

Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей

*Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой В.В. Лалин;
аспирант В.А. Рыбаков*;*

ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: термопанель; кручение; деформация; интерполяционные полиномы; деформация сдвига; бимомент; матрица жесткости

В последние годы в России и за рубежом [1, 2] наблюдается широкое применение металлоконструкций в промышленном и гражданском строительстве. Особое место в строительной индустрии занимают легкие стальные тонкостенные конструкции, имеющие ряд технологических и эксплуатационных достоинств (легкость, быстровозводимость и т.д.) [3, 4].

В сборно-монолитном и каркасном строительстве, объемы которого постоянно растут, в качестве эффективных и экономичных ограждающих конструкций можно использовать так называемые термопанели [5, 6]. Термопанели – это панели наружных стен с каркасом из тонкостенных термопрофилей [7]. Из термопанелей строятся наружные стены многоэтажных зданий на железобетонном или стальном каркасе, которые воспринимают ветровую нагрузку, действующую на фасад, и переносят её на основной несущий каркас здания (рис. 1).



Рисунок 1. Вариант ограждающей конструкции: навесная конструкция стены

Теории расчета обычных (толщиной, как правило, более 4 мм) конструкций оказываются неприменимы к тонкостенным, являющимся основными, конструкциям термопанели, ввиду малой толщины профилей.

Для повседневного решения инженерных задач расчета элементов тонкостенных конструкций можно выделить принципиально 2 группы способов расчета: основанные на оболочечном моделировании и на стержневом.

Первая группа связана с представлением тонкостенного стержня в виде оболочки и дальнейшим численным расчетом, как правило, с помощью метода конечных элементов, в программных комплексах SCAD, Lira, SOFiSTiK и т.д. [8-12 и др.]. Такие способы расчета являются достаточно точными, но весьма трудоемкими в инженерно-конструкторской деятельности, особенно с точки зрения комплексного расчета конструкции.

Во второй группе способов можно выделить аналитические и численные методы расчета тонкостенных стержней, связанные с введением дополнительной «седьмой» степени свободы [13, 14].

Как нами отмечалось ранее в [15, 16], аналитические методы решения [17-20], как правило, являются трудоемкими для повседневного применения ввиду сложности математических

уравнений и функций, и возникает необходимость использования численных методов расчета, например, метода конечных элементов (МКЭ) [21, 22].

Так, в диссертации Туснина А.Р. [23] предлагается так называемый метод тонкостенных конечных элементов, анализируя который, следует отметить следующее.

1. Безразмерные коэффициенты μ, g, α, λ при компонентах матриц жесткости являются отношением гиперболических функций, например,

$$\mu = \frac{kl(kl \operatorname{ch}(kl) - \operatorname{sh}(kl))}{kl \operatorname{sh}(kl) - 2\operatorname{ch}(kl) + 2}, \quad (1)$$

знаменатель которых при определенных значениях параметров может быть вырожден.

2. Не решена задача учета деформаций сдвига при кручении в тонкостенных стержнях. Принимаемое в теории В.З. Власова [10] допущение о равенстве нулю угла сдвига $\gamma_\omega = 0$, автоматически влечет за собой зависимость между углом закручивания $\theta(x)$ и мерой деформации $\beta(x)$:

$$\theta' = \beta. \quad (2)$$

3. Метод тонкостенных конечных элементов неприменим для расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля (коробчатый, составной и др.).

С другой стороны, в различных теориях тонкостенных стержней фигурирует понятие дополнительного силового фактора, **бимомент**, отвечающего «седьмой степени свободы» – деформации тонкостенного стержня [14, 18].

Следует отметить, что в инженерной практике бимомент является важной характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения [14, 18]:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{B_\omega}{W_\omega}. \quad (3)$$

Как известно, нормальные напряжения относятся к первой группе предельного состояния конструкции, нормируются строительными нормами, отвечают за прочность и устойчивость конструкции и, соответственно, нуждаются в точном вычислении.

Также следует отметить, что в новом СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*», введенного в действие с 20 мая 2011 г., бимомент как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами: формула (43) для поперечно-изгибаемых элементов сплошного сечения; формулы (105) и (106) – для элементов, воспринимающих продольную силу с изгибом.

Формулы (43), (105) и (106) СП 16.13330.2011 по своей сути являются модификацией формулы (3), приведенной выше.

Согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [9, 14, 18, 19, 23, 24 и др.], в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибного кручения, составляющая нормальных напряжений от бимоментов может значительно превышать составляющую от изгибающего момента, а влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние мало по сравнению с влиянием нормальных напряжений.

