

Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи)

*К.т.н., профессор Р.А. Абдикаримов,
Ташкентский финансовый институт;*

К.т.н В.М. Жгутов;*

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Тонкостенные пластины и оболочки широко применяются в современном строительстве в качестве элементов как ограждающих, так и несущих конструкций, предназначенных для работы под воздействием значительных силовых нагрузок. Указанные нагрузки могут быть и статическими, и динамическими.

С целью обеспечения в нужных местах требуемой жесткости тонкие пластины или оболочки могут быть подкреплены ребрами, а могут иметь и плавные утолщения. Следовательно, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной (гладко-переменной или же ступенчато-переменной) толщины. Подкрепление пластин или оболочек ребрами делает, как правило, их профили асимметричными. Зачастую асимметрия профилей может иметь место и в случаях их плавных утолщений.

Известно, что тонкостенные элементы допускают достаточно большие прогибы (даже при нагрузках, далеких от своих критических значений). При долго длящихся нагрузках в материале пластин и оболочек может проявиться свойство ползучести (вязкоупругости), что приведет к существенному снижению их несущей способности.

Вне сомнения, что расчеты на прочность, колебания и устойчивость описанных конструкций играют важную роль при проектировании современных зданий и сооружений.

Таким образом, для получения более реальной картины напряженно-деформированного состояния (НДС) указанных элементов в виде пластин и оболочек необходимо проводить исследования в геометрически нелинейной постановке при совместном учете влияния асимметрии их профилей, а также возможного проявления вязкоупругих свойств материала.

Исследованию устойчивости оболочек постоянной и ступенчато-переменной толщины (асимметричные случаи) в геометрически нелинейной постановке при учете ползучести материала посвящены работы В.М. Жгутова [1–13]. В работах Р.А. Абдикаримова [14–16, 28–29], а также совместной работе Р.А. Абдикаримова и В.М. Жгутова [17] рассмотрены аналогичные задачи о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих пластин и оболочек гладко-переменной толщины (симметричные случаи).

Тем не менее, поведение асимметричных пластин и оболочек гладко-переменной толщины при совместном учете геометрической нелинейности и вязкоупругих свойств материала в настоящее время исследовано недостаточно и требует дальнейшего изучения.

В свете изложенного разработка новых математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов решения нелинейных динамических задач о колебаниях и устойчивости вязкоупругих систем с гладко-переменной жесткостью (асимметричные случаи) представляется актуальной и важной.

Рассматриваем пологие оболочки на прямоугольном плане (в частности, пластины), а также круговые цилиндрические оболочки.

Некоторую внутреннюю поверхность оболочки принимаем за отсчетную поверхность $z = 0$. Координатные линии x и y криволинейной ортогональной системы координат направляем по линиям кривизны, а ось z – по внутренней нормали отсчетной поверхности.

Толщину оболочки задаем ограничивающими ее (в нормальном направлении) гладкими поверхностями $z_B = z_B(x, y)$ и $z_H = z_H(x, y)$ (рис. 1).

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее контура.

Основываясь на кинематической гипотезе Кирхгофа-Лява, учитываем совместно геометрическую нелинейность и возможность развития деформации ползучести (вязкоупругости) в материале. Для описания процесса ползучести используем линейный вариант наследственной теории ползучести.

Математическую модель деформирования оболочки (пластины) понимаем как совокупность:

- геометрических соотношений (выражений деформаций через перемещения);
- физических соотношений (связи напряжений и деформаций);
- функционала полной энергии деформации (или действия), условие стационарности которого эквивалентно уравнениям равновесия или движения.

