Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник М.К. Усаров*,
Институт Механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан

Ключевые слова: трехмерные задачи; теория изгиба; теория упругости; теория пластин; перемещение; напряжение; деформация; прочность; дифференциальные уравнения

Теория толстых пластин является одним из актуальных разделов механики деформируемого твердого тела. Построением теории изгиба толстых пластин и оболочек занимались многие исследователи. К их числу относятся такие ученые как Тимошенко С.П., Рейснер Е., Галимов К.З., Муштари Х.М., Власов Б.Ф., Амбарцумян А.С. и т.д. В монографии Амбарцумяна А.С. [1] приводится обзор научных работ, выполненные в этом направлены.

Задачи изгиба толстых пластин изучены в работах многих исследователей в качестве трехмерной задачи теории упругости. В монографии Байда Э.Н. [2] построено точное решение пространственной задачи изгиба толстой ортотропной пластины; Власовым Б.Ф. [3] получено точное решение этой в тригонометрических функциях.

Имеются научные работы, посвященные сведению трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе метода разложения перемещения в бесконечный ряд, не принимая упрощающих гипотез. К таким исследованиям относятся работы Векуа И.Н. [4], Власова В.З. [5], Галеркина Б.Г. [6], Космодамианского А.С., Шалдырвана В.А. [7], Лурье А.И. [8]. В докторской диссертации Бутенко Ю.И. [9] на основе применения вариационно-асимптотического метода построены неклассические модели расчета однослойных и многослойных стержней и пластин. В работах Абдикаримова Р.А., Жгутова В.М. [10,11,12] разработаны математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины с учетом различных свойств материала и ребер жесткости.

Несмотря на хорошую изученность этой проблемы, полученные численные результаты недостаточны. В данной статье также применяется метод разложения в ряд для решения пространственной задачи изгиба толстых ортотропных пластин. Статья является обобщением ранее опубликованных работ [13–19] и дополнена новыми теоретическими и численными материалами.

Пластины (панели, плиты, балки и т.д.) широко применяются в строительстве зданий и сооружений. В [20-22] рассматриваются колебания коробчатой конструкции зданий. Панели и балочные элементы рассматриваются как тонкие пластины, подчиняющиеся гипотезе Кирхгоффа-Лява. В дальнейшем планируется расчет напряжений и перемещений панелей и балочных элементов на основе теории, описанной в работах [13-19].

Рассматривается ортотропная толстая пластина постоянной толщины *H*=2h с размерами a и b в плане. Введем декартову систему координат x_1, x_2 и z. Ось *Oz* направлена вертикально вниз. На пластину действуют внешние распределенные поверхностные нормальные q_3^+, q_3^- (по оси *Oz*) и касательные q_k^+, q_k^- ($k=\overline{1,2}$) (по оси *Ox*$_k$) силы, приложенные соответственно к нижней $z=h$ и верхней $z=-h$ лицевым поверхностям. Материал пластины подчиняется обобщенному закону Гука [1]. Вводятся обозначения: E_1, E_2, E_3 – модули упругости и G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига, $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ – коэффициенты Пуассона материала пластины. Компоненты вектора перемещения обозначим -u_1, u_2, u_3, а элементы тензора напряжения и деформации σ_{ij} и ε_{ij}, $(i, j = 1{,}3)$. Далее воспользуемся обозначениями и правилами теории упругости относительно повторения индексов *i* и *j* в одном члене.

Запишем уравнение равновесия трехмерной теории упругости в виде:

$$\sigma_{kj,j} = 0, \qquad (k, j = 1{,}3)\,. \tag{1}$$

Здесь под *j* понимается суммирование.

Граничные условия на нижней z=h и верхней z=-h лицевых поверхностях имеют вид:

$$\sigma_{33} = q_3^+, \quad \sigma_{3k} = q_k^+, \text{ при } z = h;$$
$$\sigma_{33} = q_3^-, \quad \sigma_{3k} = q_k^-, \text{ при } z = -h. \tag{2}$$

Граничные условия на боковых гранях пластины задаем ниже в зависимости от условия закрепления.

