Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины

К.т.н., профессор Р.А. Абдикаримов*,
Ташкентский финансовый институт;
К.т.н. В.М. Жгутов,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

В последние годы в инженерной практике все большее применение находят новые композиционные материалы. Проектирование и последующее создание легких, но вместе с тем прочных и надежных конструкций требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел, а также разработки новых интегральных методов их расчета с учетом проявления реальных свойств конструкционных материалов, из которых одним из основных является свойство ползучести (вязкоупругости).

Тонкостенные элементы современных конструкции в виде пластин и оболочек предназначены для работы под воздействием силовых нагрузок (которые могут быть как статическими, так и динамическими). Для придания в нужных местах большей жесткости профиль тонких пластин или оболочек может иметь плавные утолщения. Следовательно, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной (точнее, гладко-переменной) толщины. Зачастую в тонкостенных элементах возникают достаточно большие прогибы (даже при не очень значительных воздействиях). При длительных нагрузках в материале пластин и оболочек может проявиться свойство ползучести (вязкоупругости), что приведет к существенному снижению их несущей способности.

Расчеты на прочность, колебания и устойчивость описанных конструкций играют важную роль при проектировании современных зданий и сооружений.

Таким образом, для получения более адекватной картины напряженно-деформированного состояния (НДС) указанных элементов необходимо проводить исследования в геометрически нелинейной постановке и с учетом вязкоупругих свойств материала одновременно (что связано с большими математическими и вычислительными трудностями).

Исследованию устойчивости оболочек постоянной и ступенчато-переменной толщины (ребристых оболочек) в геометрически нелинейной постановке при учете ползучести материала посвящены работы В.М. Жгутова [1–13]. В работах Р.А. Абдикаримова [14–16, 23–25] рассмотрены аналогичные задачи о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих изотропных пластин и оболочек переменной толщины.

Однако при оптимальном проектировании неизбежно возникает вопрос учета также и ортотропных свойств материала конструкции.

Тем не менее, поведение ортотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины при совместном учете отмеченных важных факторов в настоящее время исследовано недостаточно и требует дальнейшего изучения.

В свете изложенного разработка новых математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов решения нелинейных динамических задач о колебаниях и устойчивости ортотропных вязкоупругих систем с переменной жесткостью представляется актуальной и важной.

Рассмотрим сначала пологую оболочку на прямоугольном плане. Срединную поверхность оболочки толщины h принимаем за отсчетную поверхность $z=0$. Координатные линии x и y криволинейной ортогональной системы координат направляем по линиям кривизны, а ось z – по внутренней нормали срединной поверхности так, чтобы система координат x, y, z была право-ориентированной. (Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на срединной поверхности не имеет особенностей).

Толщину оболочки задаем с помощью функции $h = h(x, y) \in C^k$. [Принадлежность функции классу гладкости C^k означает, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно (запись $h(x, y) \in C^0$ требует только непрерывности по совокупности аргументов)].

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее контура.

Основываясь на кинематической гипотезе Кирхгофа-Лява, будем совместно учитывать геометрическую нелинейность и возможность развития деформации ползучести (вязкоупругости) в материале.

Для описания процесса ползучести используем линейный вариант наследственной ползучести (широко применяемый в механике полимеров и для нестареющего бетона), представляющий собой частный случай теории упругоползучего тела.

Известно, что математическая модель деформирования оболочки (или пластины) включает в себя геометрические соотношения (выражения деформаций через перемещения), физические соотношения (связь напряжений и деформаций), а также функционал полной энергии деформации (или действия), условие стационарности которого эквивалентно уравнениям равновесия или движения.

Геометрические соотношения в срединной поверхности $z=0$ получаются с помощью операции ковариантного дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

где ε_x, ε_y и γ_{xy} – деформации удлинения вдоль осей x, y и сдвига в касательной плоскости (dx, dy); u, v и w – компоненты вектора перемещений (перемещения) точек вдоль осей x, y и z соответственно; $k_x = 1/R_1$ и $k_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно.

Деформации в слое $z \neq 0$, эквидистантном срединной поверхности, вычисляем по формулам [2, 4, 5]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \; \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \; \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где $\chi_1 = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\chi_2 = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$; $2\chi_{12} = -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ – суть функции изменении кривизны и кручения.

