

## Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды

*К.т.н., доцент Р.А. Абдикаримов\*,  
Ташкентский финансовый институт;*

*Д.т.н., профессор Х. Эшматов;*

*К.т.н., доцент Ш.П. Бобаназаров;*

*К.ф.-м.н., доцент Д.А. Ходжаев;*

*К.ф.-м.н., научный исследователь Б.Х. Эшматов,  
Ташкентский институт ирригации и мелиорации*

**Ключевые слова:** гидротехническое сооружение, бетонная плотина, сейсмическая нагрузка, гидродинамическое давление воды, вязкоупругость, нелинейные колебания, интегро-дифференциальные уравнения, метод Бубнова-Галеркина, ядро релаксации.

В Узбекистане имеется ряд водохранилищ, устроенных в долинах рек путем возведения водоподпорных сооружений, для накопления и хранения воды в целях её использования в народном хозяйстве. Примером могут служить такие водохранилища, как Чарвакское, Пачкамарское, Каракумское, Андижанское и т.д. Большинство из них сооружены из грунта, а откосы укреплены бетонными плитами. Андижанское водохранилище является контрфорсной бетонной плотиной арочной формы. Проблема обеспечения сейсмостойкости таких сооружений при проектировании и строительстве в сейсмических районах является весьма актуальной, так как опыт разрушительных землетрясений показал, что сооружения типа плотин, построенные без учета сейсмического фактора, нередко подвергались частичному или полному разрушению [1]. При сейсмических воздействиях основание может приходить в движение, поэтому при динамическом расчете массивных и бетонных сооружений приходится рассматривать движение плотины и жидкости совместно, как единую механическую систему. Большое значение также имеет учет гидродинамической нагрузки воды, возникающей при землетрясении.

В литературе имеется ряд работ, посвященных решению рассматриваемой проблемы. В работе [1] исследуется вопрос о давлении воды на наклонную напорную грань плотины, совершающую поступательные горизонтальные колебания. В этой работе учтено влияние вертикальной компоненты сейсмического движения основания. Вода принята несжимаемой, невязкой, а плотина – абсолютно жесткой. Волновым характером воды на свободной поверхности пренебрегают. Инерционное влияние жидкости не изучается.

В работе [2] излагаются основные положения теории сейсмостойкости упругой системы в воде, приводится общий ход решения задачи для определения частот собственных колебаний с учетом совместной работы плотины и воды, как единой системы. При моделировании данной задачи принято допущение о малой величине и линейности деформаций сооружений.

Работы [3,4] посвящены исследованию динамического давления жидкости на жесткую плотину с вертикальной напорной гранью при землетрясении. Принято, что плотина совершает простые гармонические колебания с заданной начальной скоростью. В постановке задачи имеются существенные отличия по отношению к указанным выше работам. В [3] принято, что в начальный момент времени плотина мгновенно получает начальную скорость, а затем совершает гармоническое горизонтальное колебание. Учитываются волновые движения на поверхности жидкости. Условие на напорной грани составлено с учетом перемещений плотины при колебаниях от первоначального положения покоя. В работе [4] считается, что в начальный момент времени дно так же, как и напорная вертикальная грань плотины, имеет некоторую начальную вертикальную скорость, а затем совершает вертикальные колебания.

Известно, что надежность и безопасность гидротехнических сооружений, в первую очередь, зависят от возникающего в конструкции НДС при различных нагрузках. В свою очередь, определение характера и величины НДС позволяет получить полную информацию о прочности сооружений. Вопросы, посвященные решению этих проблем, рассматривались в работах различных авторов дальнего зарубежья, стран СНГ и нашей республики. Среди работ ученых нашей республики следует отметить работу [5].

В работе [6] предпринята попытка найти наиболее точный метод для анализа бетонных плотин с помощью двух элементов: временного анализа и частотного анализа данных в программном обеспечении ANSYS. В этой работе бетонная плотина с коллектором рассматривается как ограниченный коллектор и моделируется с учетом соответствующих граничных условий.

Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды

В работе [7] предложен новый подход к динамическому анализу системы «бетонная гравитационная плотина – коллектор» на основе метода несвязанных модальных анализов данных во времени. В ней первоначально описывается метод, а плотина анализируется как пример для проверки, который показывает эффективность предложенного метода.

Работа [8] посвящена развитию теории железобетона в направлении разработки новых и совершенствования существующих методов расчета напряженного состояния и прочности массивных железобетонных и напорных сталежелезобетонных конструкций гидротехнических сооружений на основе единого методологического подхода.

Отметим, что во всех вышеуказанных работах материал массивных и бетонных плотин считается упругим. Но, как показывают многочисленные экспериментальные и фундаментальные исследования, большинство материалов, к которым также относится бетон, обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [9]. Следовательно, при динамических расчетах гидротехнических сооружений, необходимо учитывать ряд факторов: характер движения основания при землетрясении, влияние жидкости, свойства материала и т.д.

Продолжительность и дороговизна экспериментальных исследований, невозможность проведения опытов для изучаемого объекта вызывают необходимость теоретических исследований. Становятся актуальными математическое и компьютерное моделирование задач динамики гидротехнических сооружений с учетом сейсмической нагрузки, гидродинамического давления воды и вязкоупругих свойств материала конструкций. Использование мощных компьютеров позволяет внедрять численные методы расчета в практику проектирования сооружений.

Современные компьютеры имеют очень высокую скорость выполнения операций при практически неограниченной оперативной памяти. Становятся возможными расчеты все более сложных задач, к которым относятся расчеты динамики гидротехнических сооружений. Это служит стимулом для разработки новых численных методов.