Толстую пластину будем рассматривать как пространственное тело и запишем для него закон Гука в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{22} &= E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + E_{23}\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{33} &= E_{31}\varepsilon_{11} + E_{32}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{12} &= G_{12}\varepsilon_{12},\ \sigma_{13} = G_{13}\varepsilon_{13}\ \ \sigma_{32} = G_{32}\varepsilon_{32}\ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь E_{ij} – упругие постоянные, связанные с модулями упругости и коэффициентами Пуассона:

$$E_{11} = E_1 g_{11},\ E_{22} = E_2 g_{22},\ E_{33} = E_3 g_{33},$$

$$E_{12} = E_{21} = E_1 g_{12} = E_{12} g_{21},\ E_{13} = E_{31} = E_1 g_{13} = E_3 g_{31},$$

$$E_{23} = E_{32} = E_2 g_{23} = E_3 g_{32},$$

где $g_{11} = \dfrac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\mu^2}$, $g_{12} = g_{21} = \dfrac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\mu^2} = \dfrac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{1-\mu^2}$,

$g_{22} = \dfrac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{1-\mu^2}$, $g_{13} = g_{31} = \dfrac{\nu_{13}+\nu_{21}\nu_{32}}{1-\mu^2} = \dfrac{\nu_{31}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\mu^2}$,

$g_{22} = \dfrac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\mu^2}$, $g_{23} = g_{32} = \dfrac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{12}}{1-\mu^2} = \dfrac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{21}}{1-\mu^2}$.

Решение задачи изгиба толстых пластин построим на основе метода разложения по степеням отношения *z*/*h* по толщине пластины, т.е. перемещения представим в виде ряда Маклорена:

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}_k &= B_0^{(k)} + B_1^{(k)}\frac{z}{h} + B_2^{(k)}\left(\frac{z}{h}\right)^2 + B_3^{(k)}\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \cdots, (k = 1,2), \\
\mathrm{u}_3 &= A_0 + A_1\frac{z}{h} + A_2\left(\frac{z}{h}\right)^2 + A_3\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \cdots.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $B_i^{(k)}$, A_i – неизвестные функции двух пространственных координат:

$$B_i^{(k)} = B_i^{(k)}(x_1, x_2), \quad A_i = A_i(x_1, x_2).$$

В силу разложения (4) напряжения запишутся в виде:

$$\begin{cases}
\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}\dfrac{z}{h} + \sigma_{ij}^{(2)}\left(\dfrac{z}{h}\right)^2 + \sigma_{ij}^{(3)}\left(\dfrac{z}{h}\right)^3 + \cdots (i, j = 1,2) \\
\sigma_{3k} = \sigma_{3k}^{(0)} + \sigma_{3k}^{(1)}\dfrac{z}{h} + \sigma_{3k}^{(2)}\left(\dfrac{z}{h}\right)^2 + \sigma_{3k}^{(3)}\left(\dfrac{z}{h}\right)^3 + \cdots (k = 1,3)
\end{cases}. \tag{5}$$

Подставляем разложения (4) с учетом закона Гука (3) в уравнение равновесия (1) и получаем две несвязанные системы уравнений для определения коэффициентов разложения.

Первая система содержит неизвестные коэффициенты $B_{2i}^{(k)}, A_{2i-1}$:

$$\begin{cases} L_k\left(B_{2m-2}^{(1)}, B_{2m-2}^{(2)}\right) + \dfrac{2(2m+1)}{H}\cdot\dfrac{G_{3k}}{\alpha_{3k}} A_{2m-1,k} + \dfrac{8m(2m-1)}{H^2} G_{3k} B_{2m}^{(k)} = 0, \quad (k=1,2) \\ L_3\left(A_{2m-1}\right) + \dfrac{4mG_{3j}}{H\alpha_{3j}} B_{2m,j}^{(k)} + E_{33}\dfrac{8m(2m+1)}{H^2} A_{2m+1} = 0 \end{cases} . \tag{6}$$

Вторая система содержит неизвестные коэффициенты $B_{2i-1}^{(k)}, A_{2i}$:

$$\begin{cases} L_k\left(B_{2m-1}^{(1)}, B_{2m-1}^{(2)}\right) + \dfrac{4m}{H}\cdot\dfrac{G_{3k}}{\alpha_{3k}} A_{2m,k} + \dfrac{8m(2m+1)}{H^2} G_{3k} B_{2m+1}^{(k)} = 0, \quad (k=1,2) \\ L_3\left(A_{2m-2}\right) + \dfrac{2(2m-1)}{H}\dfrac{G_{3j}}{\alpha_{3j}} B_{2m-1,j}^{(j)} + E_{33}\dfrac{8m(2m-1)}{H^2} A_{2m} = 0 \end{cases} , \tag{7}$$