Поэтому, с учетом того, что бимомент является производной некоторого порядка от функций перемещений, в данной статье рассмотрим различные способы аппроксимаций функций перемещений, влияющих на точность вычисления бимоментов.

Итак, **целью работы** является разработка численного метода расчета тонкостенных стержневых систем по полусдвиговой и бессдвиговой теориям расчета. В данной статье рассмотрим первый этап разработки численного метода – построение тонкостенных конечных элементов различных типов в зависимости от способа аппроксимации функций деформаций (кручения и деформации): линейной, квадратичной и кубической.

1. Кубическая аппроксимация функции кручения для бесшарнировой теории тонкостенных стержней В.З. Власова

Согласно [24], выражение энергии деформации E тонкостенного стержня можно представить как функционал от функций перемещений ξ, θ, ζ, η , являющийся частью функционала Лагранжа:

$$E(\xi, \theta, \zeta, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^l ((EA(\xi')^2 + EI_y(\zeta'')^2 + EI_z(\eta'')^2 + EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2) dx, \quad (4)$$

где EA, EI_y, EI_z – жесткости на растяжение-сжатие и изгиб в двух плоскостях;

EI_ω и GI_d – жесткости на деформацию и кручение соответственно.

Поскольку функции $\xi = \xi(x), \zeta = \zeta(x), \eta = \eta(x)$ описывают деформации соответственно растяжения-сжатия и изгиба в двух направлениях и являются независимыми от функции кручения $\theta = \theta(x)$, то в дальнейшем будем опускать составляющие подынтегрального выражения с их участием и рассматривать только функцию кручения как независимую:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2) dx. \quad (5)$$

Разобьем тонкостенный стержень, имеющий длину L , на n двухузловых конечных элементов.

Рассмотрим i -й конечный элемент длиной l с 4 степенями свободы: два узловых поворота относительно оси x , отвечающих углам закручивания θ_i и θ_{i+1} ; две меры деформации θ'_i и θ'_{i+1} (рис. 2).

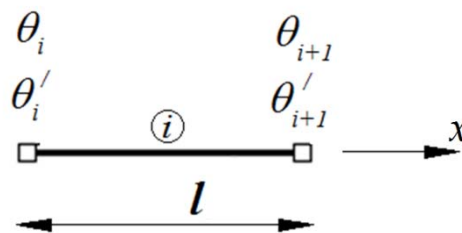


Рисунок 2. Двухузловой конечный элемент с 4 степенями свободы (по бесшарнировой теории)

Столбец узловых перемещений в пределах одного КЭ:

$$[U^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \theta'_i \\ \theta_{i+1} \\ \theta'_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для применения метода конечных элементов к теории тонкостенных стержней представим функцию кручения $\theta(x)$ в пределах одного конечного элемента с помощью кубических интерполяционных полиномов Эрмита $\mathcal{E}^{(i)}$ [25], умноженных на узловые неизвестные:

$$\theta(x) = \mathcal{E}_1^{(i)} \theta_i + \mathcal{E}_2^{(i)} \theta'_i + \mathcal{E}_3^{(i)} \theta_{i+1} + \mathcal{E}_4^{(i)} \theta'_{i+1}. \quad (7)$$

Поскольку в выражении функционала (5) максимальная степень производной от входящей в него аппроксимируемой функции перемещений θ – вторая, то минимальной степенью интерполяционных полиномов будет третья степень.

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (4). Для этого функцию $\theta(x)$ представим в виде матричного произведения:

$$\theta(x) = [\mathcal{E}^{(i)}][U^{(i)}], \quad (8)$$

где $[\mathcal{E}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 4 полиномов третьей степени, вид которых приводится, например, в [25]:

$$[\mathcal{E}^{(i)}] = [\mathcal{E}_1^{(i)}(x), \mathcal{E}_2^{(i)}(x), \mathcal{E}_3^{(i)}(x), \mathcal{E}_4^{(i)}(x)]. \quad (9)$$

Подставляя (8) в функционал (5), получим:

$$E = \frac{1}{2}[U^{(i)}]^T [K_\omega^{(i)}][U^{(i)}] + \frac{1}{2}[U^{(i)}]^T [K_d^{(i)}][U^{(i)}], \quad (10)$$

где введены обозначения:

$$[K_\omega^{(i)}] = EI_\omega \int_0^l [\mathcal{E}^{(i)T}]^T [\mathcal{E}^{(i)}] dx; \quad [K_d^{(i)}] = GI_d \int_0^l [\mathcal{E}'^{(i)T}]^T [\mathcal{E}'^{(i)}] dx. \quad (11)$$