Вместе с тем, для эффективного проведения вычислительного эксперимента, необходимо на основе численных методов разработать алгоритм и комплекс прикладных программ для численного решения поставленных задач. В связи с этим в качестве основной задачи работы выбрана разработка и реализация алгоритма и комплекса прикладных программ для расчета динамики гидротехнических сооружений, описываемых системами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

### Постановка задачи

При проектировании гидротехнических сооружений часто встречаются элементы плотин типа «пластины конечной длины», например затворы, напорные перекрытия. Особенности расчета гидротехнических сооружений на сейсмостойкость связаны с необходимостью учета влияния водной среды, наличие которой приводит к дополнительному гидродинамическому давлению воды на напорные грани, изменению частот и форм собственных колебаний конструкции, что, в итоге, может существенно сказаться на НДС сооружений.

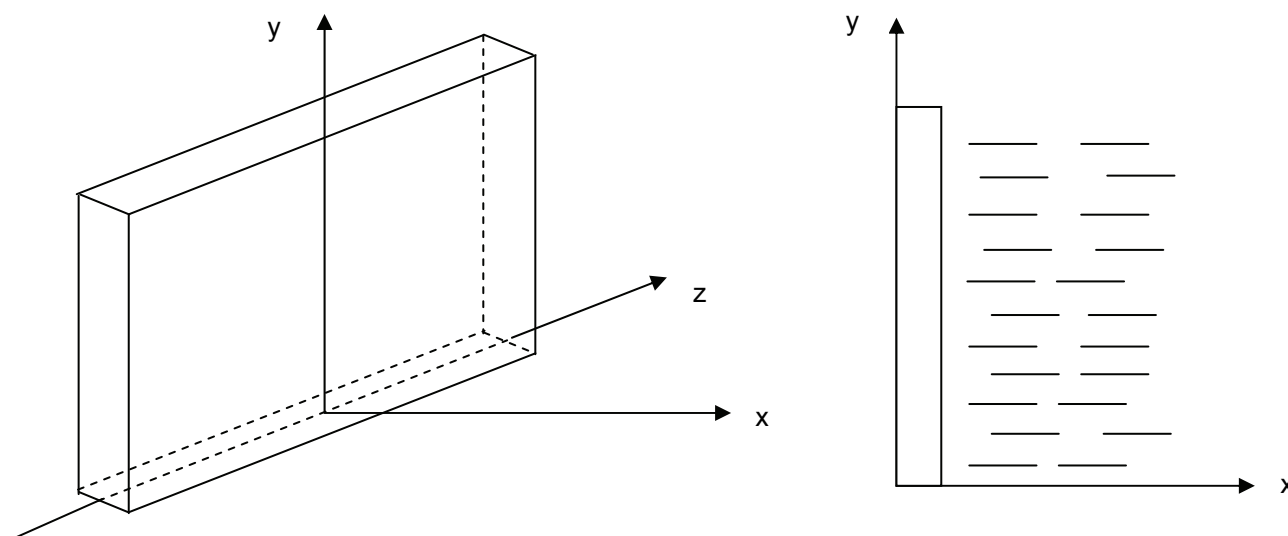


Рисунок 1. Схема расчета плотины-пластины

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях плотины-пластины, изготовленной из вязкоупругого изотропного материала. Плотину-пластину поместим в прямоугольной системе координат  $x y z$  в плоскости  $y O z$  (рис. 1). Считаем, что плотина-пластина имеет постоянную толщину  $h$ , и что на нее действуют силы инерции, возникающие от движения и деформации плотины, а также, гидродинамическое давление воды, возникающее от движения плотины как твердого тела и деформации плотины.

Выведем уравнение движения плотины-пластины с учетом вязкоупругих свойств материала и геометрической нелинейности по гипотезе Кирхгофа-Лява.

Физическую зависимость между напряжениями  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  и деформациями  $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$  срединной поверхности запишем в следующем виде [9, 10]:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z), \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_y),$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}(1-\Gamma^*)\gamma_{yz},$$
(1)

где  $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\Gamma^*$  – интегральный оператор с ядром релаксации

$$\Gamma(t): \Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

Связь между деформациями в срединной поверхности  $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$  и перемещениями  $u, v, w$  направлениям  $y, z, x$  примем в виде [11]:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}.$$
(2)

Изгибающие и крутящие моменты  $M_y, M_z$  и  $H$  элемента пластины имеют вид [7, 8]:

$$M_y = -D(1-\Gamma^*)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \quad M_z = -D(1-\Gamma^*)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$H = -D(1-\mu)(1-\Gamma^*)\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z},$$
(3)

где  $D$  – цилиндрическая жесткость.

При выводе уравнения движения будем исходить из следующей системы уравнений [11]:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yz}}{\partial z} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left( N_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + N_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$
(4)

Здесь  $N_y, N_z$  и  $N_{yz}$  – усилия, отнесенные к единице длины сечения пластины:

$$N_y = \sigma_y h, \quad N_z = \sigma_z h, \quad N_{yz} = \tau_{yz} h,$$
(5)

где  $q$  – гидродинамическое давление воды, которое определяется на основе результатов [2].

С учетом вышеперечисленных сил, действующих на плотину-пластину, подставляя (3) и (5) в уравнения (4) и вводя функцию напряжений  $\Phi$  в срединной поверхности по формулам

$$\sigma_y = \frac{N_y}{h} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{N_z}{h} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{yz} = \frac{N_{yz}}{h} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z},$$

получаем интегро-дифференциальное уравнение движения плотины-пластины относительно функции прогиба  $w = w(y, z, t)$  и функции напряжений  $\Phi = \Phi(y, z, t)$  следующего вида:

$$D(1 - \Gamma^*) \nabla^4 w(y, z, t) + \rho h \frac{\partial^2 (w + s_0)}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0} - \rho_0 \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \Big|_{x=s_0(t)} = L(w, \Phi), \quad (6)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} (1 - \Gamma^*) L(w, w),$$

где  $s_0(t)$  – закон движения основания при землетрясении;  $\rho$  – плотность материала плотины;

$\rho_0$  – плотность воды;  $\varphi(x, y, z, t)$  – функция потенциала скоростей движения жидкости, возникающего от деформации плотины-пластины;  $\varphi_0(x, y, t)$  – функция потенциала скоростей движения жидкости от движения

плотины как твердого тела;  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$ ;  $L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)^2 \right]$ ;

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}.$$

Используя работу [2], закон движения основания при землетрясении можно записать в виде:

$$s_0(t) = a_0 e^{-\varepsilon_0 t} \sin \omega_0 t, \quad (7)$$

где  $a_0$  – начальная максимальная амплитуда;  $\varepsilon_0$  – коэффициент затухания грунта;  $\omega_0$  – частота колебаний грунта.

### Выбор ядер релаксации

Для теоретического описания процессов деформирования при колебаниях твердых тел и конструкций с учетом внутреннего трения часто ограничиваются изучением общих закономерностей внешнего проявления механизма диссипации. Гипотезы и линейные модели внутреннего трения нашли широкое применение при решении задач динамики сооружений. Эти гипотезы, отражающие проявление упругих несовершенств материалов, не описывают ползучесть деформаций и релаксацию напряжений, получивших название «наследственных свойств».

Основы современной наследственной теории вязкоупругости, отражающей практически все особенности динамического поведения материала, заложены в работах Больцмана и Вольтерра, о которых подробно изложено в [9]. Наследственная теория вязкоупругости является более общей и точнее описывает реальные свойства материалов [9-13].

Интегральная модель с экспоненциальными ядрами наследственности эквивалента дифференциальной модели, определяющей связи между напряжениями и деформациями. Поэтому вопрос выбора ядра наследственности для формирования интегральных моделей, обеспечивающих принципиально допустимую адекватность отображения зависимости между напряжениями и деформациями в материалах с вязкоупругими свойствами, является одним из важных моментов построения математических моделей рассматриваемых задачи.

Во многих работах при решении инженерных задач часто применяют экспоненциальные ядра

$$\Gamma(t) = A \cdot \exp(-\beta \cdot t),$$

или ядра в виде сумм экспонент

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(\beta_i \cdot t).$$

Выбор ядра релаксации в виде экспоненциальных или сумм экспонент в начальный момент времени ( $t = 0$ ) имеют конечные значения, так как при этом не отражаются особенности, наблюдаемые в начале процессов релаксации [9].

В работе [13] дано простейшее ядро типа Абеля:

$$\Gamma(t) = A \cdot t^{\alpha-1}, \quad A > 0, 0 < \alpha < 1,$$

где  $A$  – параметр вязкости,  $\alpha$  – параметр сингулярности, определяемый экспериментом.

Самым распространенным сингулярным ядром наследственности типа Абеля является ядро Колтунова-Ржаницына [9, 13]

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (8)$$

где  $\beta$  – параметр затухания.

От правильного выбора ядра релаксации зависит точность решений. Точность аппроксимаций ядер должна быть проверена путем сопоставления его с экспериментальными кривыми. Существующие трехпараметрические сингулярные ядра наследственности Колтунова-Ржаницына удовлетворяют всем условиям, налагаемым на ядро ползучести и релаксации, и, наилучшим образом, аппроксимируют опытные данные в течение большого промежутка времени.

Таким образом, при решении динамических задач наследственно-деформируемых систем в работе используются интегральные модели Больцмана-Вольтерра, связывающие напряжения и деформации при сингулярном ядре релаксации Колтунова-Ржаницына (8).

Для решения динамических задач вязкоупругости необходимо располагать значениями параметров ядер для моделей, описывающих подобные процессы, которые определены к настоящему времени для крайне ограниченного класса материалов.

В работе [9] функции (8) детально протабулированы, и разработана методика определения параметров  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Эти параметры для конкретных материалов определяются путем совмещения экспериментальной кривой и теоретической кривой, построенной в логарифмических координатах. Для определения  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  опытные кривые ползучести материала строятся на стандартной логарифмической бумаге и совмещаются с соответствующей теоретической кривой путем сдвигов вдоль осей.

При определении параметров ядра (8) для бетона обработано несколько экспериментальных кривых ползучести, приведенных в [14]. В настоящей работе используются параметры ядра релаксации для двух типов бетона, которые приводятся в табл. 1.

**Таблица 1. Параметры ядра релаксации для двух типов бетона**

№	Тип бетона	$\alpha_3$	$\beta_3$	$A_3$
1	Бетон при постоянных напряжениях различных начальных уровней, нагруженный в возрасте 35 суток	0.1	0.00000011	0.01594
2	Бетон, впервые нагруженный в возрасте 28 суток до постоянного напряжения различного уровня	0.075	0.00000014	0.0194

### Численный метод решения нелинейных задач, описываемых системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

В настоящей работе для построения дискретных моделей нелинейных задач, описываемых системами интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, используется вариационный принцип Бубнова-Галеркина. С помощью метода Бубнова-Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации, при заданных граничных условиях эти задачи сводятся к решению систем нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра относительно функции времени.

В работе, применительно к нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра, предложен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. На базе предложенного метода разработан алгоритм численного решения задач динамики наследственной теории.

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$L_1(w, \Phi) = a(y, z)(1 - \Gamma^*) \nabla^2 w + b(y, z) \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + c(y, z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - X \left( t, y, z, w, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right) = 0, \quad (9)$$

$$L_2(w, \Phi) = \nabla^4 \Phi - (1 - \Gamma^*) F \left( t, y, z, w, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = 0,$$

где  $L_1, L_2$  – интегро-дифференциальные операторы;  $w = w(y, z, t)$  и  $\Phi = \Phi(y, z, t)$  – неизвестные функции аргументов;  $a(y, z), b(y, z), c(y, z), X$  и  $F$  – заданные непрерывные функции своих аргументов;

$\Gamma^*$  – интегральный оператор с ядром  $\Gamma(t)$ :

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$$

При интегрировании уравнений движения динамических систем необходимо исходить из определенных граничных и начальных условий. Граничные условия, относящиеся к перемещениям, являются геометрическими. Условия, формируемые для усилий и моментов, называются динамическими. Граничные условия могут быть заданы различным образом.

Также при интегрировании уравнений должны быть удовлетворены начальные условия, относящиеся к перемещениям и скоростям точек срединной поверхности конструкции.

Исследование нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, при заданных начальных и граничных условиях, для сингулярных ядер релаксации наталкивается на значительные математические трудности. Как уже отмечалось, эти уравнения являются интегро-дифференциальными в частных производных. Во многих практических задачах исследование этих уравнений можно свести к исследованию интегро-дифференциальных уравнений в обычных производных.

Решение системы (9) по методу Бубнова-Галеркина ищем в виде:

$$w(y, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(y, z), \quad (10)$$

$$\Phi(y, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Phi_{nm}(t) \chi_{nm}(y, z), \quad (11)$$

где  $w_{nm} = w_{nm}(t)$  и  $\Phi_{nm} = \Phi_{nm}(t)$  – неизвестные функции времени;  $\psi_{nm} = \psi_{nm}(y, z)$  и  $\chi_{nm} = \chi_{nm}(y, z)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$  – координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи.

Подставляя (10) и (11) во второе уравнение системы (9), методом неопределенных коэффициентов функцию  $\Phi = \Phi(y, z, t)$  можно выразить через функцию  $w = w(y, z, t)$ .

Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды

Затем, подставляя (10) и полученное выражение функции  $\Phi = \Phi(y, z, t)$  в первое уравнение системы (9), умножая его обе части на  $\psi_{kl}(y, z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $l = 1, 2, \dots, M$  и интегрируя по  $y$  и  $z$  на отрезке  $[0; 1]$  для определения неизвестных  $w_{kl}$ , получим следующую систему нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра:

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_{kl} + \gamma_{kl} \dot{w}_{kl} + \omega_{kl}^2 w_{kl} = \\ & = X_{kl} \left\{ t, w_{11}, \dots, w_{NM}, \Phi_{11}, \dots, \Phi_{NM}, \int_0^t \varphi_{kl}(t, \tau, w_{11}(\tau), \dots, w_{NM}(\tau), \Phi_{11}(\tau), \dots, \Phi_{NM}(\tau)) d\tau \right\} \quad (12) \\ & w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Здесь  $X_{kl}$  и  $\varphi_{kl}$  – заданные непрерывные функции в области изменения аргументов;  $\gamma_{kl}$ ,  $\omega_{kl}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $l = 1, 2, \dots, M$  – постоянные числа.

Таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к решению систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вида (12). Для решения этих систем в этом разделе предлагается численный метод, основанный на использовании квадратурных формул.

Как было показано выше, большинство динамических задач об устойчивости тонкостенных конструкций с учетом наследственных свойств материала сводятся к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра вида (12).

В работах [12, 15] для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра был разработан численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. В данной работе этот метод обобщен для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида (12).

Путем двукратного интегрирования системы (12) по  $t$  с учетом начальных условий, получим

$$\begin{aligned} w_{kl}(t) = & w_{0kl} + \dot{w}_{0kl}t + \gamma_{kl}w_{0kl}t - \gamma_{kl} \int_0^t w_{kl}(\tau) d\tau - \omega_{kl}^2 \int_0^t (t-\tau)w_{kl}(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau) \times \\ & \times X_{kl}(\tau, w_{11}(\tau), \dots, w_{NM}(\tau), \Phi_{11}(\tau), \dots, \Phi_{NM}(\tau), \int_0^\tau \varphi_{kl}(\tau, s, w_{11}(s), \dots, w_{NM}(s), \Phi_{11}(s), \dots, \Phi_{NM}(s)) ds) d\tau, \\ & k = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Для численного решения данной системы применим метод прямой замены интегралов, входящих в систему, конечной суммой по какой-либо квадратурной формуле [12, 15]. Тогда для получения числовых значений неизвестных  $w_{kl} = w_{kl}(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $l = 1, 2, \dots, M$ , приближенного решения системы в узлах  $t_m = (m-1)\Delta t$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  ( $\Delta t$  - шаг интегрирования) получим следующую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} w_{mkl} = & w_{0kl} + (\dot{w}_{0kl} + \gamma_{kl}w_{0kl})t_m - \gamma_{kl} \sum_{j=0}^{m-1} B_j w_{jkl} + \sum_{j=0}^{m-1} B_j (t_m - t_j) \times \\ & \times \left[ \omega_{kl}^2 w_{jkl} + X_{kl} \left( t_j, w_{j11}, \dots, w_{jNM}, \Phi_{j11}, \dots, \Phi_{jNM}, \sum_{n=1}^j C_n \varphi_{kl}(t_n, w_{n11}, \dots, w_{nNM}, \Phi_{n11}, \dots, \Phi_{nNM}) \right) \right], \quad (13) \\ & m = 1, 2, 3, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

где  $B_j$ ,  $C_n$  – числовые коэффициенты, независящие от выбора подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использования квадратурных формул.

## Расчет нелинейных задач динамики гидротехнических сооружений типа плотины-пластины

Рассмотрим задачу о вынужденных нелинейных колебаниях плотины-пластины, изготовленной из вязкоупругого изотропного материала. Считаем, что на плотину-пластину действуют силы инерции, возникающие от движения и деформации плотины, а также, гидродинамическое давление воды, возникающее от движения плотины, как твердого тела, и деформации плотины. Математическая модель задачи описывается системой уравнений (6).

Для решения интегро-дифференциального уравнения (6) применим метод Бубнова-Галеркина. Функции перемещения и напряжений задаем в виде

$$w(y, z, t) = \sum_{k=1}^N w_k(t) \psi_k(y, z), \quad \Phi(y, z, t) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(t) \chi_k(y, z), \quad (14)$$

где  $\psi_k(y, z)$ ,  $\chi_k(y, z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  – удовлетворяют условиям закрепления краев плотины-пластины;  $w_k = w_k(t)$ ,  $\Phi_k = \Phi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  – неизвестные функции.

$\psi_k(y, z)$  ищем в виде произведения двух функций:

$$\psi_k(y, z) = V_k(y) H_k(z). \quad (15)$$

Пусть пластина имеет следующие граничные условия [2]:

- края  $z = \pm a$  свободно оперты;
- край  $y = 0$  жестко защемлен;
- край  $y = b$  свободен.

Для  $H_k(z)$  можно взять функции  $\cos \frac{k\pi z}{2a}$ ,  $k = 1, 3, 5, \dots$ , которые удовлетворяют условиям:

$$w|_{z=\pm a} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|_{z=\pm a} = 0. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что из следующих граничных условий:

$$w|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right|_{y=b} = 0; \quad \left. \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} \right) \right|_{y=b} = 0$$

можно получить:

$$V_k(y) = V_{1k}(y) + E_k V_{2k}(y),$$

где  $V_{1k}(y) = \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi y}{2b} - \frac{1}{k+2} \sin \frac{(k+2)\pi y}{2b}$ ;  $V_{2k}(y) = \cos \frac{k\pi y}{b} - \cos \frac{(k+2)\pi y}{b}$ ;

$$E_k = -\frac{1}{V_{2k}''(b)} \left[ V_{1k}''(b) - \left( \frac{k\pi}{2a} \right)^2 \mu V_{1k}(b) \right].$$

Таким образом, выражение для функции  $\psi_k(y, z)$ , удовлетворяющей заданным граничным условиям задачи, имеет вид:

$$\psi_k(y, z) = \cos \frac{k\pi z}{2a} \left[ \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi y}{2b} - \frac{1}{k+2} \sin \frac{(k+2)\pi y}{2b} + E_k \left( \cos \frac{k\pi y}{b} - \cos \frac{(k+2)\pi y}{b} \right) \right], \quad (17)$$

$k = 1, 3, 5, \dots$

Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды



Гидродинамическое давление воды на напорную часть плотины имеет вид [2]:

$$P = \left\{ -\rho_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{x=s_0(t)} \quad (18)$$

Определив выражения для  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ , аналогично [2], из (18) получим:

$$P = -2\rho Q b^2 \ddot{s}_0(t) \sum_{n=1}^N \frac{C_n \cos \frac{\gamma_n y}{b}}{[\gamma_n^2 - (1-Qb)Qb] \gamma_n \cos \gamma_n} + \rho \dot{s}_0^2(t) [1 - 2(1 - e^{-Qb}) e^{Q(y-b)}] - \\ - \rho Q^2 b^2 \dot{s}_0^2(t) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{C_n \sin \frac{\gamma_n y}{b}}{[\gamma_n^2 - (1-Qb)Qb] \cos \gamma_n} \frac{C_k \sin \frac{\gamma_k y}{b}}{[\gamma_k^2 - (1-Qb)Qb] \cos \gamma_k} - \frac{1}{2} \rho \dot{s}_0^2(t) \quad (19)$$

Здесь  $\gamma_n$  – корни уравнения  $\mu g \gamma = -Qb$ ;  $Q = \frac{\omega_0^2}{g}$ .

Гидродинамическое давление на напорную грань при  $x = 0$  равно [2]:

$$P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0} = \sum_{k=1}^N \frac{2b\rho(z-a) \cos \frac{k\pi y}{2b} \int_0^a \int_{-a}^b (z-a) \cos \gamma_k y \cdot \psi_k(y,z) dy dz}{k\pi \int_0^a \int_{-a}^b (z-a)^2 \cos^2 \gamma_k y dy dz} \ddot{w}_k(t) \quad (20)$$

Подставляя (14) во второе уравнение (6), методом неопределенных коэффициентов находим выражение для функции напряжений. Далее, с учетом (19) и (20), подставляя (14) и найденное выражение для функции напряжений в первое уравнение (6), при этом выполняя процедуру Бубнова-Галеркина и введя следующие безразмерные величины:

$$\theta = \frac{a_0}{h}, \quad \Omega = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \xi = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \zeta = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0}, \quad \lambda = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{b}{h}$$

относительно неизвестных  $w_k = w_k(t)$  и  $\Phi_k = \Phi_k(t)$ , получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\sum_{k=1}^N [a_{kl} \ddot{w}_k + b_{kl} (1 - \Gamma^*) w_k] - \lambda^2 \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N c_{knl} w_k (1 - \Gamma^*) \Phi_n = X_l(t), \quad (21) \\ \sum_{k=1}^N p_{1kl} \Phi_k = \lambda^2 \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N p_{2knl} w_k w_n, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

где  $a_{kl} = \int_0^1 \int_{-1}^1 \psi_k(y,z) \psi_l(y,z) dy dz - \frac{2}{\pi} \xi \delta \int_0^1 \int_{-1}^1 F_k(y,z) \psi_l(y,z) dy dz$ ;  $F_k(y,z) = \frac{a_k}{kb_k} (z-1) \cos \frac{k\pi y}{2}$ ;

$$a_k = \int_0^1 \int_{-1}^1 (z-1) \cos \frac{k\pi y}{2} \psi_k(y,z) dy dz; \quad b_k = \int_0^1 \int_{-1}^1 (z-1)^2 \cos^2 \frac{k\pi y}{2} dy dz;$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\pi^4} \int_0^1 \int_{-1}^1 [\psi_{k,yyyy}^{IV}(y,z) + 2\lambda^2 \psi_{k,yyzz}^{IV}(y,z) + \lambda^4 \psi_{k,zzzz}^{IV}(y,z)] \psi_l(y,z) dy dz;$$

$$c_{knl} = \int_0^1 \int_{-1}^1 [\psi''_{k,yy}(y,z) \chi''_{n,zz}(y,z) - 2\psi''_{k,yz}(y,z) \chi''_{n,yz}(y,z) + \psi''_{k,zz}(y,z) \chi''_{n,yy}(y,z)] \psi_l(y,z) dy dz;$$

$$X_l(t) = \theta \Omega^2 [\theta \xi e_l - G_1(t) d_l]; \quad e_l = \int_0^1 \int_{-1}^1 f(y,t) \psi_l(y,z) dy dz; \quad d_l = \int_0^1 \int_{-1}^1 \psi_l(y,z) dy dz;$$

$$G_1(t) = e^{-\zeta \Omega t} [(\zeta^2 - 1) \sin \Omega t - 2\zeta \cos \Omega t];$$

$$f(y,t) = 2Qb \frac{\delta}{\theta} G_1(t) \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{(\gamma_n^2 - R_1) \gamma_n \cos \gamma_n} \cos \gamma_n y - G_2(t) (1 - 2R_0 e^{Qb y}) +$$

$$+ (Qb)^2 G_2(t) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{C_n C_k}{(\gamma_n^2 - R_1) \cos \gamma_n (\gamma_k^2 - R_1) \cos \gamma_k} \sin \gamma_n y \sin \gamma_k y + \frac{1}{2} G_2(t);$$

$$G_2(t) = e^{-2\zeta \Omega t} (-\zeta \sin \Omega t + \cos \Omega t)^2; \quad C_n = 1 - \frac{2R_0 \gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + Q^2 b^2) \cos \gamma_n}; \quad R_0 = (1 - e^{-Qb}) e^{-Qb}; \quad R_1 = (1 - Qb) Qb;$$

$$P_{1kl} = \int_0^1 \int_{-1}^1 [\chi_{k,yyyy}^{IV}(y,z) + 2\lambda^2 \chi_{k,yyzz}^{IV}(y,z) + \lambda^4 \chi_{k,zzzz}^{IV}(y,z)] \chi_l(y,z) dy dz;$$

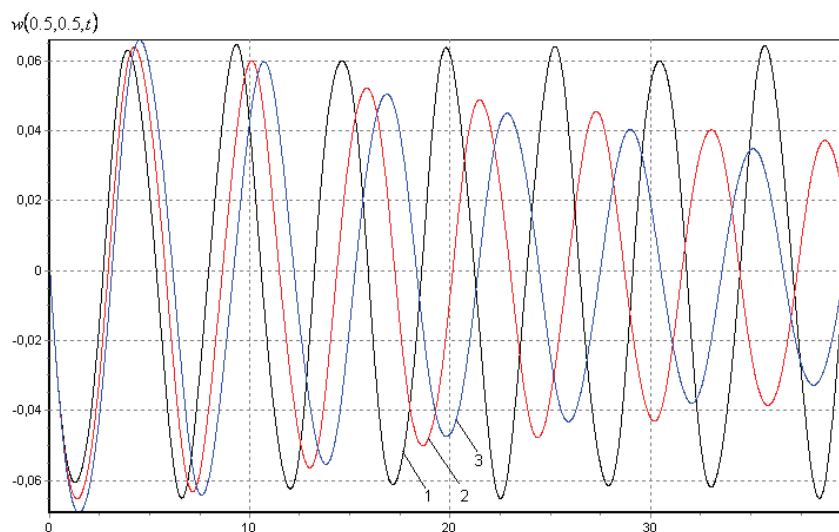
$$P_{2knl} = \int_0^1 \int_{-1}^1 [\psi''_{k,yz}(y,z) \psi''_{n,yz}(y,z) - \psi''_{k,yy}(y,z) \psi''_{n,zz}(y,z)] \chi_l(y,z) dy dz.$$

Интегрирование системы (21) проводилось численным методом, предложенным в этой работе. При этом в качестве ядра релаксации будем использовать слабосингулярное ядро Колтунова-Ржаницына с тремя реологическими параметрами  $A$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  вида (8). При расчетах будем использовать реологические параметры  $A$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  для конкретных марок бетонов, приведенные в табл. 1.

На основе разработанного алгоритма решения составлена программа на алгоритмическом языке Delphi. Результаты приводятся в виде графиков. Здесь, если не оговорено другое, в качестве исходных данных при вычислениях, были приняты следующие:  $A = 0.01594$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.00000011$ ;  $\delta = 50$ ;  $\lambda = 1$ .

На рис. 2 приведены графики кривых  $w\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right)$  для различных материалов плотины-пластины. Анализ

полученных результатов показывает, что в начальный период времени решения упругих и вязкоупругих задач мало отличаются друг от друга. С течением времени колебания упругой плотины-пластины происходят ближе к гармоническому закону, а амплитуда и частота колебаний вязкоупругих плотин-пластин существенно уменьшается.



**Рисунок 2. Зависимость прогиба от времени для различных материалов: упругий (1); марка 1 (2); марка 2 (3)**

Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды

На рис. 3 показано влияние гидродинамического давления воды на поведение плотины-пластины при различных значениях параметра

$$\xi = \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Анализ результатов показывает: с увеличением значений этого параметра амплитуда колебаний плотины-пластины увеличивается, при этом частота колебаний существенно не меняется. Следовательно, учет гидродинамического давления воды приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

На рис. 4 приведены графики кривых  $w\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right)$  для различных значений параметра  $\lambda$ . Видно, что с увеличением значений этого параметра амплитуда колебаний уменьшается и наблюдается сдвиг фаз влево.

На рис. 5 приведены результаты расчетов, полученных в линейной (кривая 1) и нелинейной (кривая 2) постановках.

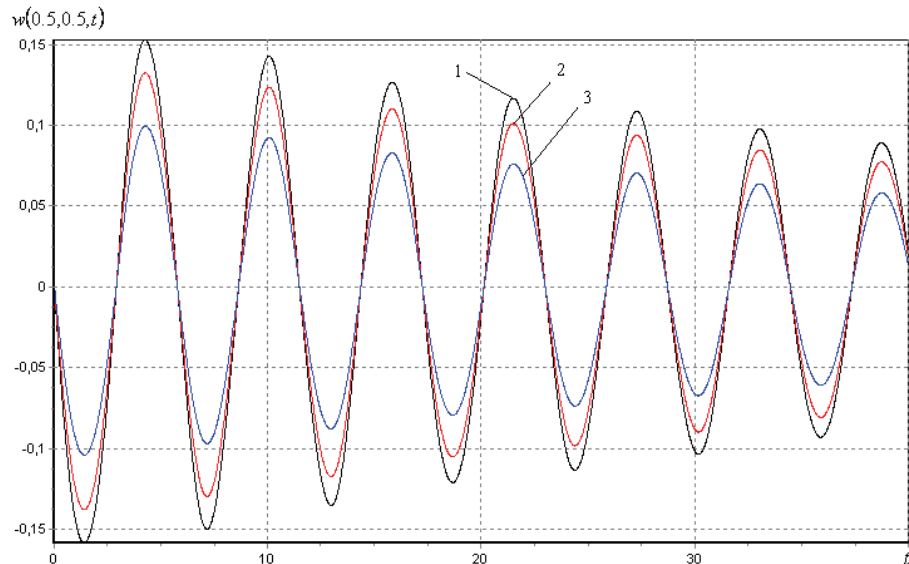


Рисунок 3. Зависимость прогиба от времени при  $\xi = 0.42(1); 0.55(2); 0.63(3)$

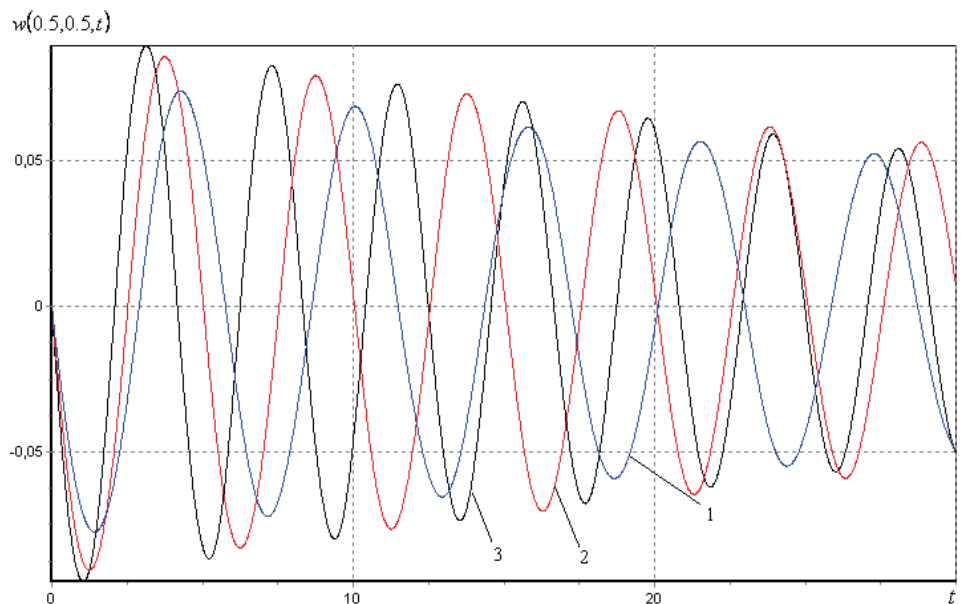


Рисунок 4. Зависимость прогиба от времени при  $\lambda = 1(1); 1.5(2); 2(3)$

Как показывают исследования, в случае отсутствия внешних нагрузок результаты расчетов совпадают. Однако, при наличии внешних нагрузок, зависимости  $w$  существенно отличаются друг от друга. Аналогичные результаты наблюдаются и для напряжений и моментов.

Отметим, что во всех рассмотренных случаях исследована численная сходимость метода Бубнова-Галеркина. Для каждого случая найдено число полуволн, необходимое для получения решения достаточной точности.

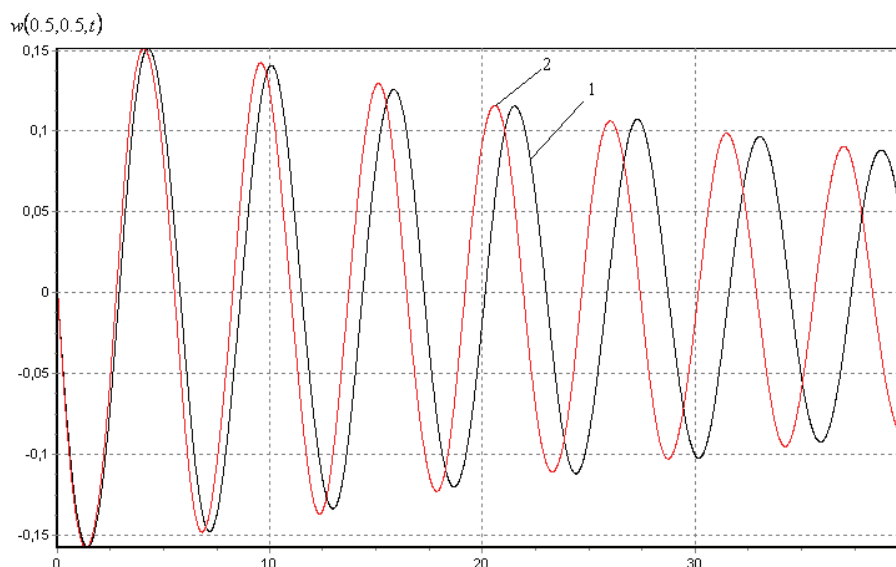


Рисунок 5. Зависимость прогиба от времени

### Литература

1. Напетваридзе Ш. Г. Сейсмостойкость гидротехнических сооружений. М.: Госстройиздат, 1959. 216 с.
2. Уразбаев М. Т. Сейсмостойкость упругих и гидроупругих систем. Ташкент: Фан, 1966. 255 с.
3. Чень Чжень-чен. О динамическом давлении жидкости на плотину при землетрясении // ПММ. 1961. Т. 25. №1. С.150-154.
4. Чень Чжень-чен. О гидродинамическом давлении на плотину, вызванном ее аperiodическими или импульсивными колебаниями и вертикальными колебаниями земной поверхности // ПММ. 1961. Т.25. №4. С. 716-728.
5. Мирсаидов М. М., Годованников А. М. Сейсмостойкость сооружений. Ташкент: Узбекистан, 2008. 220 с.
6. Mansouri A., Rezaei R. Considering Dynamic Analysis Results of Interactions between Concrete Dams and Reservoirs in Time Domain and Frequency Domain for Choosing the Optimal Model // European Journal of Scientific Research. 2010. Vol.46 (4). PP. 604-615.
7. Lotfi V. Dynamic Analysis of Concrete Gravity Dams by Decoupled Modal Approach in Time Domain // 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada. August 1-6, 2004. Paper No. 467.
8. Лисичкин С. Е. Развитие теории и совершенствование методов расчета массивных железобетонных и напорных сталежелезобетонных конструкций гидротехнических сооружений: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.07: М., 2004 572 с. РГБ ОД, 71:05-5/405.
9. Колтунов М. Ползучесть и релаксация. М. : Высшая школа, 1976. 276 с.
10. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.
12. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем. Автореферат дисс. док. тех. наук, Киев, 1991.
13. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
14. Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. Под ред. С.В.Александровского. М. : Стройиздат, 1976. 351 с.
15. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т.51. №5. С. 867-871.

\* Рустамхан Алимханович Абдикаримов, г. Ташкент, Узбекистан

Тел. раб.: +998(71)234-66-41; эл. почта: rabdikarimov@mail.ru

Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды

# Mathematical modelling and calculation of hydraulic engineering constructions such as dam-plate in view of hydrodynamical pressure of water and seismic loading

**R. A. Abdikarimov,**

*Tashkent Finance Institute, Tashkent, Uzbekistan*

**Kh. Eshmatov, Sh. P. Bobanazarov, D. A. Hodzhayev, B. Kh. Eshmatov,**

*Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, Uzbekistan*

+998(71)234-66-41; эл. почта: rabdikarimov@mail.ru

## Key words

hydraulic engineering constructions, concrete dam, seismic loading, hydrodynamical pressure of water, viscoelasticity, nonlinear vibrations, integro-differential equations, Bubnov-Galerkin method, kernel of relaxation

## Abstract

In present paper the problem about the forced vibrations of hydraulic engineering constructions such as dams is considered in view of hydrodynamical pressure of water and seismic loading. The equations of movement concerning function of deflections are described by the integral-differential equations (IDE) in partial derivatives.

As a kernel of relaxation it is used weakly singular kernel of Koltunov-Rzanitsyn type. By means of Bubnov-Galerkin method based on polynomial approximation of deflections, the problem is reduced to the solution of nonlinear ordinary IDE, where an independent variable is time.

Decisions of IDE are determined by the numerical method based on exception of feature in a kernel. On the basis of this method the algorithm of the numerical decision is described.

The analysis of influence of viscoelastic and nonlinear properties of a material, and also hydrodynamical pressure of water on deflected mode a dam-plate is carried out.

## References

1. Napetvaridze SH. G. *Seysmostoykost gidrotekhnicheskikh sooruzheniy* [Seismic stability of hydraulic structures]. M.: Gosstroyizdat, 1959. 216 p. (rus)
2. Urazbaev M. T. *Seysmostoykost uprugikh i gidrouprugikh system* [Seismic stability of elastic and hydroelastic erections]. Tashkent: Fan, 1966. 255 p. (rus)
3. CHen CHzhen-chen. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1961. vol. 25. No. 1. p.150-154. (rus)
4. CHen CHzhen-chen. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1961. vol.25. No. 4. p. 716-728. (rus)
5. Mirsaidov M. M., Godovannikov A. M. *Seysmostoykost sooruzheniy* [Seismic stability of erections]. Tashkent: Uzbekistan, 2008. 220 p. (rus)
6. Mansouri A., Rezaei R. Considering Dynamic Analysis Results of Interactions between Concrete Dams and Reservoirs in Time Domain and Frequency Domain for Choosing the Optimal Model. *European Journal of Scientific Research*. 2010. Vol.46 (4). PP. 604-615.
7. Lotfi V. Dynamic Analysis of Concrete Gravity Dams by Decoupled Modal Approach in Time Domain. *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C., Canada. August 1-6, 2004. Paper No. 467.
8. Lisichkin S. E. *Razvitie teorii i sovershenstvovanie metodov rascheta massivnykh zhelezobetonnykh i napornykh stalezhelezobetonnykh konstruksiy gidrotekhnicheskikh sooruzheniy* [Development of the theory and improvement of calculation methods of heavy reinforced concrete structures and pressure-proof steel-concrete composite structures of hydraulic erections]. Theses. Moscow , 2004. 572 p. (rus)
9. Koltunov M. *Polzuchest i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow : Vysshaya shkola, 1976. 276 p. (rus)
10. Ilyushin A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamental mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow : Nauka, 1970. 280 p. (rus)
11. Volmir A. S. *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow : Nauka, 1972. 432 p. (rus)
12. Eshmatov KH. *Integralnyy metod matematicheskogo modelirovaniya zadach dinamiki vyazkouprugikh system* [Integral mathematical model approach for the dynamic problems of viscoelastic systems]. Theses. Kiev, 1991. (rus)

Abdikarimov R. A., Eshmatov Kh., Bobanazarov Sh. P., Hodzhayev D. A., Eshmatov B. Kh. Mathematical modelling and calculation of hydraulic engineering constructions such as dam-plate in view of hydrodynamical pressure of water and seismic loading

13. Rabotnov YU. N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of rigid body]. Moscow : Nauka, 1977. 383 p. (rus)
14. Aleksandrovskiy S. V. *Polzuchest i usadka betona i zhelezobetonnykh konstruksiy* [Creep and contraction of concrete and reinforced concrete structures]. Moscow : Stroyizdat, 1976. 351 p. (rus)
15. Badalov F. B., Eshmatov KH., YUsupov M. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1987. vol.51. No. 5. p. 867-871. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 59-70**