

## Изменение диссипации энергии при переходе от ламинарного режима к турбулентному

*Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой А.Д. Гиргидов\*,  
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

**Ключевые слова:** диссипация энергии; ламинарный и турбулентный потоки; обтекание пластины; течение в цилиндрической трубе

Связи диссипации механической энергии в потоке несжимаемой жидкости с потерями напора в случае течения в трубах или с лобовым сопротивлением движению тела в жидкой среде в литературе (см. например [1-5]) уделяется недостаточное внимание. Вместе с тем эта связь может иметь существенное практическое значение и позволяет получить нетривиальные результаты [6].

Вопрос с диссипации энергии в гидромеханике часто рассматривается в связи с теоремой Гельмгольца о минимуме диссипации [1]. При этом на границах выделенного контрольного объема задаётся скорость жидкости, т.е. требуется соблюдение кинематических условий. В некоторых задачах, например при исследовании перехода ламинарного режима движения в турбулентный, может оказаться целесообразным выяснение особенностей диссипации механической энергии при заданных динамических условиях (силы, напряжений) на границах потока. Рассмотрим два примера такой постановки вопроса.

Обтекание пластины, двигающейся в покоящейся жидкости со скоростью  $V$  с постоянным тяговым усилием  $F$  (на единицу ширины пластины):

$$F = c \frac{\rho V^2}{2}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $c$  – коэффициент сопротивления.

При ламинарном режиме [2]:

$$c_l = 1,328 Re_L^{-1/2}, \quad (2)$$

где  $Re_L = \frac{VL}{\nu}$ ;  $L$  – длина пластины (вдоль потока);  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

При турбулентном режиме [1]:

$$c_t = 0,0307 Re_L^{-1/7}. \quad (3)$$

Если ламинарный режим перешел в турбулентный, то коэффициент сопротивления возрастет, а скорость  $V_l$ , соответствующая ламинарному режиму, при постоянной тяге уменьшится до значения скорости  $V_t$ , соответствующей турбулентному режиму. Чтобы оценить значение  $V_l/V_t$ , приравняем значения тяги при двух режимах:

$$c_l \frac{\rho V_l^2}{2} = c_t \frac{\rho V_t^2}{2}. \quad (4)$$

Используя (2) и (3), из (4) имеем:

$$\frac{V_l}{V_t} = 0,231 \left( \frac{V_l L}{\nu} \right)^{0,385}.$$

Для значения  $\frac{V_l L}{\nu} = 10^6$  получим:

$$V_l = 4,72 V_t.$$

Таким образом, при переходе ламинарного режима в турбулентный в случае постоянной тяги скорость пластины уменьшается в несколько раз, и следовательно, диссипация энергии за единицу времени уменьшится во столько же раз. Вместе с тем работа, необходимая для перемещения пластины на фиксированное расстояние, при обоих режимах будет одинаковой.

### Течение Гагена–Пуазейля

Рассмотрим с этих же позиций течение Гагена-Пуазейля в цилиндрической трубе диаметром  $D$ , соединяющей два резервуара. Свободные поверхности жидкости в резервуарах поддерживаются на постоянном уровне (например, с помощью устройства холостых сливов). Давление на свободные поверхности одинаково, а разность уровней жидкости в резервуарах равна  $Z$ . Во всех точках контрольной поверхности, ограничивающих объем жидкости в резервуарах и трубе, скорость жидкости равна нулю. Увеличивая длину трубы  $l$ , можно добиться того, что потери энергии на вход в трубу и на выход из трубы в резервуар, а также длина начального участка станут пренебрежимо малы. При этом в трубе будет иметь место продольное однородное движение, а потери напора по длине  $h_l$ , вычисленные по формуле Вейсбаха-Дарси, будут равны  $Z$ :

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения;  $v$  – средняя (объемная) скорость жидкости в трубе.

Согласно уравнению Бернулли для потока вязкой жидкости (выражающему закон изменения кинетической энергии [2]) диссипация энергии внутри трубы за единицу времени:

$$\int_V \rho \varepsilon dV = \rho g Q Z = \rho g \frac{\pi D^2}{4} v Z, \quad (6)$$

где  $V$  – объем трубы;  $Q$  – расход жидкости.