Матрицы $[K_\omega^{(i)}]$ и $[K_d^{(i)}]$, имеющие размер 4x4, являются соответственно **депланационной** и **крутильной** составляющими матрицы жесткости i -го элемента $[K^{(i)}]$:

$$[K^{(i)}] = [K_\omega^{(i)}] + [K_d^{(i)}]. \quad (12)$$

После подстановки (9) в (11) и проведения вычислительных операций дифференцирования, а затем – интегрирования, эти составляющие матрицы жесткости окажутся равными:

$$[K_\omega^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} \end{pmatrix} = EI_\omega \begin{pmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$[K_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} \end{pmatrix} = GI_d \begin{pmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l \\ \frac{10}{6}l & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{5}{10} & -\frac{1}{30}l & \frac{5l}{10} & \frac{10}{15} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Окончательно выражение для энергии деформации конечного элемента запишется как:

$$E = \frac{1}{2}[U^{(i)}]^T [K^{(i)}][U^{(i)}]. \quad (15)$$

Силовой потенциал, согласно [22], запишем в виде:

$$\Pi_S(u) = \frac{1}{2} \int_0^l (\xi p_x + \eta p_y + \zeta p_z + \theta m_x + \eta' m_z - \zeta' m_y - \theta' m_B) dx, \quad (16)$$

где $p_x, p_y, p_z, m_x, m_z, m_y, m_B$ – распределенные по длине внешние силовые факторы соответственно: 3 силовых нагрузки вдоль осей x, y и z , далее 3 моментных нагрузки относительно осей x, y и z , и внешний распределенный бимомент.

Если выделить составляющие работы кручения и депланации, связанные только с функцией $\theta(x)$, то выражение (16) упростится до следующего:

$$\Pi_S(\theta) = \int_0^l (\theta m_x - \theta' m_B) dx. \quad (17)$$

С учетом выражения (8):

$$\Pi_S(u) = \int_0^l ([\mathcal{E}^{(i)}][U^{(i)}]m_x - [\mathcal{E}^{(i)}][U^{(i)}]m_B) dx, \quad (18)$$

или:

$$\Pi_S(u) = [P^{(i)}][U^{(i)}], \quad (19)$$

где $[P^{(i)}]$ – столбец узловых нагрузок, выражаемый равенством:

$$[P^{(i)}] = \int_0^l ([\mathcal{E}^{(i)}]m_x - [\mathcal{E}^{(i)}]m_B) dx. \quad (20)$$

Стоит отметить, что второе слагаемое подынтегрального выражения (20) практически может быть приравнено к нулю ввиду того, что внешней нагрузки в виде распределенного бимоента в инженерной практике не встречается.

Если обратиться к общей формуле для функционала Лагранжа $L(u)$ [14] в виде:

$$L(u) = E(u) - \Pi_S(u), \quad (21)$$

то условие минимума лагранжиана на кинематически допустимых полях перемещений сводится к уравнениям Эйлера для этого функционала, являющимися в нашем случае уравнениями равновесия стержня:

$$[K^{(i)}][U^{(i)}] = [P^{(i)}]. \quad (22)$$

2. Полусдвиговая теория расчета. Линейная аппроксимация функций кручения и депланации

В книге Сливкера В.И. [24] предлагается особый вид функционала энергии деформации:

$$E(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega (\beta')^2 + GI_d (\theta')^2 + \frac{GI_d}{\psi - 1} (\theta' - \beta')^2) dx, \quad (23)$$

основанного на так называемой полусдвиговой теории тонкостенных стержней, в которой, в отличие от бессдвиговой теории, условие (2) не выполняется. Поэтому функции кручения и депланации ($\theta=\theta(x)$ и $\beta=\beta(x)$ соответственно) являются независимыми.

В формуле (23) введено обозначение ψ – параметр, определяемый коэффициентом влияния формы $\mu_{\omega\omega}$, вычисляемый на основе геометрических характеристик и эпюры секториальных координат.

Данная теория, учитывающая часть энергии сдвига (третье слагаемое подынтегрального выражения (23)) и подходящая для расчета тонкостенных стержней не только открытого, но и замкнутого профилей, в настоящее время не реализована.

Рассмотрим двухузловой i -й конечный элемент длиной l , имеющий 4 степени свободы: 2 поворота и 2 возможности депланировать из плоскости сечения в каждом узле (см. рис.3).

