их прочности с помощью, например, критерия Мизеса (применимого для пластичных материалов) или Кулона-Мора (применимого для хрупких материалов), исходя из определенного коэффициента запаса прочности.

Таким образом, проанализирован и наглядно представлен характер развития ползучести в материале оболочки со временем (показаны изменения прогибов и интенсивности напряжения по полю оболочки), позволяющий получить зависимости снижения критической нагрузки для различных оболочек из железобетона, находящихся под действием долго длящихся нагрузок.

Получаемые в результате вычислительных экспериментов данные позволят для каждого данного вида оболочки посредством рационального выбора их конструктивных параметров (толщины, кривизны, жесткости подкреплений и т.п.) проектировать заведомо прочные и устойчиво работающие оболочечные железобетонные конструкции.

Предлагаемая методика оценки прочности и устойчивости упомянутых конструкций может найти отражение в инструктивной литературе.

Литература

1. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
3. Климанов В. И., Тимашев С. А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. – Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.
4. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования: Учебное пособие / Карпов В. В., Игнатъев О. В., Сальников А. Ю. – М. : АСВ; СПб. : СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
5. Жгутов В. М., Карпов В. В. Анализ развития деформаций ползучести в материале пологих оболочек при длительном нагружении // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды: Международная конференция: Материалы международной конференции. Саратов, 27 августа – 1 сентября 2007 г., Саратов. гос. ун-т / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов : Изд-во Саратов. гос. ун-та, 2007. С. 121-124.
6. Жгутов В. М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17: Санкт-Петербург, 2004. –177 с.
7. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4.– С. 20-23.
8. Жгутов В. М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. – СПб. : Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. С.110-131.
9. Жгутов В. М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М. : Изд-во РУДН, 2008. С. 341-346.
10. Жгутов В. М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009.– №7. С. 46-54.
11. Жгутов В. М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале пологих ребристых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1. С. 4-12.
12. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010.– № 2.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург
Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitez@mail.ru*