Физические соотношения для ортотропных материалов в соответствии с линейным вариантом наследственной ползучести примем в виде [17–19]:

$$\sigma_x = B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\varepsilon_x^z + B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\varepsilon_y^z, \; \sigma_y = B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\varepsilon_y^z + B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\varepsilon_x^z, \; \sigma_{xy}^z = B\left(1-\Gamma^*\right)\gamma_{xy}^z. \quad (2)$$

Здесь:

1) $\Gamma_{11}^*, \Gamma_{12}^*, \Gamma_{21}^*, \Gamma_{22}^*, \Gamma^*$ – интегральные операторы интегральных уравнений вида:

$$\Gamma_{11}^*\varphi(t) = \int_0^t \Gamma_{11}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \qquad \Gamma_{12}^*\varphi(t) = \int_0^t \Gamma_{12}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\Gamma_{21}^*\varphi(t) = \int_0^t \Gamma_{21}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \qquad \Gamma_{22}^*\varphi(t) = \int_0^t \Gamma_{22}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \qquad (3)$$

$$\Gamma^*\varphi(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

где $\Gamma_{11}(t-\tau)$, $\Gamma_{12}(t-\tau)$, $\Gamma_{21}(t-\tau)$, $\Gamma_{22}(t-\tau)$, $\Gamma(t-\tau)$ – ядра релаксации (соответствующие одноосному напряженному состоянию); t – время, τ – переменная интегрирования (имеющая смысл времени);

2) B_{11}, B_{12}, B_{22}, B – упругие постоянные, выраженные через технические постоянные [19]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}, \; B_{12} = \frac{\mu_2 E_1}{1-\mu_1\mu_2} = \frac{\mu_1 E_2}{1-\mu_1\mu_2} = B_{21}, \; B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}, \; 2B = G,$$

где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона (при этом $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$); G – модуль сдвига.

Интегрируя напряжения (2) по переменной z в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получаем выражения для внутренних силовых факторов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения:

- усилия растяжения (сжатия) и сдвига

$$N_x = B_{11}h\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\varepsilon_x + B_{12}h\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\varepsilon_y, \quad N_y = B_{21}h\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\varepsilon_x + B_{22}h\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\varepsilon_y, \quad (3)$$

$$N_{xy} = 2B\ h\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy};$$

- изгибающие и крутящий моменты [17]

$$M_x = \frac{h^3}{12}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\chi_1 + B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\chi_2\right], \quad M_y = \frac{h^3}{12}\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\chi_1 + B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\chi_2\right] \quad (4)$$

$$M_{xy} = \frac{Bh^3}{6}\left(1-\Gamma^*\right)\chi_{12}.$$

Известно, что в случае геометрически нелинейных вязкоупругих задач для оболочек уравнения равновесия или движения, записанные в усилиях и моментах, имеют тот же вид, что и в случае геометрически линейных упругих задач [9, 10, 20, 21].

Поставим выражения (3) и (4) в известные уравнения движения оболочки [9, 10, 22]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \quad (5)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + N_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) + q - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где p_x, p_y и q – компоненты внешней механической нагрузки (являющиеся не только функциями внутренних координат x и y, но и времени t); ρ – плотность материала оболочки (считающаяся неизменной в процессе деформирования).

В результате получим следующую систему уравнений

$$h\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x} + 2B\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right] +$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\varepsilon_x + B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\varepsilon_y\right] + 2B\frac{\partial h}{\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy} - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$h\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} + 2B\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right] +$$

$$+2B\frac{\partial h}{\partial x}\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y}\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\varepsilon_x + B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\varepsilon_y\right] - \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$D\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(8B\ \left(1-\Gamma^*\right) + B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right) + B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} +\right.$$

$$\left.+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) +$$

$$+2\frac{\partial D}{\partial x}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right) + 4B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right] +$$

$$+2\frac{\partial D}{\partial y}\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right) + 4B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right] + \quad (6)$$

$$+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\left(B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+8\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}B\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-$$

$$-hk_x\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\varepsilon_x+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\varepsilon_y\right\}-hk_y\left\{B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\varepsilon_x+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\varepsilon_y\right\}-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\left\{h\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+2B\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial h}{\partial x}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\varepsilon_x+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\varepsilon_y\right]+2B\frac{\partial h}{\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy}\right\}-$$

$$-h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\varepsilon_x+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\varepsilon_y\right]-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\left\{h\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+2B\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right]+\right.$$

$$\left.+2B\frac{\partial h}{\partial x}\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy}+\frac{\partial h}{\partial y}\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\varepsilon_x+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\varepsilon_y\right]\right\}-$$

$$-h\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\varepsilon_x+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\varepsilon_y\right]-4h\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}B\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\,,$$

где $D=\dfrac{h^3}{12}$.

Уравнению (6) целесообразно придать следующий вид:

$$h\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\left[k_xB_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_yB_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\right]\frac{\partial w}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left[B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\right]\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x}\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\left[k_xB_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_yB_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\right]w\right\}+2\frac{\partial h}{\partial y}B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;$$

$$h\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\left[k_xB_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+k_yB_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\partial h}{\partial x}B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-\left[k_yB_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)+k_xB_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right]w\right\}-\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0;$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{h^3}{12}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(8B\left(1-\Gamma^*\right)+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\right.\\
&\left.+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+\frac{1}{4}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\left(B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\\
&+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+4B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial h}{\partial y}\times\\
&\times\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+4B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+\frac{1}{4}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]\times\\
&\times\left(B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left[2h\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\right]2B\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\\
&-h\left\{\left(k_x B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_y B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(k_x B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+k_y B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\right.\\
&-\left(k_x^2 B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_x k_y B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+k_x k_y B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+k_y^2 B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\right)w+\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(k_x B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_y B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(k_x B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+k_y B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}-\\
&-\frac{\partial w}{\partial x}\left\{h\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\left(k_x B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_y B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\right.\right.\\
&\left.+\left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+\\
&+\frac{\partial h}{\partial x}\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\right.\\
&\left.\left.-\left(k_x B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_y B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\right)w\right\}+2\frac{\partial h}{\partial y}B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}-\\
&-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\right.\\
&\left.-\left(k_x B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)+k_y B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\right)w\right\}-\frac{\partial w}{\partial y}\left\{h\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\right.\right.\\
&-\left(k_x B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+k_y B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\\
&\left.+B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]+2\frac{\partial h}{\partial x}B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\\
&+\frac{\partial h}{\partial y}\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-\right. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$-\left(k_y B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)+k_x B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)w\Big\}\Big\}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}h\left\{B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$

$$-\left(k_y B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)+k_y B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)w\Big\}\Big\}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}h\left\{B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$

$$-4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}hB\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\,.$$

Уравнение (7) описывает движение ортотропной оболочки с переменной жесткостью. Оно учитывает геометрическую нелинейность и возможность развития процесса ползучести (вязкоупругости) в материале оболочки.

Ниже показано, что из уравнения (7), как частные случаи, можно получить уравнения движения ортотропных вязкоупругих пластин, пологих и цилиндрических оболочек как постоянной $(h(x,y)\equiv const)$, так и переменной толщины.

1^0. Для ортотропной вязкоупругой пластины следует положить $k_x=k_y\equiv 0$. Тогда при $h=h(x,y)$ получаем:

$$h\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left[B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\right]\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right\}+\frac{\partial h}{\partial x}\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}+\frac{\partial h}{\partial y}2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,;$$

$$h\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+2B\left(1-\Gamma^*\right)\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}+\frac{\partial h}{\partial x}2B\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial y}\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}-\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\,;$$

$$\frac{h^3}{12}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(8B\left(1-\Gamma^*\right)+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\right.$$

$$\left.+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+\frac{1}{4}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\left(B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^*\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^*\right)+4B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial h}{\partial y}\times$$

$$\times\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^*\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^*\right)+4B\left(1-\Gamma^*\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+\frac{1}{4}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]\times$$

$$\times\left(B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left[2h\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\right]2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\left\{h\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial h}{\partial x}\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}+\frac{\partial h}{\partial y}2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\left\{h\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)+B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)+B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+$$

$$\left.+B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]+\frac{\partial h}{\partial x}B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}- \quad (8)$$

$$\left.\left.-\left(k_y B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)+k_y B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\right)w\right\}\right\}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}h\left\{B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}-4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}hB\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\,.$$

2^0. Для ортотропной вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки (не обязательно пологой!) следует положить $k_x\equiv 0,\ k_y\equiv 1/R$, где R – радиус цилиндра. В этом случае при $h=h(x,y)$ будем иметь

$$h\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{R}B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left[B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right]\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x}\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{1}{R}B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)w\right\}+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial y}2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,;$$

$$h\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{R}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\left[B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x}2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}\left\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{1}{R}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)w\right\}-\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0;$$

$$\frac{h^3}{12}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(8B\left(1-\Gamma^{*}\right)+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\right.$$

$$\left.+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+\frac{1}{4}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\left(B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)+4B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial h}{\partial y}\times$$

$$\times\left[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)+4B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+\frac{1}{4}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]\times$$

$$\times\left(B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left[2h\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\right]2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-$$

$$-h\left\{\frac{1}{R}B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{R^2}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)w+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2R}B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2R}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\left\{h\left[B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{R}B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x}\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{R}B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)w\right\}+\frac{\partial h}{\partial y}2B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\left\{B_{11}\left(1-\Gamma_{11}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\right.$$

$$
-\frac{1}{R}B_{12}\left(1-\Gamma_{12}^{*}\right)w\Bigg\}-\frac{\partial w}{\partial y}\Bigg\{h\Bigg[B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{R}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\left(B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)+B\left(1-\Gamma^{*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+
$$

$$
+B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg]+\frac{\partial h}{\partial x}B\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+
$$

$$
\frac{\partial h}{\partial y}\Bigg\{B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]- \quad (9)
$$

$$
-\frac{1}{R}B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)w\Bigg\}\Bigg\}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}h\Bigg\{B_{21}\left(1-\Gamma_{21}^{*}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+
$$

$$
+B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{1}{R}B_{22}\left(1-\Gamma_{22}^{*}\right)w\Bigg\}-
$$

$$
-4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}hB\left(1-\Gamma^{*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\,.
$$

Таким образом, математические модели динамики ортотропных пластин и оболочек гладко-переменной жесткости при совместном учете геометрической нелинейности и возможном развитии деформаций ползучести (вязкоупругости) построены. Они описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных вида (7) – (9). Соответствующие начальные и граничные условия предполагаются заданными.

Литература

1. Жгутов В. М., Карпов В. В. Анализ развития деформаций ползучести в материале пологих оболочек при длительном нагружении // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды: Международная конференция: Материалы международной конференции. Саратов, 27 августа – 1 сентября 2007 года, Сарат. гос. ун-т / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2007. – 316 с. – С.121–124.
2. Жгутов В. М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4.– С.20-23.
3. Жгутов В. М. Уравнения в смешанной форме для ребристых пологих оболочек при учете ползучести материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. – № 2. – С. 63–67.
4. Жгутов В. М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. – 267 с. – С.110-131.
5. Жгутов В. М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 380 с. – С.341-346.
6. Жгутов В. М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. – М.: МОО «Пространственные конструкции», 2009.– С. 34–45.

7. Жгутов В. М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – С. 46–54.
8. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале пологих ребристых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1. – С. 4 –12.
9. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 1. – С. 47–54.
10. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II // Инженерно-строительный журнал.– 2010. – № 2. – С. 45–48.
11. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010.– № 2. – С. 53–59.
12. Жгутов В. М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при длительных нагрузках // Популярное бетоноведение. – 2010. – № 2. – С 38–46.
13. Жгутов В. М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках // Инженерно-строительный журнал. – 2010.– № 5. – С. 46 – 54.
14. Верлань А. Ф., Абдикаримов Р. А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. Т. 32. – Киев, 2010 – С. 3-14.
15. Абдикаримов Р. А. Численное исследование нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью // Проблемы архитектуры и строительства. – Самарканд, 2010. – №1. – С. 37-42.
16. Абдикаримов Р. А. Математическая модель нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью при различных граничных условиях // Проблемы архитектуры и строительства. – Самарканд, 2010. – № 1. – С.44-47.
17. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
18. Колтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. – 1966. – №4. – С. 483–488.
19. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. – М. : Изд–во МГУ, 1967. – 352 с.
20. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
21. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
22. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М. : Наука. – 1972. – 432 с.
23. Abdikarimov R. A. Deterministic Simulations of Nonlinear Vibration of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March/April 2010, Seismological Research Letters.Vol.81, N.2, pp.343.
24. Abdikarimov R. A., Khodzhaev D. A. Deterministic Calculation of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March/April 2010, Seismological Research Letters. Vol. 81, N.2, pp.343.
25. Bykovtsev A. S., Abdikarimov R. A., Bobanazarov Sh.P., Khodzhaev D.A. Nonlinear Vibration and Dynamic Stability of High-Rise Special Structure // 2010 SCEC Annual Meeting, USA, September 11-15, 2010, Proceedings and Abstracts. Volume XX, pp.199-200.

** Рустамхан Алимханович Абдикаримов, г. Ташкет, Узбекистан*

Тел. раб.: (+99371)234-66-41; эл. почта: rabdikarimov@mail.ru