Обратим внимание на то, что при сделанных предположениях продольный градиент давления в трубе постоянен и равен:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho g Z}{l} = \lambda \frac{\rho v^2}{2D},$$

где  $x$  – продольная координата. Это означает, что касательное напряжение на стенке трубы также постоянно на всей внутренней поверхности трубы:

$$\tau_0 = \frac{\rho g D Z}{4l}. \quad (7)$$

Таким образом, так и в случае пластины, на поток в трубе действует постоянная сила:

$$F = \tau_0 \pi D l = \frac{\pi D^2}{4} \rho g Z. \quad (8)$$

На первый взгляд, на поверхности объема жидкости в резервуарах и трубе скорость жидкости равна нулю, и следовательно, выполняются граничные условия теоремы Гельмгольца о минимуме диссипации. Однако следует обратить внимание, что равенство нулю скорости жидкости на свободной поверхности в резервуарах выполняется лишь асимптотически (при неограниченном увеличении размера резервуара). При этом отношение бесконечно малых скоростей при ламинарном и турбулентном режимах остается постоянным и равным отношению средних скоростей при этих режимах. Поэтому, хотя для течения Гагена-Пуазеля имеет место минимум диссипации [7], в рассматриваемом примере течения в трубе, соединяющей два резервуара, условия теоремы Гельмгольца не соблюдаются.

Как показано теоретически в [8,9], (см. также [10,11,12]), средняя скорость в трубе  $v_l$  при турбулентном режиме меньше, чем скорость  $v_l$  при ламинарном. Это следует также из экспериментального графика Никурадзе [1]. Если при одном и том же градиенте давления могут существовать и ламинарный и турбулентный режимы, то имеем равенство:

$$\lambda_l \frac{l}{D} \frac{\rho v_l^2}{2} = \lambda_t \frac{l}{D} \frac{\rho v_t^2}{2}, \quad (9)$$

где  $\lambda_l$  и  $\lambda_t$  – коэффициенты гидравлического трения при ламинарном и турбулентном режимах соответственно. Из графика Никурадзе следует, что во всём диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = \frac{vD}{\nu}$ , где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости, в котором может существовать турбулентный режим,  $\lambda_t > \lambda_l$ . При этом из (9) следует, что  $v_l > v_t$ , и согласно (5) диссипация энергии при турбулентном режиме в контрольном объеме меньше, чем при ламинарном.

Чтобы оценить, насколько уменьшается диссипация энергии, предположим, что при турбулентном режиме труба гидравлически гладкая, так что

$$\lambda_t = \frac{0,3164}{Re_t^{0,25}},$$

а при ламинарном  $\lambda_l = \frac{64}{Re_l}$ . Подставляя эти выражения в (9), получим:

$$\frac{64}{Re_l} \frac{l}{D} \frac{\rho v_l^2}{2} = \frac{0,3164}{Re_t^{0,25}} \frac{l}{D} \frac{\rho v_t^2}{2}.$$

Из этого равенства следует:

$$\frac{v_l}{v_t} = 0,0494 Re_t^{0,75}. \quad (10)$$

Приняв в качестве минимального числа Рейнольдса, при котором реализуется развитый турбулентный режим,  $Re = 4000$ , получим  $v_l = 2,48 v_t$ .

Таким образом, в соответствии с (6) диссипация энергии при турбулентном режиме в 2,5 раза меньше, чем при ламинарном. Отметим, что при соответствующем расчетным условиям значении  $Re \cong 10^4$  ламинарный режим в трубе может существовать: если создать соответствующие условия, то ламинарное движение можно наблюдать при  $Re = 4 \times 10^4$  [8].

Представляется полезным отметить то, что граничные условия для цилиндрической трубы неограниченной длины без указания на их присоединения к резервуарам в полярной системе координат  $(x, r)$ , где  $r$  – расстояние от оси трубы, имеют следующий вид:

$$\text{при } r = \frac{D}{2} \text{ имеем } u_x = 0; \tau_0 = \text{const}, \text{ где } u_x \text{ – продольная скорость жидкости.}$$

Таким образом, на поверхности цилиндра для идентификации потоков должны быть заданы скорость (равная нулю) и (в соответствии с законом Ньютона для вязких напряжений) её нормальная производная  $\frac{\partial u_x}{\partial r}$ , которая и определяет среднюю скорость потока:

$$v = \sqrt{\frac{8}{\lambda} \nu \frac{\partial u_x}{\partial r}}. \quad (11)$$

Задание на поверхности трубопровода двух кинематических условий равносильно принятию постоянного значения силы  $F$ , действующей со стороны трубы на поток.