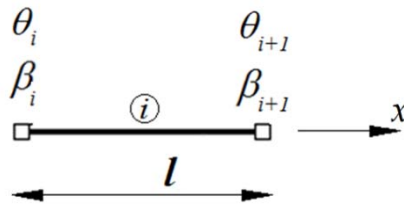


Рисунок 3. Двухузловой конечный элемент с 4 степенями свободы (по полусдвиговой теории)

Начало координат совместим с левым узлом i .

Функции перемещений представим в виде произведения суммы линейных полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x) = \mathcal{E}_1^{(i)}\theta_i + \mathcal{E}_2^{(i)}\theta_{i+1}, \tag{24}$$

$$\beta(x) = \mathcal{E}_1^{(i)}\beta_i + \mathcal{E}_2^{(i)}\beta_{i+1}, \tag{25}$$

где $\mathcal{E}_1^{(i)}, \mathcal{E}_2^{(i)}$ – линейные интерполяционные полиномы:

$$\mathcal{E}_1^{(i)}(x) = -\frac{1}{l}x + 1, \tag{26}$$

$$\mathcal{E}_2^{(i)}(x) = \frac{1}{l}x. \tag{27}$$

Отметим, что в выражении функционала (23) обе функции θ и β имеют только первую производную. Поэтому минимальной степенью интерполяционных полиномов будет первая степень.

Столбец неизвестных представим в виде:

$$[U_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \beta_i \\ \theta_{i+1} \\ \beta_{i+1} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (23).

Для этого выражения (24) и (25) для функций $\theta(x)$ и $\beta(x)$ перепишем в виде матричных произведений:

$$\theta(x) = [\mathcal{E}^{(i)}][U_d^{(i)}], \quad \beta(x) = [\mathcal{E}^{(i)}][U_\omega^{(i)}], \tag{29}$$

где $[\mathcal{E}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 2 полиномов (26) и (27):

$$[\mathcal{E}^{(i)}] = [\mathcal{E}_1^{(i)}(x), \mathcal{E}_2^{(i)}(x)]; \tag{30}$$

$[U_d^{(i)}]$ и $[U_\omega^{(i)}]$ – столбцы перемещений одного вида:

$$[U_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \theta_{i+1} \end{pmatrix}; [U_\omega^{(i)}] = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_{i+1} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Разность $(\theta' - \beta)$ представим в виде:

$$\theta'(x) - \beta(x) = [\Phi^{(i)}][U^{(i)}], \tag{32}$$

где $[\Phi^{(i)}]$ – матрица-строка, имеющая вид:

$$[\Phi^{(i)}] = \left[\frac{d\mathcal{E}_1^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_1^{(i)}(x), \frac{d\mathcal{E}_2^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_2^{(i)}(x) \right]. \tag{33}$$

Подставляя (29) и (32) в функционал (23), получим:

$$E = \frac{1}{2}[U^{(i)}]^T [K_{\omega}^{(i)}][U^{(i)}] + \frac{1}{2}[U^{(i)}]^T [K_d^{(i)}][U^{(i)}] + \frac{1}{2}[U^{(i)}]^T [K_{od}^{(i)}][U^{(i)}], \quad (34)$$

где введены обозначения:

$$[K_{\omega}^{(i)}] = EI_{\omega} \int_0^l [\mathcal{E}']^T [\mathcal{E}'] dx; [K_d^{(i)}] = GI_d \int_0^l [\mathcal{E}']^T [\mathcal{E}'] dx; [K_{od}^{(i)}] = \frac{GI_d}{\psi - 1} \int_0^l [\Phi]^T [\Phi] dx. \quad (35)$$

Матрицы $[K_{\omega}^{(i)}]$ и $[K_d^{(i)}]$, имеющие размер 2x2, и матрица $[K_{od}^{(i)}]$, имеющая размер 4x4, являются соответственно **депланационной**, **крутильной** и **депланационно-крутильной** составляющими матрицы жесткости i -го элемента $[K^{(i)}]$:

$$[K^{(i)}] = [K_{\omega}^{(i)}] + [K_d^{(i)}] + [K_{od}^{(i)}]. \quad (36)$$

После подстановки (30) и (33) в (35) и проведения вычислительных операций дифференцирования, а затем интегрирования, эти составляющие матрицы жесткости, с учетом перехода от размеров 2x2 к 4x4, окажутся равными:

$$[K_{\omega}^{(i)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^{(i)} & 0 & k_{24}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42}^{(i)} & 0 & k_{44}^{(i)} \end{pmatrix} = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$[K_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & 0 & k_{13}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(i)} & 0 & k_{33}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = GI_d \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$[K_{od}^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{l} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}l & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}l \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6}l & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}l \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Силовой потенциал, согласно [24], запишем в виде:

$$\Pi_S(\theta, \beta) = \int_0^l (\theta m_x - \beta m_B) dx. \quad (40)$$

С учетом выражений (29):

$$\Pi_S = \int_0^l ([\mathcal{E}^{(i)}][U_d^{(i)}]m_x - [\mathcal{E}^{(i)}][U_{\omega}^{(i)}]m_B) dx, \quad (41)$$