где m =1,2,3,...; $\alpha_{3k} = \dfrac{G_{3k}}{G_{3k} + E_{3k}}$; $\quad \alpha_{3k} = \alpha_{k3}$,

$$L_1(f_1, f_2) = E_{11}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1} + (E_{12} + G_{12})\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + G_{12}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2},$$

$$L_2(f_1, f_2) = G_{21}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + (E_{12} + G_{21})\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + E_{22}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2},$$

$$L_3(f) = G_{31}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + G_{32}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}{}_3 .$$

С помощью разложения (4) граничные условия (2) на лицевых поверхностях z= ±h перепишем в виде двух независимых систем. Первая из них имеет вид:

$$\begin{cases} 4G_{k3}\left(B_2^{(k)} + 2B_4^{(k)} + 3B_6^{(k)} + \cdots\right) - HG_{k3}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_k} + \dfrac{\partial A_5}{\partial x_k} + \cdots\right) = H\overline{q}_k, (k=1,2) \\ 4E_{33}\left(A_1 + 3A_3 + 5A_5 + \cdots\right) + 2HE_{31}\left(\dfrac{\partial B_0^{(1)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_2^{(1)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_4^{(1)}}{\partial x_1} + \cdots\right) + \\ \qquad + 2HE_{32}\left(\dfrac{\partial B_0^{(2)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_2^{(2)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_4^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots\right) = 2H\overline{q}_3 \end{cases} , \tag{8}$$

а вторая запишется в виде:

$$\begin{cases} 2G_{k3}\left(B_1^{(k)} + 3B_3^{(k)} + 5B_5^{(k)} + \cdots\right) + HG_{k3}\left(\dfrac{\partial A_0}{\partial x_k} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_k} + \dfrac{\partial A_4}{\partial x_k} + \cdots\right) = H\widetilde{q}_k, (k=1,2) \\ 4E_{33}\left(A_2 + 2A_4 + 3A_6 + \ldots\right) + HE_{31}\left(\dfrac{\partial B_1^{(1)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_3^{(1)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_5^{(1)}}{\partial x_1} + \cdots\right) + \\ \qquad + HE_{32}\left(\dfrac{\partial B_1^{(2)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_3^{(2)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_5^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots\right) = H\widetilde{q}_3 \end{cases} . \tag{9}$$

Здесь $\overline{q}_k = \dfrac{q_k^+ - q_k^-}{2}, \quad \overline{q}_3 = \dfrac{q_3^+ + q_3^-}{2}, \quad \widetilde{q}_k = \dfrac{q_k^+ + q_k^-}{2}, \quad \widetilde{q}_3 = \dfrac{q_3^+ - q_3^-}{2}.$

С помощью рекуррентных соотношений (6) неизвестные функции $B_{2i}^{(k)}$, A_{2i+1} (i=1,2,…) выразим через $B_0^{(k)}$ и A_1. Подставляя найденные выражения в систему (8), получим систему трех уравнений равновесия толстой пластины, описывающую растяжение-сжатие срединной поверхности и поперечного обжатия пластины в виде:

$$\begin{cases} L_{11}^{(n-2)}\left(B_0^{(1)}\right)+L_{12}^{(n-2)}\left(B_0^{(2)}\right)+L_{13}^{(n-3)}(A_1)=\overline{q}_1, \\ L_{21}^{(n-2)}\left(B_0^{(1)}\right)+L_{22}^{(n-2)}\left(B_0^{(2)}\right)+L_{23}^{(n-3)}(A_1)=\overline{q}_2, \\ L_{31}^{(n-1)}\left(B_0^{(1)}\right)+L_{32}^{(n-1)}\left(B_0^{(2)}\right)+L_{33}^{(n-2)}(A_1)=\overline{q}_3. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогично, с помощью рекуррентных соотношений (7) неизвестные функции $B_{2i+1}^{(k)}$, A_{2i} (i=1,2,…) выразим через $B_1^{(k)}$ и A_0. Подставляя найденные выражения в систему (9), получим систему трех уравнений равновесия толстой пластины, описывающую ее поперечный сдвиг и изгиб в виде:

$$\begin{cases} M_{11}^{(n-2)}\left(B_1^{(1)}\right)+M_{12}^{(n-2)}\left(B_1^{(2)}\right)+M_{13}^{(n-1)}(A_0)=\widetilde{q}_1, \\ M_{21}^{(n-2)}\left(B_1^{(1)}\right)+M_{22}^{(n-2)}\left(B_1^{(2)}\right)+M_{23}^{(n-1)}(A_0)=\widetilde{q}_2, \\ M_{31}^{(n-3)}\left(B_1^{(1)}\right)+M_{32}^{(n-3)}\left(B_1^{(2)}\right)+M_{33}^{(n-2)}(A_0)=\widetilde{q}_3. \end{cases} \tag{11}$$

В уравнениях (10) и (11) $L_{kl}^{(m)}, M_{kl}^{(m)}$, $(k,l=\overline{1,3})$ – линейные операторы, содержат частные производные по пространственным координатам *m*-го порядка. Эти уравнения построены с учетом *n* членов ряда (4) (где *n* меняется от 4 до произвольного ограниченного числа).