Приведенные примеры демонстрируют следующее: если сила, действующая со стороны твердых границ на поток жидкости, постоянна, то при потере устойчивости ламинарного потока и переходе к турбулентному режиму возникает поле скорости, уменьшающее диссипацию механической энергии в несколько (в два и более) раз по сравнению с ламинарным режимом.

### Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1978. 736 с.
2. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 545 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М. : Мир, 1973. 758 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. IV, Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. : Наука, 1963. 742 с.
6. Гиргидов А. Д. О лобовом сопротивлении движению цилиндра // Инженерно-строительный журнал. 2011. №1. С. 9-11.
7. Гиргидов А. Д. О диссипации энергии при движении несжимаемой жидкости // ДАН. 2009. Том 425, №3. С. 1-4.
8. Thomas T. Y. Qualitative analysis of the flow of fluids in pipes // Amer. J. Math. 1942. Vol. 64. P. 754.
9. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М. : Мир, 1981. 640с.
10. Busse F. H. Bounds on the transport of mass and momentum by turbulent flow between parallel plates // ZAMP. 1969. Vol. 20. Pp. 1-14.
11. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
12. Joseph D. D. Response curves for plane Poiseuille flow // Advances in applied mechanics. 1974. Vol. 14. Pp. 241-278.

*\*Артур Давидович Гиргидов, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)552-64-01; эл. почта: hydraulika@cef.spbstu.ru*

некоммерческое партнерство



В рамках II Всероссийской научно-практической конференции  
«Саморегулирование в строительном комплексе:  
повседневная практика и законодательство»

**14 сентября 2011, Санкт-Петербург**

Тематическая секция

**Изменения в законодательстве, касающиеся экспертизы  
проектной документации и результатов инженерных  
изысканий: проблемы и перспективы**

**Организатор - НП «Региональное объединение»**

В программе обсуждения:  
Проблемы и перспективы развития института негосударственной экспертизы  
Ценообразование на услуги по проведению экспертизы  
Новые требования к подготовке, переподготовке и аттестации кадров

Место проведения – конференц-центр гостиницы «Парк Инн Пулковская»  
Предварительная регистрация обязательна:  
(812) 277-1788, 577-1767, e-mail: lb@np-ro.ru, Людмила Белых

## Changing of energy dissipation in the transition of laminar flow to turbulence

**A.D. Girgidov,**

*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia,  
+7(812)552-64-01; e-mail: hydraulika@cef.spbstu.ru*

### *Key words*

energy dissipation; turbulent and laminar flow; flow past a cylinder; flow in a pipe

### **Abstract**

Under the same fixed dynamical boundary conditions the energy dissipation in laminar and turbulent flow are compared. As examples the flow past a plate and the flow through a pipe are considered.

It is found out that in turbulent flow energy dissipation is essentially less than in laminar flow (under the same boundary dynamical conditions).

### *References*

1. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow : Nauka, 1978. 736 p. (rus)
2. Girgidov A. D. *Mekhanika zhidkosti i gaza (gidravlika)* [Fluid mechanics (hydraulics)]. Saint-Petersburg, Izd-vo Politekh. un-ta, 2007. 545 p. (rus)
3. Betchelor G. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [Introduction to fluid dynamics]. Moscow : Mir, 1973. 758 p.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. IV, Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 4. Hydrodynamics]. Moscow : Nauka, 1986. 736 p.
5. Shlikhting G. *Teoriya pogrannichnogo sloya* [Boundary-layer theory]. Moscow : Nauka, 1963. 742 p.
6. Girgidov A. D. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 1. Pp. 9-11.
7. Girgidov A. D. *Dnevnik Akademii nauk*. 2009. Vol. 425, No. 3. Pp. 1-4.
8. Thomas T. Y. Qualitative analysis of the flow of fluids in pipes. *Amer. J. Math.* 1942. Vol. 64. P. 754.
9. Dzhozef D. *Ustoychivost dvizheniy zhidkosti* [Motion stability of the fluid]. Moscow : Mir, 1981. 640 p.
10. Busse F. H. Bounds on the transport of mass and momentum by turbulent flow between parallel plates. *ZAMP*. 1969. Vol. 20. Pp. 1-14.
11. Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti* [Mathematical foundation of classical fluid mechanics]. Moscow : Izd-vo inostr. lit., 1963. 256 p.
12. Joseph D. D. Response curves for plane Poiseuille flow. *Advances in applied mechanics*. 1974. Vol. 14. Pp. 241–278.

**Full text of this article in Russian: pp. 49-52**