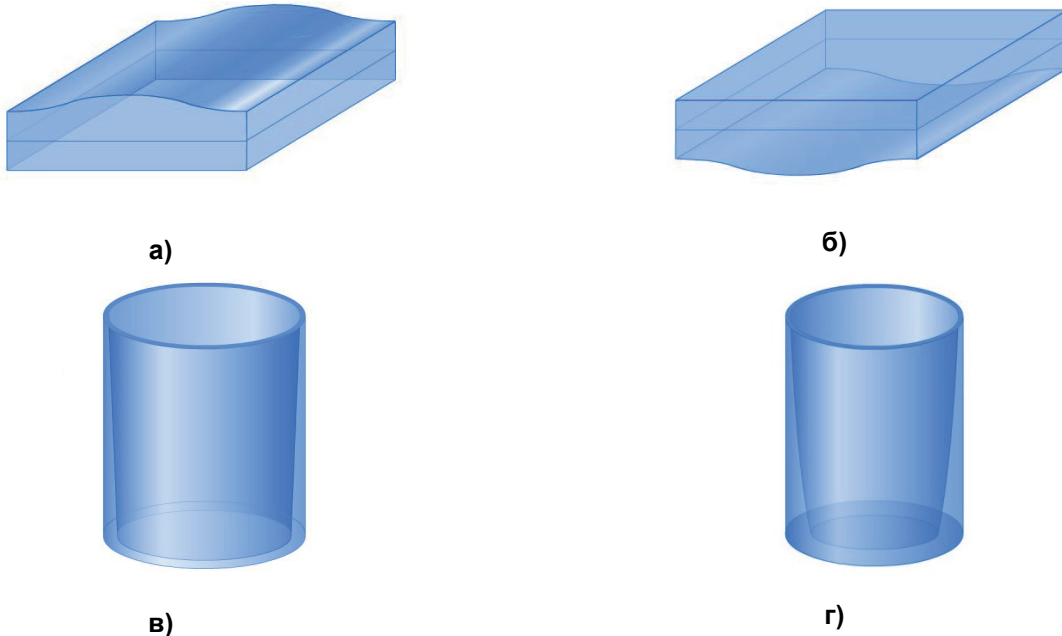


Рисунок 1. Примеры пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи):
а) и б) – пологие оболочки (в частности, пластины);
в) и г) – круговые цилиндрические оболочки.

Геометрические соотношения в отсчетной поверхности $z = 0$ с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

где ε_x , ε_y и ε_{xy} – деформации удлинения вдоль осей x , y и сдвига в касательной плоскости (dx , dy); u , v и w – компоненты вектора перемещений (перемещения) точек вдоль осей x , y и z соответственно; $k_x = 1/R_1$ и $k_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно.

В случае пластины в соотношениях (1) следует положить $k_x = k_y \equiv 0$; для круговой цилиндрической оболочки (не обязательно полой) $k_x \equiv 0$, $k_y \equiv 1/R$, где R – радиус цилиндра.

Деформации в слое $z \neq 0$ вычисляем по формулам [2, 4, 5]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \varepsilon_{xy}^z = \varepsilon_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где $\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $2\chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ суть функции изменения кривизны

$[\chi_1 = \chi_1(x, y), \chi_2 = \chi_2(x, y)]$ и кручения $[\chi_{12} = \chi_{12}(x, y)]$.

Физические соотношения в соответствии с линейным вариантом наследственной теории ползучести для изотропных материалов примем в виде [18–20]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(1-\Gamma^*)\varepsilon_{xy}^z, \quad (2)$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

Γ^* – интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$, такой, что $\Gamma^* \varepsilon = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau$;

t – время наблюдения; τ – переменная интегрирования (время, предшествующее моменту наблюдения).

Интегрируя напряжения (2) по переменной z в пределах от $z_B = z_B(x, y)$ до $z_H = z_H(x, y)$, получаем выражения для внутренних силовых факторов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения:

- усилия растяжения (сжатия) и сдвига

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{z_B}^{z_H} \sigma_x dz = \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} [A_0(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + A_1(\chi_1 + \mu\chi_2)], \\ N_y &= \int_{z_B}^{z_H} \sigma_y dz = \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} [A_0(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + A_1(\chi_2 + \mu\chi_1)], \quad (3) \\ N_{xy} &= \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{xy} dz = \frac{E(1-\Gamma^*)}{2(1-\mu)} [A_0\varepsilon_{xy} + 2A_1\chi_{12}]; \end{aligned}$$

- изгибающие и крутящий моменты [18]

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{z_B}^{z_H} \sigma_x z dz = \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} [A_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + A_2(\chi_1 + \mu\chi_2)], \\ M_y &= \int_{z_B}^{z_H} \sigma_y z dz = \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} [A_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + A_2(\chi_2 + \mu\chi_1)], \quad (4) \\ M_{xy} &= \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{xy} z dz = \frac{E(1-\Gamma^*)}{2(1-\mu)} [A_1\varepsilon_{xy} + 2A_2\chi_{12}]. \end{aligned}$$

В формулах (3) и (4) $A_0 = \int_{z_B}^{z_H} dz$, $A_1 = \int_{z_B}^{z_H} z dz$ и $A_2 = \int_{z_B}^{z_H} z^2 dz$ – погонные площадь поперечного

(продольного) сечения оболочки, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно.

Как известно, в случае геометрически нелинейных вязкоупругих задач для оболочек уравнения равновесия или движения, записанные в усилиях и моментах, имеют тот же вид, что и в случае геометрически линейных упругих задач [9, 10, 21, 22].

Поставим выражения (3) и (4) в известные уравнения движения оболочки [9, 10, 18, 23, 24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) &+ \quad (5) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

где $p_x = p_x(x, y, t)$, $p_y = p_y(x, y, t)$ и $q = q(x, y, t)$ – компоненты внешней механической нагрузки;

ρ – плотность материала оболочки (считаем, что в процессе деформирования $\rho \approx const$).