или:

$$\Pi_S = [P^{(i)}][U^{(i)}], \quad (42)$$

где $[P^{(i)}]$ – столбец узловых нагрузок, выражаемый равенством:

$$[P^{(i)}] = \int_0^l ([\mathcal{E}^{(i)}]m_x - [\mathcal{E}^{(i)}]m_B) dx. \quad (43)$$

3. Линейная аппроксимация функции деформации и квадратичная аппроксимация функции кручения в полусдвиговой теории

Как показали численные эксперименты, скорость сходимости построенного линейного конечного элемента достаточно низка. Так, например, численное значение максимального угла закручивания 3-метровой швеллеровой балки под нагрузкой от распределенного крутящего момента имеет приемлемую 5%-ю погрешность лишь при разбиении стержня на 64 конечных элемента.

Возникает необходимость в более точной аппроксимации функций перемещения. В связи с этим перейдем к рассмотрению параболической аппроксимации функции кручения θ с сохранением линейной аппроксимации функции деформации β .

Рассмотрим трехузловой i -й конечный элемент длиной l , имеющий 5 степеней свободы: 3 поворота в каждом узле и 2 возможности деформировать из плоскости сечения в крайних узлах (рис. 4).

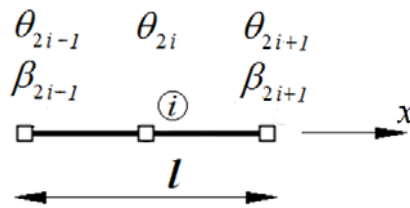


Рисунок 4. Трехузловой конечный элемент с 5 степенями свободы

Функции перемещений θ и β представим в виде произведения суммы полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x) = \mathcal{E}_3^{(i)} \theta_{2i-1} + \mathcal{E}_4^{(i)} \theta_{2i} + \mathcal{E}_5^{(i)} \theta_{2i+1}, \quad (44)$$

$$\beta(x) = \mathcal{E}_1^{(i)} \beta_{2i-1} + \mathcal{E}_2^{(i)} \beta_{2i+1}, \quad (45)$$

где $\mathcal{E}_3^{(i)}$, $\mathcal{E}_4^{(i)}$, $\mathcal{E}_5^{(i)}$ – квадратичные интерполяционные полиномы:

$$\mathcal{E}_3^{(i)}(x) = \frac{2}{l_i^2} x^2 - \frac{3}{l_i} x + 1; \quad \mathcal{E}_4^{(i)}(x) = -\frac{4}{l_i^2} x^2 + \frac{4}{l_i} x; \quad \mathcal{E}_5^{(i)}(x) = \frac{2}{l_i^2} x^2 - \frac{1}{l_i} x. \quad (46)$$

Столбец неизвестных в таком случае будет выглядеть следующим образом:

$$[U^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \beta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (23).

Для этого выражения (44) и (45) для функций $\theta(x)$ и $\beta(x)$ перепишем в виде матричных произведений:

$$\theta(x) = [\mathcal{E}_{\kappa\theta}^{(i)}][U_d^{(i)}], \quad \beta(x) = [\mathcal{E}^{(i)}][U_\omega^{(i)}], \quad (48)$$

где $[\mathcal{E}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 2 полиномов (формула (30)), а $[\mathcal{E}_{\kappa\theta}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 3 полиномов (46):

$$[\mathcal{E}_{\kappa\theta}^{(i)}] = [\mathcal{E}_3^{(i)}(x), \mathcal{E}_4^{(i)}(x), \mathcal{E}_5^{(i)}(x)]; \quad (49)$$

$[U_d^{(i)}]$ и $[U_\omega^{(i)}]$ – столбцы перемещений одного вида:

$$[U_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \end{pmatrix}; \quad [U_\omega^{(i)}] = \begin{pmatrix} \beta_{2i-1} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Разность $(\theta' - \beta)$ представим в виде:

$$\theta'(x) - \beta(x) = [\Phi_{кв/лин}^{(i)}][U^{(i)}], \quad (51)$$

где $[\Phi_{кв/лин}^{(i)}]$ – матрица-строка, имеющая вид:

$$[\Phi_{кв/лин}^{(i)}] = \left[\frac{d\mathcal{E}_3^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_1^{(i)}(x), \frac{d\mathcal{E}_4^{(i)}(x)}{dx}, \frac{d\mathcal{E}_5^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_2^{(i)}(x) \right]. \quad (52)$$

Подставляя (48) и (51) в функционал (23), получим формулу (34) для выражения энергии деформации, но уже для случая квадратичной аппроксимации функции кручения и линейной аппроксимации функции депланации.

Компоненты матрицы жесткости (36), имеющей размер 5x5, для данного случая будут следующими:

$$[K_{\omega}^{(i)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^{(i)} & 0 & 0 & k_{25}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}^{(i)} & 0 & 0 & k_{55}^{(i)} \end{pmatrix} = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$[K_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & 0 & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(i)} & 0 & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} & 0 \\ k_{41}^{(i)} & 0 & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = GI_d \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & -\frac{8}{3l} & 0 \\ \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{7}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$$[K_{\omega d}^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} & k_{15}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} & k_{25}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} & k_{35}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} & k_{45}^{(i)} \\ k_{51}^{(i)} & k_{52}^{(i)} & k_{53}^{(i)} & k_{54}^{(i)} & k_{55}^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & \frac{5}{6} & -\frac{8}{3l} & \frac{1}{3l} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{3l} & -\frac{1}{3l} & \frac{1}{l} \\ \frac{6}{8} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{8} & \frac{6}{2} \\ \frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3l} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3l} & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3l} & \frac{7}{3l} & -\frac{5}{6} \\ \frac{3l}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{3l}{3} & \frac{3l}{6} & -\frac{6}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{l}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Силовой потенциал $\Pi_S(\theta, \beta)$ и столбец узловых нагрузок $[P^{(i)}]$ можно выразить с помощью формул (40)-(43), но вкладывая в обозначения уже смысл, заключенный в формулах (49)-(50).

4. Квадратичная аппроксимация функций кручения и депланации в полусдвиговой теории

При использовании линейной аппроксимации функции депланации β на конечном элементе значение бимоента окажется постоянной величиной в пределах одного конечного элемента. Таким образом, эпюра бимоментов окажется ступенчатой в пределах длины стержня, если не производить никаких сглаживаний функций.

Рассмотрим трехузловой i -й конечный элемент длиной l , имеющий 6 степеней свободы: 3 поворота и 3 депланации из плоскости сечения в каждом узле (см. рис. 5).

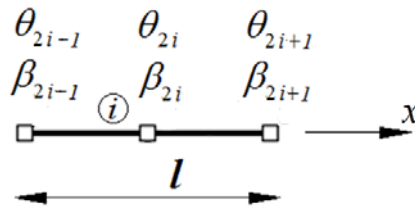


Рисунок 5. Трехузловой конечный элемент с 6 степенями свободы

Функции перемещений θ и β представим в виде произведения суммы квадратичных полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x) = \mathcal{E}_3^{(i)}\theta_{2i-1} + \mathcal{E}_4^{(i)}\theta_{2i} + \mathcal{E}_5^{(i)}\theta_{2i+1}, \tag{56}$$

$$\beta(x) = \mathcal{E}_3^{(i)}\beta_{2i-1} + \mathcal{E}_4^{(i)}\beta_{2i} + \mathcal{E}_5^{(i)}\beta_{2i+1}, \tag{57}$$

где $\mathcal{E}_3^{(i)}, \mathcal{E}_4^{(i)}, \mathcal{E}_5^{(i)}$ – квадратичные интерполяционные полиномы (46).

Столбец неизвестных, по сравнению с формулой (47), дополнится еще одним компонентом и приобретет размер 6х6:

$$[U^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \beta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \beta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (23).