Отметим, что исходная задача свелась к двум несвязанным задачам: задача (A), описываемая системой уравнений (10), и задача (B), описываемая системой уравнений (11).

Введем новые функции, определяемые соотношениями:

$$\overline{u}_k=\frac{u_k^{+}+u_k^{-}}{2},\quad \overline{W}=\frac{u_3^{+}-u_3^{-}}{2},\quad \widetilde{u}_k=\frac{u_k^{+}-u_k^{-}}{2},\quad \widetilde{W}=\frac{u_3^{+}+u_3^{-}}{2},$$

где u_n^{-} и u_n^{+} $(n=1,3)$ – перемещения верхней ($z=-h$) и нижней ($z=h$) лицевых поверхностей пластины.

Используя последние выражения, получаем формулы для определения максимальных значений перемещений для верхних ($z=-h$) и нижних ($z=h$) волокон пластины:

$$u_k^{(-)}=\overline{u}_k-\widetilde{u}_k,\quad u_3^{(-)}=\widetilde{W}-\overline{W}, \tag{12а}$$

$$u_k^{(+)}=\overline{u}_k+\widetilde{u}_k,\quad u_3^{(+)}=\widetilde{W}+\overline{W}, \tag{12б}$$

где:

$$\widetilde{u}_k=B_1^{(k)}+B_3^{(k)}+\ldots+B_{2n+1}^{(k)},\ \widetilde{W}=A_0+A_2+\ldots+A_{2n}, \tag{12в}$$

$$\overline{u}_k=B_0^{(k)}+B_2^{(k)}+\ldots+B_{2n}^{(k)},\quad \overline{W}=A_1+A_3+\ldots+A_{2n+1}. \tag{12г}$$

Получены формулы для определения максимальных значений напряжений для верхних ($z=-h$) волокон пластины:

$$\begin{gathered} \sigma_{11}^{(-)}=\overline{\sigma}_{11}-\widetilde{\sigma}_{11},\quad \sigma_{12}^{(-)}=\overline{\sigma}_{12}-\widetilde{\sigma}_{12}, \\ \sigma_{22}^{(-)}=\overline{\sigma}_{22}-\widetilde{\sigma}_{22} \end{gathered} \tag{13а}$$

и для нижних волокон ($z=h$) пластины:

$$\sigma_{11}^{(+)} = \overline{\sigma}_{11} + \widetilde{\sigma}_{11}, \quad \sigma_{12}^{(+)} = \overline{\sigma}_{12} + \widetilde{\sigma}_{12},$$
$$\sigma_{22}^{(+)} = \overline{\sigma}_{22} + \widetilde{\sigma}_{22}. \tag{13б}$$

Здесь приняты обозначения $\overline{\sigma}_{11}, \overline{\sigma}_{12}, \overline{\sigma}_{22}$ и $\widetilde{\sigma}_{11}, \widetilde{\sigma}_{12}, \widetilde{\sigma}_{22}$ – значения напряжений, определяемые при решении задачи (A) и (B) соответственно:

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(4)} + \ldots, \; (i, j = 1{,}2). \tag{14}$$

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(3)} + \sigma_{ij}^{(5)} + \ldots, \; i, j = 1{,}2. \tag{15}$$

Пусть толстая пластина на верхней поверхности $z = -h$ подвергается только действию нормальной распределенной силы, $q_k^+ = q_k^- = 0, (k = 1{,}2);$ $q_3^- = -q \sin\frac{\pi x_1}{a} \sin\frac{\pi x_2}{b}$, где q – параметр нагрузки. Тогда согласно нашим обозначениям получим грузовые члены в правых частях системы уравнений (10) и (11):

$$\overline{q}_3 = -\frac{q}{2}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}, \qquad \overline{q}_1 = \overline{q}_2 = 0,$$

$$\widetilde{q}_3 = \frac{q}{2}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}, \qquad \widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = 0.$$