В результате (полагая $p_x = p_x = 0$, $q \neq 0$) получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_0}{\partial x} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \varepsilon_{xy} - \right. \\
 & \left. - A_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\mu) \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} - \rho A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial A_0}{\partial y} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) - \right. \\
 & \left. - A_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - (1-\mu) \frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} - \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad (6) \\
 & \frac{E(1-\Gamma^*)}{1+\mu} \left\{ A_1 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + (1-\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
 & \quad + 2 \frac{\partial A_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_x) + (1-\mu) \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} \varepsilon_{xy} - \\
 & \quad - \left[A_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{\partial A_2}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \right] \left. \right\} - \\
 & - \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ k_x \left[A_0 (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + k_y \left[A_0 (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right\} - \\
 & - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_0}{\partial x} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \varepsilon_{xy} - \right. \\
 & \quad - A_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\mu) \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right\} - \\
 & - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial A_0}{\partial y} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) - \right. \\
 & \quad - A_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - (1-\mu) \frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right\} - \\
 & \quad - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left[A_0 (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \\
 & \quad - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left[A_0 (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \\
 & \quad - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left[A_0 \varepsilon_{xy} - 2 A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
 \end{aligned}$$

С учетом (1) система уравнений (6) примет вид

$$\begin{aligned}
 & (1-\Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial A_0}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - (k_x + \mu k_y) w + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \right. \\
 & \left. - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - (1-\mu) \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
 & (1-\Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial A_0}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - (k_y + \mu k_x) w + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - (1-\mu) \frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad (7) \\
 & (1-\Gamma^*) \left\{ A_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial A_2}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - A_1 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (1+\mu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial A_1}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial A_1}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_y + \mu k_x) w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + (1-\mu) \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} - (1-\Gamma^*) \left\{ A_0 \left[(k_x + \mu k_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (k_y + \mu k_x) \frac{\partial v}{\partial y} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) w + \frac{k_y + \mu k_x}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - A_1 \left[(k_x + \mu k_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (k_y + \mu k_x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left. \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (1 - \Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\
 & - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left. \right\} - \frac{\partial w}{\partial x} (1 - \Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
 & + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] + \frac{\partial A_0}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right] + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - A_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \\
 & - \frac{\partial A_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1 - \mu) \frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (1 - \Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} - (k_y + \mu k_x) w + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left. \right] - A_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right\} - \frac{\partial w}{\partial y} (1 - \Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\
 & + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] + \\
 & + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_0}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - (k_y + \mu k_x) w + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left. \right] - A_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - (1 - \mu) \frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right\} - \\
 & - (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \Gamma^*) \left\{ A_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - 2 A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} + \frac{1 - \mu^2}{E} \rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1 - \mu^2}{E} q .
 \end{aligned}$$

Следуя [25, 26], можно упростить системы уравнений (6) и (7), введя новую отсчетную поверхность $z_0 = z_0(x, y)$ так удачно, чтобы $A_1 = 0$. В частности, положение поверхности z_0 можно определить из условия:

$$A_1 = \int_{z_B^*}^{z_H^*} z^* dz^* = 0,$$

где $z^* = z - z_0$, $z_H^* = z_H - z_0$, $z_B^* = z_B - z_0$.

Отсюда получим:

$$z_0 = \frac{z_H + z_B}{2}.$$

В этом случае при

$$A_0 = \int_{z_B^*}^{z_H^*} dz^*, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \int_{z_B^*}^{z_H^*} (z^*)^2 dz^* \quad (8)$$

система (6) обретает вид:

$$\frac{E(1 - \Gamma^*)}{1 - \mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_0}{\partial x} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \varepsilon_{xy} \right\} - \rho A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial A_0}{\partial y} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \right\} - \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad (9) \\
& \frac{E(1-\Gamma^*)}{1+\mu} \left[A_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\partial A_2}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
& \quad - \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} A_0 \left[(k_x + \mu k_y) \varepsilon_x + (k_y + \mu k_x) \varepsilon_y \right] - \\
& \quad - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_0}{\partial x} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \varepsilon_{xy} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} \left\{ A_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial A_0}{\partial y} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \right\} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} A_0 (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} A_0 (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2} A_0 \varepsilon_{xy} + \rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
\end{aligned}$$