Для этого выражения (56) и (57) для функций $\theta(x)$ и $\beta(x)$ перепишем в виде матричных произведений:

$$\theta(x) = [\mathcal{E}_{\kappa\theta}^{(i)}][U_d^{(i)}], \quad \beta(x) = [\mathcal{E}_{\kappa\beta}^{(i)}][U_\omega^{(i)}], \tag{59}$$

где $[\mathcal{E}_{\kappa\theta}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 3 полиномов (формула (49));

$[U_d^{(i)}]$ и $[U_\omega^{(i)}]$ – столбцы перемещений одного вида:

$$[U_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \end{pmatrix}; [U_\omega^{(i)}] = \begin{pmatrix} \beta_{2i-1} \\ \beta_{2i} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Разность $(\theta' - \beta)$ представим в виде:

$$\theta'(x) - \beta(x) = [\Phi_{\kappa\theta}^{(i)}][U^{(i)}], \tag{61}$$

где $[\Phi_{\kappa\theta}^{(i)}]$ – матрица-строка, имеющая вид:

$$[\Phi_{\kappa\theta}^{(i)}] = \left[\frac{d\mathcal{E}_3^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_3^{(i)}(x), \frac{d\mathcal{E}_4^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_4^{(i)}(x), \frac{d\mathcal{E}_5^{(i)}(x)}{dx}, -\mathcal{E}_5^{(i)}(x) \right]. \tag{62}$$

Подставляя (59) и (61) в функционал (23), получим формулу (34) для выражения энергии деформации, но уже для случая квадратичной аппроксимации функции кручения и депланации.

Компоненты матрицы жесткости (36), имеющей размер 6х6, для рассматриваемого случая будут следующими:

$$[K_{\omega}^{(i)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^{(i)} & 0 & k_{24}^{(i)} & 0 & k_{26}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42}^{(i)} & 0 & k_{44}^{(i)} & 0 & k_{46}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{62}^{(i)} & 0 & k_{64}^{(i)} & 0 & k_{66}^{(i)} \end{pmatrix} = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{1}{3l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$[K_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & 0 & k_{13}^{(i)} & 0 & k_{15}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(i)} & 0 & k_{33}^{(i)} & 0 & k_{35}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{51}^{(i)} & 0 & k_{53}^{(i)} & 0 & k_{54}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = GI_d \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$[K_{\omega d}^{(i)}] = \begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} & k_{15}^{(i)} & k_{16}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} & k_{25}^{(i)} & k_{26}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} & k_{35}^{(i)} & k_{36}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} & k_{45}^{(i)} & k_{46}^{(i)} \\ k_{51}^{(i)} & k_{52}^{(i)} & k_{53}^{(i)} & k_{54}^{(i)} & k_{55}^{(i)} & k_{56}^{(i)} \\ k_{61}^{(i)} & k_{62}^{(i)} & k_{63}^{(i)} & k_{64}^{(i)} & k_{65}^{(i)} & k_{66}^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & \frac{1}{2} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3l} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{15}l & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15}l & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30}l \\ \frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{15}l & 0 & \frac{8}{15}l & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15}l \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{15} & \frac{7}{3l} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{30}l & \frac{2}{3} & \frac{1}{15}l & -\frac{1}{2} & \frac{2}{15}l \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Выводы

В результате работы была построена матрица жесткости конечных элементов тонкостенных стержней открытого профиля по **бессдвиговой теории** посредством кубической аппроксимации функций кручения и деформации

Построены 3 типа матриц жесткости конечных элементов тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей по **полусдвиговой теории**, основанные соответственно на 3 видах аппроксимаций функций деформаций:

- 1) линейная аппроксимация функций кручения 2-узловой конечного элемента с 4 степенями свободы;
- 2) квадратичная аппроксимация функции кручения и линейная аппроксимация функции деформации 3-узловой конечного элемента с 5 степенями свободы;
- 3) квадратичная аппроксимация функций кручения и деформации 3-узловой конечного элемента с 6 степенями свободы.

Предложенные матрицы жесткости являются универсальными для расчетов методом конечных элементов как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теорий В.З. Власова [18] и В.И. Сливкера [24]), так и закрытого профиля (на основе теории А.А. Уманского) ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и функционалов энергии деформации.

Результаты работы наиболее применимы при проектировании строительных конструкций на основе холодногнутого оцинкованного тонкостенных стержневых элементов **открытого профиля** и при проектировании элементов **замкнутого профиля**.