Считаем, что края пластины шарнирно закреплены. Запишем граничные условия [1] на боковых гранях:

$$\sigma_{11} = 0,\; u_2 = 0,\; u_3 = 0, \text{ (при } x_1 = 0;\ a),$$
$$\sigma_{22} = 0,\; u_1 = 0,\; u_3 = 0, \text{ (при } x_2 = 0;\ b). \tag{16}$$

Решение системы уравнений (11), удовлетворяющее граничным условиям (16), запишется в тригонометрических функциях в виде:

$x \to x_1, \;\; y \to x_2$

$$B_0^{(1)} = b_0^{(1)} \cos(\frac{\pi x_1}{b})\sin(\frac{\pi x_2}{a}),\; B_0^{(2)} = b_0^{(2)} \cos(\frac{\pi x_2}{b})\sin(\frac{\pi x_1}{a}), \tag{17}$$

$$A_1 = a_1 \sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}).$$

Решение системы уравнений (11), удовлетворяющее граничным условиям (16), имеет вид:

$x \to x_1, \;\; y \to x_2$

$$B_1^{(1)} = b_0^{(1)} \cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\; B_1^{(2)} = b_0^{(2)} \cos(\frac{\pi x_2}{b})\sin(\frac{\pi x_1}{a}), \tag{18}$$

$$A_0 = a_0 \sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}).$$

Подставляя решения (17) в уравнения равновесия (10), получим системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_0^{(1)},\, b_0^{(2)},\, a_1$. Аналогично, подставляя решения (18) в уравнения равновесия (11), получим системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_0^{(1)},\, b_0^{(2)},\, a_1$. Для конкретных параметров квадратной *(a=b)* изотропной пластины произведем расчет максимальных значений напряжения и перемещения пластины. Относительную толщину принимаем $H/a = 1/3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Тогда имеем $b_1^{(1)} = b_1^{(2)} = b_1$, $b_0^{(1)} = b_0^{(2)} = b_0$. Следовательно, из формул (12) и (13) для квадратной пластины: $u_1 = u_2$ и $\sigma_{11} = \sigma_{22}$.

В табл. 1-4 приводятся численные результаты расчета перемещения и напряжения, полученные с увеличением количества членов рядов (4). В таблицах 1–4 N – количество удерживаемых членов ряда (4). Расчеты проводились для N от четырех до десяти. Расчеты показывают, что получить удовлетворительную точность численных результатов при удержании малого количества членов невозможно. Сходимость численных результатов обеспечивается, когда в рядах (4) содержится не менее восьми членов.

Таблица 1. Значения безразмерных неизвестных функций $Eb_0/Hq, Ea_1/Hq, Ea_0/Hq, Eb_1/Hq$.

N	Eb_1/Hq	Ea_0/Hq	Eb_0/Hq	Ea_1/Hq
4	-0.4748	1.7115	-0.0958	-0.2279
6	-0.8685	3.3089	-0.1090	-0.2326
8	-0.9137	3.4869	-0.1095	-0.2328
10	-0.9147	3.4906	-0.1095	-0.2328

Таблица 2. Максимальные безразмерные значения напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \tau_{11}, \sigma_{33}$ ***на срединной поверхности пластины (z=0)***

N	σ_{12}/q	σ_{11}/q	τ_{13}/q	σ_{33}/q
4	-0.0770	-0.0705	0.3241	-0.4982
6	-0.0878	-0.0490	0.6647	-0.4946
8	-0.0882	-0.0481	0.7015	-0.4944
10	-0.0882	-0.0481	0.7023	-0.4944

Перемещения u_1, u_2 и напряжения σ_{11}, σ_{12} на срединной поверхности (z=0) пренебрежимо малы (табл. 1 и 2). Максимальные значения нормального перемещения a_0 и угла поворота срединной поверхности b_1 получены с учетом восьми членов ряда (4) и с высокой точностью совпадают с результатами точного расчета [2].

Таблица 3. Безразмерные значения перемещений u_1, u_3 ***и напряжения*** σ_{11}, σ_{12} ***на верхней поверхности пластины*** $z=-h$.

N	Eu_1/Hq	Eu_3/Hq	σ_{12}/q	σ_{11}/q
4	0.5695	1.8876	0.4588	-1.2806
6	1.0736	3.4218	0.8648	-2.0346
8	1.1321	3.5927	0.9119	-2.1222
10	1.1333	3.5963	0.9129	-2.1240

Таблица 4. Безразмерные значения перемещений u_1, u_3 ***и напряжения*** σ_{11} ***на нижней поверхности пластины*** $z=h$.

N	Eu_1/Hq	Eu_3/Hq	σ_{12}/q	σ_{11}/q
4	-0.6457	1.4485	-0.5202	0.9960
6	-1.1847	3.9700	-0.9543	1.7722
8	-1.2447	3.1404	-1.0026	1.8620
10	-1.2459	3.1440	-1.0036	1.8639

Из расчетов, полученных нами в таблицах 1-4, можно сделать вывод, что перемещения верхнего и нижнего слоя пластины значительно отличаются друг от друга. Особенно существенно отличается нормальное перемещение u_3 (прогиб). Обнаружено, что максимальное значение напряжения на верхней поверхности z=−h σ_{11}/q =2,1240 (табл. 3), которое существенно отличается от значения напряжения нижнего слоя z=h σ_{11}/q =1,8639 (табл. 4), является сжимающим. Таким образом, гипотеза о несжимаемости пластины в поперечном направлении и гипотеза плоских сечений не подтверждаются.

Сопоставляя численные результаты, приведенные в табл. 1-4 и результаты точного расчета [2], убедимся в том, что перемещения и напряжения вычислены с высокой точностью.

В табл. 5-7 приведены численные результаты для квадратной трансверсально-изотропной пластины с отношениями $H/a=1/3$, $H/b=1/3$ и коэффициентами Пуассона $\nu_1=\nu_3=0{,}3$. В табл. 5 показаны значения максимального безразмерного нормального перемещения срединной плоскости (прогиба) Ea_0/Hq. Отметим, что значения Eb_0/Hq и Ea_1/Hq с увеличением значения отношения E_3/G_{12} стремятся к нулю.

Следовательно, для пластин из несжимаемого в поперечном направлении материала система уравнений (10) дает тривиальное решение.

Таблица 5. Максимальные значения перемещения u_3^- ***трансверсально-изотропной пластины на верхнем слое*** $z=-h$

E_3/G_{12}	G_{12}/G_{13}					
	1.00	**2.00**	**3.00**	**4.00**	**5.00**	**6.00**
1.000	3.1995	4.1602	5.1586	6.2012	7.2944	8.4452
2.000	3.4345	4.5915	5.7442	6.8949	8.0459	9.1991
2.600	3.4906	4.6941	5.8984	7.0909	8.2785	9.4630
6.000	3.5986	4.9100	6.2074	7.4930	8.7678	10.0358
10.000	3.6726	4.9765	6.3064	7.6239	8.9310	10.2290
∞	3.6827	5.0778	6.4584	7.8268	9.1846	10.5333

В табл. 6 приведены безразмерные числовые значения нормального напряжения σ_{11} в зависимости от изменения отношения G_{12}/G_{13} и E_3/G_{13}.

Гипотеза о не сжимаемости в поперечном направлении материала пластины приводит к уменьшению нормального напряжения σ_{11} на 8-25% (табл.6).

В табл. 7 приведены безразмерные числовые значения касательного напряжения σ_{12} в зависимости от изменения отношения G_{12}/G_{13} и E_3/G_{13}.

Таблица 6. Максимальные значения безразмерного напряжения σ_{11} ***трансверсально-изотропной пластины на верхнем слое*** $z=-h$

E_3/G_{12}	G_{12}/G_{13}					
	1.00	**2.00**	**3.00**	**4.00**	**5.00**	**6.00**
1.000	-2.3664	-2.8522	-3.2442	-3.5459	-3.7558	-3.8682
2.000	-2.1720	-2.5287	-2.8528	-3.1538	-3.4294	-3.6837
2.600	-2.1240	-2.4417	-2.7362	-3.0110	-3.2686	-3.5111
4.000	-2.0667	-2.3346	-2.5859	-2.8230	-3.0481	-3.2697
6.000	-2.0343	-2.2743	-2.5319	-2.6764	-3.0147	-3.0350
10.000	-2.0010	-2.2085	-2.4034	-2.5879	-2.7633	-2.9310
∞	-1.9562	-2.1205	-2.2734	-2.4167	-2.5518	-2.6797

Таблица 7. Максимальные значения безразмерного напряжения σ_{12} ***трансверсально-изотропной пластины на верхнем слое*** $z=-h$

E_3/G_{13}	G_{12}/G_{13}					
	1.00	**1.20**	**1.50**	**2.00**	**2.50**	**3.00**
1.50	0.8057	0.7719	0.7187	0.6250	0.5287	0.4195
2.60	0.9129	0.9025	0.8868	0.8532	0.8286	0.7810
3.50	0.9520	0.9489	0.9451	0.9395	0.9279	0.9211
4.00	0.9628	0.9642	0.9653	0.9571	0.9586	0.9647
10.00	0.9923	1.0334	1.0476	1.0198	1.1088	1.0515
∞	1.0533	1.0775	1.1074	1.1417	1.2074	1.2574

Влияние отношения E_3/G_{12} с увеличением отношения G_{12}/G_{13} становится более существенным для напряжения σ_{12} (табл. 7): его значения увеличатся от 15% до 3 раз. Расчеты показали, что если $G_{12}/\ G_{13} \le 2$, то необходимо учитывать по 8-10 членов в каждом ряду (4), а если $2 \le G_{12}/\ G_{13} \le 4$ – 10-12 членов. Отметим, что напряжения и перемещения верхнего и нижнего слоя вычислены по формулам (12) и (13).

Для получения численных результатов напряжений и перемещений для отношения $G_{12}/\ G_{13} \ge 5$ требуется учитывать 12 членов ряда (4), что усложняет расчет пластин, так как при этом порядок уравнений систем (10) и (11) очень высок. Чтобы устранить этот недостаток, в работе [18] предложена новая двумерная теория толстых пластин, построенная на основе метода разложения и описываемая двумя несвязанными системами.

Выводы:

1) на основе применения метода разложения в ряд построена двумерная теория ортотропных пластин по трехмерной теории упругости;
2) построены рекуррентные формулы для определения коэффициентов разложения;
3) построены двумерные уравнения равновесия толстых ортотропных пластин относительно кинематических факторов срединной плоскости;
4) решена задача поперечного изгиба толстых пластин;
5) гипотеза о несжимаемости пластины в поперечном направлении и гипотеза плоских сечений не подтверждаются.

Литература

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. 2- е изд., доп. М. : Наука, 1987. 360 с.
2. Байда Э. Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 232 с.
3. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестник МГУ, сер. Механика, математика, астрономия и химия. 1957. № 2. С. 25-34.
4. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М. : Наука, 1982. 288 с.
5. Власов В. З. Избранные труды. Т. I. М. : Изд. АН СССР. 529 с.
6. Галеркин Б. Г. Упругие прямоугольные и треугольные свободно опертые толстые плиты, подверженные изгибу // ДАН СССР, серия А. 1931. С. 273-280.
7. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. Киев : Наук. думка, 1978. 240 с.
8. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М. : Гос. тех. издат.Ю 1955. 492 с.
9. Бутенко Ю. И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин : дис…д-ра физ.-мат. наук. Казань, 2003. 402 с.
10. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 6. С. 38–47.
11. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 2. С. 45–48.
12. Жгутов В. М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7. С. 46–54.
13. Усаров М. К. Решение пространственной задачи теории упругости для толстых пластин // Проблемы механики. 2005. №4. С. 25-34.
14. Усаров М. К. К теории изгиба толстых ортотропных пластин без учета упрощающих гипотез // Проблемы механики. 2005. №5-6. С. 28-32.
15. Усаров М. К. Задача изгиба ортотропной пластины в трехмерной постановке // Прикладные задачи математики и механики : Материалы XV межд. научн. конференции ученых Украины, Беларуси и России. Севастополь, 17-21 сентября 2007 г. С. 68-70.
16. Усаров М. К. Задача изгиба толстых ортотропных пластин в рамках трехмерной теории упругости // Проблемы механики. 2008. №2-3. С.40-43.
17. Усаров М. К. Изгиб толстых пластин // Вестник ТашИИТ. 2008. №2. С. 30-35.
18. Усаров М. К. Изгиб анизотропной пластины // Проблемы механики. 2009. №2-3. С. 34-37.
19. Усаров М. К. Вынужденные колебания толстых пластин // Проблемы механики. 2010. №3. С. 15-18.
20. Усаров М. К. Маматисаев Г. И. Свободные колебания коробчатой конструкции здания // Проблемы механики. 2009. №5-6. С.31-34.
21. Усаров М. К. Маматисаев Г. И. Вынужденные колебания коробчатой конструкции панельных зданий // Проблемы механики. 2010. №.2 С. 23-25.
22. Усаров М. К. Маматисаев Г. И. Вынужденные колебания коробчатой конструкции панельных зданий при динамических воздействиях // Проблемы механики. 2010. №4. С. 19-22.

** Махаматали Корабоевич Усаров, г. Ташкент, Узбекистан*
Тел.: +998(71) 262-71-42, эл.почта: makhamatali.usarov@gmail.com

The problem of bending the thick orthotropic plate of three-dimensional formulation

M.K. Usarov,
Institute of Mechanics and Seismic Stability of Building, Uzbekistan Academy of Sciences,
+998(71) 262-71-42, e-mail: makhamatali.usarov@gmail.com

Key words

three-dimensional problems, theory of bending elasticity, theory of plates, displacement, stress, strain, strength, differential equations

Abstract

Article provides a solution to the problem of bending the thick three-dimensional orthotropic plate under the action of an external sinusoidal distributed normal load.

As the equations of equilibrium the three-dimensional equations of elasticity theory were selected. The solution of the equations of equilibrium can be expanded in a Maclaurin series, and the problem reduces to two dimensions. The numerical values of stresses and displacements were determined.

Based on the analysis of numerical results it was ascertained that the required accuracy of calculations is achieved by taking into account the eight members of the Maclaurin series.

References

1. Ambartsumyan S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin: Prochnost, ustoychivost i kolebaniya* [The theory of anisotropic plates: strength, stability and vibrations]. 2- e izd., dop. Moscow : Nauka, 1987. 360 p.
2. Bayda E. N. *Nekotorye prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Several three-dimensional problems of theory of elasticity]. Lenangrad : Izd-vo Leningr. un-ta, 1983. 232 p.
3. Vlasov B. F. *Vestnik MGU*. ser. Mekhanika, matematika, astronomiya i khimiya. 1957. No. 2. p. 25-34.
4. Vekua I. N. Nekotorye *obshchie metody postroeniya razlichnykh variantov teorii obolochek* [Several general methods of construction of the shell theory in different variations]. Moscow : Nauka, 1982. 288 p.
5. Vlasov V. Z. *Izbrannye trudy* [Selected works]. vol. I. Moscow : Izd. AN SSSR. 529 p.
6. Galerkin B. G. *Uprugie pryamougolnye i treugolnye svobodno opertye tolstye plity, podverzhennye izgibu* [Elastic rectangular and triangular free-ended thick plates liable to wear-and-tear]. DAN SSSR, seriya A. 1931. p. 273-280.
7. Kosmodamianskiy A. S., Shaldyrvan V. A. *Tolstye mnogosvyaznye plastiny* [Thick multiply connected plates]. Kiev : Nauk. dumka, 1978. 240 p.
8. Lure A. I. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Three-dimensional problems of the theory of elasticity]. Moscow : Gos. tekh. izdat.YU 1955. 492 p.
9. Butenko YU. I. *Variatsionno-asimptoticheskie metody postroeniya neklassicheskikh modeley rascheta odnosloynykh i mnogosloynykh sterzhney i plasti*n [A variational-asymptotic method of construction the nonclassical models for calculation of the single-layer and multilayer bars and plates] : theses. Kazan, 2003. 402 p.
10. Abdikarimov R. A., ZHgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 6. p. 38–47.
11. ZHgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 2. p. 45–48.
12. ZHgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 7. p. 46–54.
13. Usarov M. K. *Problemy mekhaniki.* 2005. No. 4. p. 25-34.
14. Usarov M. K. *Problemy mekhaniki*. 2005. No. 5-6. p. 28-32.
15. Usarov M. K. *Materialy KHV mezhd. nauchn. konferentsii uchenykh Ukrainy, Belarusi i Rossii*. Sevastopol, 17-21 sentyabrya 2007 g. p. 68-70.
16. Usarov M. K. *Problemy mekhaniki.* 2008. No. 2-3. p.40-43.
17. Usarov M. K. *Vestnik TashIIT*. 2008. No. 2. p. 30-35.
18. Usarov M. K. *Problemy mekhaniki*. 2009. No. 2-3. p. 34-37.
19. Usarov M. K. *Problemy mekhaniki*. 2010. No. 3. p. 15-18.
20. Usarov M. K. Mamatisaev G. I. *Problemy mekhaniki*. 2009. No. 5-6. p.31-34.
21. Usarov M. K. Mamatisaev G. I. *Problemy mekhaniki*. 2010. No. .2 p. 23-25.
22. Usarov M. K. Mamatisaev G. I. *Problemy mekhaniki*. 2010. No. 4. p. 19-22.

Full text of this article in Russian: pp. 40-47