Система (7) с учетом (8) запишется в виде

$$\begin{aligned}
& (1-\Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial A_0}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - (k_x + \mu k_y) w + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
& (1-\Gamma^*) \left\{ A_0 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial A_0}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - (k_y + \mu k_x) w + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad (10) \\
& (1-\Gamma^*) \left\{ A_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\partial A_2}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \right\} - \\
& \quad - (1-\Gamma^*) A_0 \left[(k_x + \mu k_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (k_y + \mu k_x) \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) w + \frac{k_y + \mu k_x}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
& \quad - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (1-\Gamma^*) A_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial w}{\partial x}(1-\Gamma^*)\left\{A_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(k_x+\mu k_y)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial A_0}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-(k_x+\mu k_y)w+\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right\}- \\
& -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(1-\Gamma^*)A_0\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}-(k_y+\mu k_x)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{\partial w}{\partial y}(1-\Gamma^*)\left\{A_0\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-(k_y+\mu k_x)\frac{\partial w}{\partial y}+\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\right. \\
& \left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}-(k_y+\mu k_x)w+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}-(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1-\Gamma^*)A_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1-\mu^2}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1-\mu^2}{E}q.
\end{aligned}$$

Таким образом, математические модели задач динамики изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи) при совместном учете геометрической нелинейности и возможном развитии деформаций ползучести (вязкоупругости) построены. Они описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных вида (6), (7) и (9), (10).

Соответствующие начальные и граничные условия предполагаются заданными.

Литература

1. Жгутов В.М., Карпов В.В. Анализ развития деформаций ползучести в материале пологих оболочек при длительном нагружении // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды: Международная конференция: Материалы международной конференции. Саратов, 27 августа – 1 сентября 2007 года, Саратов. гос. ун-т / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 2007. – С.121–124.
2. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4. – С. 20–23.
3. Жгутов В.М. Уравнения в смешанной форме для ребристых пологих оболочек при учете ползучести материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. – № 2.– С. 63–67.
4. Жгутов В.М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года / Петербургский государственный университет путей сообщения. – СПб., 2008. – 267 с. – С.110–131.
5. Жгутов В.М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // Инженерные системы – 2008: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С.341-346.
6. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. – М.: МОО «Пространственные конструкции», 2009.– С. 34–45.
7. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – С. 46 – 54. – Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – С. 46–54. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2009_07/zhgoutov1.html.

Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи)

8. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале пологих ребристых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1. – С. 4–12.
9. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 1. – С. 47–54. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov.html.
10. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 2. – С. 45–48. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov2.html.
11. Жгутов В.М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010.– № 2. – С. 53–59.
12. Жгутов В.М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при длительных нагрузках // Популярное бетоноведение. – 2010. – № 2. – С 38–46.
13. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках // Инженерно-строительный журнал. – 2010.– № 5. – С. 46 – 54. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_05/zhgoutov.html.
14. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование.– 2010. – Т. 32. – С.3–14.
15. Абдикаримов Р.А. Численное исследование нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью // Проблемы архитектуры и строительства. – 2010. – №1. – С.37–42.
16. Абдикаримов Р.А. Математическая модель нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью при различных граничных условиях // Проблемы архитектуры и строительства. – 2010. – №1. – С.44–47.
17. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 6. – С. 38–47. Доступ из сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_06/abdikarimov.html.
18. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
19. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. – 1966. – №4. – С. 483–488.
20. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. – М. : Изд-во МГУ, 1967. – 352 с.
21. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
22. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
23. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М. : Наука. – 1972. – 432 с.
24. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М. : Высшая школа, 1976. – 276 с.
25. Абросимов А.А., Филиппов В.Н. Исследование НДС пластин переменной толщины в геометрически нелинейной постановке с разными системами аппроксимирующих функций // Прикладная математика и механика: Сборник научных трудов Ульяновского гос.-техн. университета. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – С. 3–8.
26. Добрюха Н.А., Абросимов А.А., Айрапетьянц Г.А. Исследования напряженно-деформируемого состояния гибких пологих оболочек с разными системами аппроксимирующих функций // Молодые ученые – науке и производству: Материалы конференции молодых ученых. Саратов, Саратовский гос.-техн. университет, июнь 2007 года. – Саратов, 2007. – С. 51–53.
27. Abdikarimov R.A. Deterministic Simulations of Nonlinear Vibration of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March-April 2010. Seismological Research Letters. – Vol.81. – №2. –343 p.
28. Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A. Deterministic Calculation of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March/April 2010, Seismological Research Letters. – Vol.81. – №2. –343 p.
29. Bykovtsev A.S., Abdikarimov R.A., Bobanazarov Sh.P., Khodzhaev D.A. Nonlinear Vibration and Dynamic Stability of High-Rise Special Structure // 2010 SCEC Annual Meeting, USA, September 11-15, 2010, Proceedings and Abstracts. – Volume XX. – Pp.199–200.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru