Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния гибких оболочек, жестко заделанных по контуру

Д.т.н., профессор В.Н. Филатов*,
ГОУ Саратовский государственный технический университет;
к.ф.-м.н., директор А.А. Абросимов,
ООО «Линкорн»

Ключевые слова: аппроксимирующие функции; гибкие оболочки; моделирование НДС оболочки.

Пластины и оболочки находят широкое применение в строительстве, авиации, ракетостроении, являются элементами приборов точного машиностроения. Совершенствование расчетов таких конструкций является актуальным.

При расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов строительных конструкций методами, основанными на непрерывной аппроксимации искомых функций, возникает проблема с выбором аппроксимирующих функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Ранее [1,2] нами предложена методика – модификация статического метода В.З. Власова, позволяющая подбирать системы аппроксимирующих функций, служащих для расчетов пластин и оболочек прямоугольного плана различным образом закрепленных по контуру. Методика базируется на разложении нагрузочных членов в те или иные ряды. При этом функции систем, аппроксимирующих составляющие перемещения, получающиеся в результате применения методики, линейно независимы, удовлетворяют граничным условиям для соответствующих составляющих перемещения и полны (по построению).

Для апробирования предложенных систем функций ранее были решены задачи для шарнирно неподвижно закрепленных по контуру пластин и пологих оболочек в линейной и в геометрически нелинейной постановках. Проведены сравнения с имеющимися в литературе решениями. Построенные нами решения демонстрируют возможность и эффективность применения всех подобранных систем функций для расчета пластин и оболочек. При этом показано, что для достижения приемлемых результатов в перемещениях достаточно удержания четырех членов в рядах разложения искомых составляющих перемещения по подобранным функциям; достижение хороших результатов в напряжениях требует удержания 4–9 членов разложения.

В настоящей работе исследуется возможность и эффективность применения подобранных систем аппроксимирующих функций к расчету гибких пологих оболочек [3,4], жестко заделанных по сторонам прямоугольного в плане контура. Система разрешающих нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая работу гибких пологих оболочек, выводится вариационным путем в работе [5] и для случая отсутствия температурного поля для оболочек постоянной толщины имеет вид:

$$\begin{gathered}
\left[(\varepsilon_1+\mu\,\varepsilon_2)\right]'_x+\mu_1\left[\varepsilon_{12}\right]'_y=0;\ \left[(\mu\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]'_y+\mu_1\left[\varepsilon_{12}\right]'_x=0;\\
-D_0\left[(k_1+W_{xx})(\varepsilon_1+\mu\,\varepsilon_2)+2\mu_1W_{xy}\varepsilon_{12}+(k_2+W_{yy})(\mu\,\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]+\\
+D_2\left[(W_{xx}+\mu W_{yy})''_{xx}+4\mu_1\,W_{xxyy}+(\mu\,W_{xx}+W_{yy})''_{yy}\right]=(1-\mu^2)q.
\end{gathered}\qquad(1)$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона, $\mu_1=0{,}5\cdot(1-\mu)$;

$\varepsilon_1=U_x-k_1W+0{,}5\cdot W_x^2$, $\varepsilon_2=V_y-k_2W+0{,}5\cdot W_y^2$, $\varepsilon_{12}=U_y+V_x+W_xW_y$;

$U=U(x,y)$, $V=V(x,y)$ и $W=W(x,y)$ – искомые компоненты перемещения соответственно в направлении взаимно ортогональных координатных осей OX и OY, направленных по линиям главных кривизн координатной поверхности оболочки прямоугольного плана (размеров $a\times b$) и оси OZ, направленной по нормали к координатной поверхности в сторону вогнутости (вниз);

k_1, k_2 – кривизны оболочки соответственно в направлении осей OX и OY;

$D_0=Eh$, $D_2=Eh^3/12$,

где h – толщина оболочки, E – модуль упругости материала оболочки; $q=q(x,y)$ – распределенная нагрузка, перпендикулярная плану оболочки.

Индексы x и y при искомых составляющих перемещения означают дифференцирование по соответствующей координате.

Напряжения в конструкции определяются по формулам:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[U_x + \mu V_y - (k_1 + \mu k_2)W + 0{,}5\left(W_x^2 + \mu W_y^2\right) - z\left(W_{xx} + \mu W_{yy}\right)\right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\mu U_x + V_y - (\mu k_1 + k_2)W + 0{,}5\left(\mu W_x^2 + W_y^2\right) - z\left(\mu W_{xx} + W_{yy}\right)\right], \qquad (2)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E\mu_1}{1-\mu^2}\left[U_y + V_x + W_x W_y - 2\,z\,W_{xy}\right].$$

Систему (1) решаем методом Бубнова–Галеркина в высоких приближениях, аппроксимируя компоненты перемещения в виде:

$$U = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}\cdot X_{1i}(x)\cdot Y_{1j}(y),\ V = \sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}\cdot X_{2i}(x)\cdot Y_{2j}(y),\ W = \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij}\cdot X_{3i}(x)\cdot Y_{3j}(y). \qquad (3)$$

При этом для функций, аппроксимирующих компоненты перемещения, используем три различных системы функций, подобранных нами с использованием модификации статического метода В.З. Власова:

- систему, базирующуюся на синусах, когда для жестко заделанной по контуру оболочки, при отсутствии тангенциальных смещений точек краев оболочки

$$X_{1m}(x) = X_{2m}(x) = Sin(m\pi x/a),\ Y_{1n}(y) = Y_{2n}(y) = Sin(n\pi y/b),$$

$$X_{3m}(x) = Sin(m\pi x/a) - m\pi\cdot\left[1+(-1)^m\right]\cdot(x/a)^3 + m\pi\cdot\left[2+(-1)^m\right]\cdot(x/a)^2 - m\pi\cdot(x/a), \qquad (4)$$

$$Y_{3n}(y) = Sin(n\pi y/b) - n\pi\cdot\left[1+(-1)^n\right]\cdot(y/b)^3 + n\pi\cdot\left[2+(-1)^n\right]\cdot(y/b)^2 - n\pi\cdot(y/b);$$

- систему, базирующуюся на косинусах,

$$X_{10}(x) = X_{20}(x) = (x/a)^2 - (x/a),\ X_{1m}(x) = X_{2m}(x) = Cos\,(m\pi x/a) + \left(1-(-1)^m\right)(x/a) - 1,$$

$$X_{30}(x) = (x/a)^4 - 2(x/a)^3 + (x/a)^2,\ X_{3m}(x) = Cos(m\pi x/a) - \left(1-(-1)^m\right)\left[2(x/a)^3 - 3(x/a)^2\right] - 1, \qquad (5)$$

функции перпендикулярного направления записываются аналогично (в формулах (4) и (5) $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$);

- систему полиномиального вида

$$X_{1m}(x) = X_{2m}(x) = \left(2(x/a)-1\right)^{m+2} - 0{,}5\left(\left(1-(-1)^m\right)\left(2(x/a)-1\right) + \left(1+(-1)^m\right)\right),$$

$$X_{3m}(x) = \left(2(x/a)-1\right)^{m+4} + 0{,}25\left\{(m+3)\left((-1)^m-1\right)\left(2\,(x/a)-1\right)^3 - (m+4)\left((-1)^m+1\right)\left(2(x/a)-1\right)^2 - \right. \qquad (6)$$

$$\left. - (m+1)\left((-1)^m-1\right)\left(2(x/a)-1\right) + (m+2)\left((-1)^m+1\right)\right\},$$

здесь так же функции перпендикулярного направления записываются аналогично в (6) $(m = 0, 1, 2, \ldots)$).

Полученные в результате применения метода Бубнова–Галеркина, нелинейные алгебраические уравнения относительно коэффициентов разложений (3) A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, линеаризировались комбинированным методом линеаризации (КМЛ) [6], когда на предварительном этапе расчета применялся метод последовательных нагружений (МПН) [7] с крупным шагом по нагрузке (по прогибу), а на уточняющем этапе – метод последовательных приближений (МПП), который стартовал из точек финиша МПН. Такая комбинация методов позволяет устранить недостатки, присущие каждому из методов [8, 9].

В МПН делается малое количество крупных шагов, в МПП значительно сокращается количество уточняющих итераций, поскольку последний метод стартует не из точки решения соответствующей линейной задачи, отстоящей от точки истинного решения нелинейной задачи далеко, а из точки финиша в МПН, которая находится в малой окрестности истинного решения. Кроме того, в МПП при такой комбинации отсутствуют моменты плохой сходимости решения.

Решалась задача отыскания напряженно-деформированного состояния (НДС) квадратной в плане пологой оболочки с безразмерными кривизнами $\bar{k} = \bar{k}_1 = \left(a^2/h\right)k_1 = \bar{k}_2 = \left(b^2/h\right)k_2 = 16$, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, перпендикулярной плану оболочки. Для функций (4) проведены расчеты при удержании в рядах (3) четырех, девяти и шестнадцати слагаемых (соответственно 4-е, 9-е и 16-е приближения). Сделаны выводы, как и ранее для шарнирно неподвижно закрепленных по контуру оболочек, о том, что для достижения практической сходимости решения необходимо удерживать 4-9 членов рядов разложения (3). При этом эпюры прогибов 4-го и 16-го приближений совпадают, наибольший прогиб во всех фазах нагружения наблюдается в центре оболочки. Далее, в 16-х приближениях, рассмотренная задача решена с функциями (5) и (6). На приводимых ниже графиках показаны результаты проведенных расчетов в 16-х приближениях.

На рис. 1 приводятся графики «безразмерная нагрузка $\bar{q} = \left(a^4/Eh^4\right)\cdot q$ – безразмерный прогиб в центре оболочки $\bar{W}(ц) = \bar{W}(0{,}5;\,0{,}5) = (1/h)\,W(a/2;\,a/2)$».

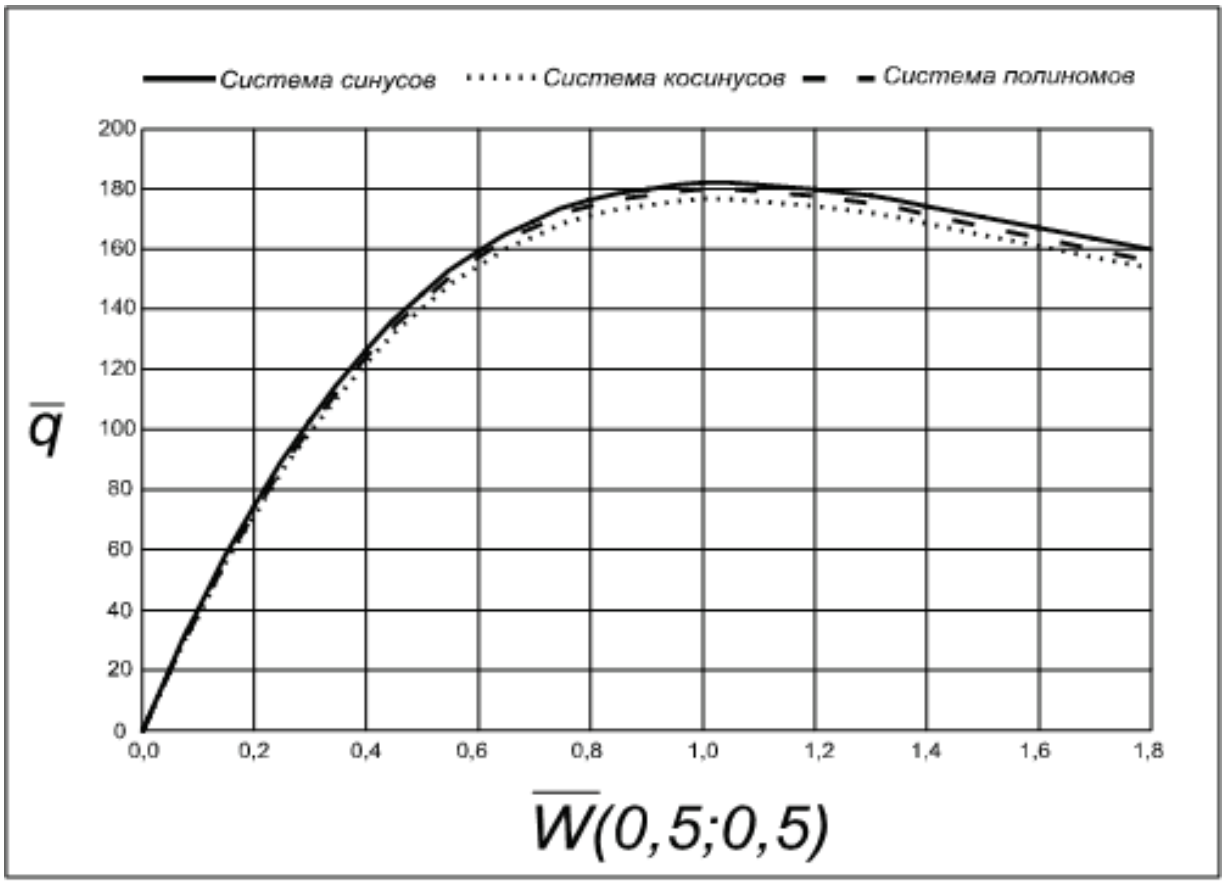

Рисунок 1. Зависимость безразмерного прогиба в центре $\bar{W}(0{,}5;\,0{,}5)$ от безразмерной нагрузки $\bar{q}$

На рис. 2 приведены эпюры напряжений в верхней критической точке (ВКТ), когда $\bar{W}(ц) = 1{,}0$. Безразмерные напряжения $\bar{\sigma}_{11} = \left(\left(1-\mu^2\right)\cdot a^2/Eh^2\right)\cdot\sigma_{11}$ здесь приводятся на верхней поверхности оболочки ($\bar{z} = (1/h)\cdot z = -0{,}5$), по сечению $\eta = (1/b)\cdot y = 0{,}5$. Из приводимых результатов видно, что решения, полученные с разными системами функций, отличаются весьма мало.

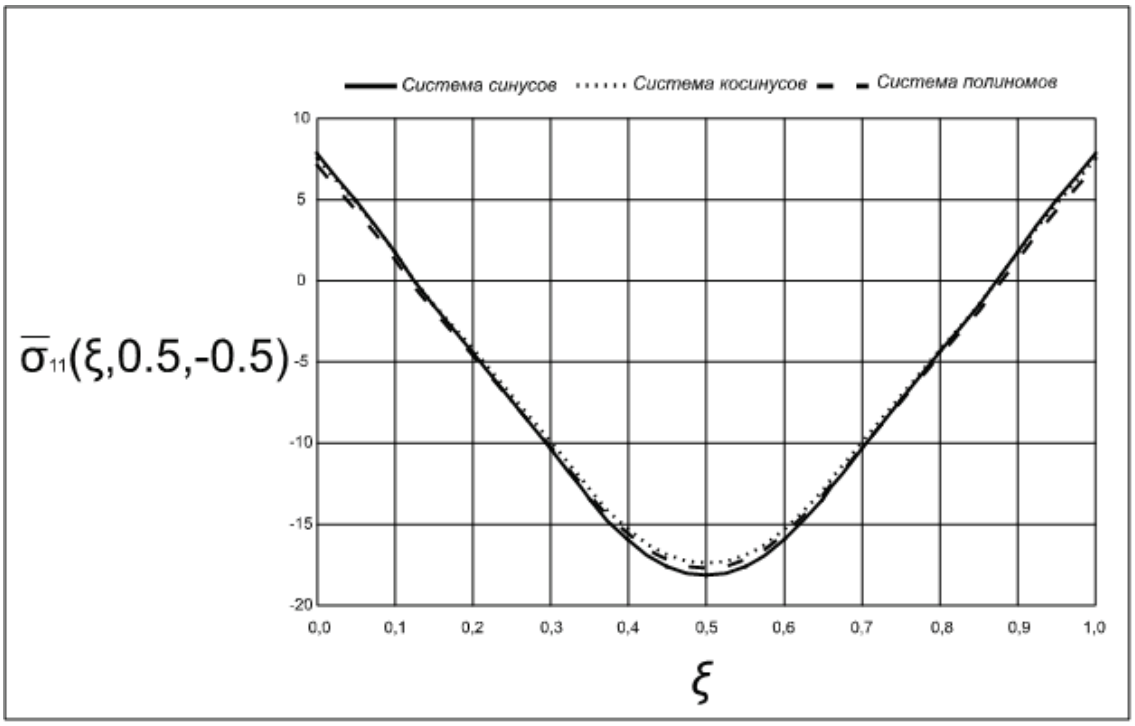

Рисунок 2. Напряжения в ВКТ (W(0,5;0,5)=1.0)

Выводы

Все аппроксимации дают близкие результаты, и все подобранные системы функций могут быть использованы для расчетов. По трудоемкости и затратам машинного времени предпочтение отдается аппроксимациям полиномиального вида и функциям, базирующимся на синусах. Такого вида аппроксимирующие функции могут быть использованы при расчете стержневых, пластинчатых и оболочечных конструкций строительного профиля.

Литература:

1. Филатов В. Н. Построение систем аппроксимирующих функций с помощью модификации статического метода В.З. Власова, служащих для решения задач теории гибких пластин / СПИ. Саратов, 1985. 26 с. Деп. в ВИНИТИ № 7427 – В85.
2. Филатов В. Н., Абросимов А. А., Молодчиков К. В. Исследование НДС пологих оболочек переменной толщины с использованием разных систем аппроксимирующих функций // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. темат. сб. тр. Вып.11 / СПбГАСУ. СПб., 2005. С. 89–103.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Donell L.N. A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending / Trans. ASME. 1934. P. 56.
5. Игнатьев О. В., Карпов В.В. Вариационно-параметрический метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины / ВолГАСА. Волгоград, 2001. 210 с.
6. Абросимов А. А., Айрапетьянц Г. А. Применение различных методов линеаризации уравнений при исследовании НДС гибких пологих оболочек // Молодые ученые – науке и производству: мат. конф. молодых ученых / СГТУ. Саратов, 2007. С. 5-7.
7. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов : Изд. СГУ, 1975. 120 с.
8. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики. Минск : Вышейшая школа, 1990. 349 с.
9. Bakouline N., Ignatiev O., Karpov V. Variation parametric research technique of variable by step width shallow shells with finite deflections. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume I. Issue 3. 2000. P. 1–6.

**Валерий Николаевич Филатов, Саратов, Россия*

Тел.: +7 (452) 99-87-24; эл. почта: filatovvn@yandex.ru

Mathematical modelling deflected mode of flexible shells anchored along the contour

V. N. Filatov,
Saratov State Technical University, Saratov, Russia
+7 (452) 99-87-24; e-mail: filatovvn@yandex.ru
A. A. Abrosimov,
Linkorn Ltd., Saratov, Russia

Key words

approximating functions; flexible shells; modeling deflected mode of shells

Abstract

Thin walled cold-formed steel structures became popular solution for low-rise buildings, mansards, walling of multistorey buildings. The modeling of perforated thin-walled cold-formed profile is rather difficult, especially for profiles with irregular shape apertures used in racking systems.

The main aim of this work is creating the methods of finite element modeling such profiles.

The result of work is a method of construction of profile with given section, aperture formation and construction of final calculation model. The software package SCAD Soft was used for modeling.

References

1. Filatov V. N. *Postroenie sistem approksimiruyushchikh funktsiy s pomoshchyu modifikatsii staticheskogo metoda V.Z. Vlasova, sluzhashchikh dlya resheniya zadach teorii gibkikh plastin* [Construction of a system of approximating functions for solving problems of theory of flexible plates using the modification of static method by V.Z. Vlasov]. Saratov: SPI, 1985. 26 p. Deposit VINITI No. 7427 – V85. (rus)
2. Filatov V. N., Abrosimov A. A., Molodchikov K. V. *Mezhvuzovskiy tematicheskiy sbornik trudov*. 2005. No.11. P. 89–103. (rus)
3. Vlasov V. Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* [General theory of shells and its application in technics]. Moscow, Leningrad : Gostekhizdat, 1949. 784 p. (rus)
4. Donell L. N. A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Trans. ASME*. 1934. P. 56.
5. Ignatev O. V., Karpov V.V. *Variatsionno-parametricheskiy metod v nelineynoy teorii obolochek stupenchato-peremennoy tolshchiny* [Variational parametric method in the nonlinear theory of shells of graded variable thickness]. Volgograd : VolGASA, 2001. 210 p. (rus)
6. Abrosimov A. A., Ayrapetyants G. A. *Molodye uchenye – nauke i proizvodstvu*. Saratov, 2007. p. 5-7. (rus)
7. Petrov V. V. *Metod posledovatelnykh nagruzheniy v nelineynoy teorii plastinok i obolochek* [The method of successive loadings in nonlinear theory of plates and shells]. Saratov : Izd. SGU, 1975. 120 p. (rus)
8. Ilin V. P., Karpov V. V., Maslennikov A. M. *CHislennye metody resheniya zadach stroitelnoy mekhaniki* [Numerical methods in solving problems of structural mechanics]. Minsk : Vysheyshaya shkola, 1990. 349 p. (rus)
9. Bakouline N., Ignatiev O., Karpov V. Variation parametric research technique of variable by step width shallow shells with finite deflections. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. I. No. 3. 2000. P. 1–6.

Full text of this article in Russian: pp. 28-31.