Литература

1. Cheng Y., Schafer B.W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method // Journal of Constructional Steel Research. Volume 63, Issue 5. 2007. Pp. 581-590.
2. Sedlacek G., Bild J., Ungermann D. On the buckling of plates – Some recent developments in light weight structures // 4th international conference on aluminium weldments, Tokyo. 1988.
3. Альхименко А. И., Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Технология легких стальных тонкостенных конструкций. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2008. 27 с.
4. Назмеева Т. В. Обеспечение пространственной жесткости покрытия в зданиях из ЛСТК // Инженерно-строительный журнал. 2009. №6(8). С. 12-15.
5. Айрумян Э. Л., Каменщиков Н. И. Рамные конструкции стального каркаса из оцинкованных гнутых профилей для одноэтажных зданий различного назначения // Мир строительства и недвижимости. 2006. №36. С. 9-11.
6. Кузьменко Д. В., Ватин Н. И.. Ограждающая конструкция «нулевой» толщины – термопанель // Инженерно-строительный журнал. 2008. №1. С. 13-21.
7. Ватин Н. И., Попова Е. Н. Термопрофиль в легких стальных тонкостенных конструкциях. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2006. 63 с.
8. Гордеева А. О., Ватин Н. И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 36-46.
9. Смазнов Д. Н. Конечноэлементное моделирование работы жестких вставок тонкостенных холодноформованных стальных профилей // Научный журнал КубГАУ. 2011. №67(03). С. 1-13.
10. Смазнов Д. Н. Устойчивость при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3(5). С. 42-49.
11. Шатов Д. С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутого профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 32-35.
12. Юрченко В. В. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутого профилей в среде SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8(18). С. 38-46.
13. Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы. // СтройПРОФИль. 2007. № 2(56). С. 60-63.
14. Рыбаков В. А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2010. 206 с.
15. Рыбаков В. А. Применение метода конечных элементов для полусдвиговой теории тонкостенных стержней // Материалы Пятого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. С. 30-32.
16. Недвига П. Н., Рыбаков В. А. Эмпирические методы оценки несущей способности стальных тонкостенных просечно-перфорированных балок и балок со сплошной стенкой // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8(10). С. 27-30.
17. Бычков Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М. : Госстройиздат, 1962. 476 с.
18. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания). М. : Госстройиздат, 1940. 276 с.
19. Кузьмин Н. А., Лукаш П. А., Милейковский И. Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М. : Госстройиздат, 1960. 264 с.
20. Белый Г. И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформируемой схеме // Межвуз. темат. сб. тр. 1983. №42 (Строительная механика сооружений). С. 40-48.
21. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2001. 72 с.
22. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред: Пер. с англ. М. : Недра, 1974. 239 с.
23. Туснин А. Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.т.н.: Спец. 05.23.01. М. , 2004. 37 с.
24. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М. : Издательство ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
25. Колосова Г. С. Решение одномерных задач строительной механики численными методами : учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГТУ, 1993. 84 с.

*Владимир Александрович Рыбаков, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб. +7(964)331-29-15; эл. почта: fishermanoff@mail.ru*

doi: 10.5862/MCE.26.11

The finite elements for design of building walling made of thin-walled beams

V.V. Lalin;
V.A. Rybakov,

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia
+7(964)331-29-15; e-mail: fishermanoff@mail.ru

Key words

thermopanel; torsion; interpolating polynomials; bimoment; deformation of shear; matrix of the inflexibility

Abstract

In modern society in Russia and abroad there have been observed a wide application of a metalware in industrial and civil engineering. Special place in the building industry is belonged to light steel thin-walled constructions, which have a lot of technological advantages. In the monolithic and frame building, which amount constantly grows it is possible to use so-called thermopanel as effective and economic protecting designs.

The purpose of this work is to create a numerical method of thin-walled bar systems design by using semi-sheared and unsheared theories. In the article the first development cycle of a numerical method creating is considered – creating of the matrixes of the inflexibility of thin-walled finite elements of various types using the semisheared theory (by V.I. Slivker) – depending on a way of approximation of deformations functions (torsion and warping):

- 1) linear approximation of torsional functions with a 2-central finite element having 4 transitions;
- 2) square-law approximation of torsional functions and linear approximation of warping function with a 3-central finite element having 5 transitions;
- 3) square-law approximation of functions of torsional and warping functions with a 3-central finite element having 6 transitions.

Thus deformation functions (torsional angle and warping) are approximated as mutually independent functions.

Also creating of a matrix of the inflexibility of a thin-walled finite element on unsheared theory of design (by V.Z. Vlasov) with cubic approximation of torsional functions is considered.

References

1. Cheng Y., Schafer B.W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method. *Journal of Constructional Steel Research*. 2007. Volume 63, Issue 5. Pp. 581-590.
2. Sedlacek G., Bild J., Ungermann D. On the buckling of plates - Some recent developments in light weight structures. 4th international conference on aluminium weldments. Tokyo. April 1988.
3. Alkhimenko A. I., Vatin N. I., Rybakov V. A. *Tekhnologiya legkikh stalnykh tonkostennykh konstruksiyi* [The light steel constructions' technology]. Saint-Petersburg: Izd-vo SPbGPU, 2008. 27 p. (rus)
4. Nazmeeva T. V. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 6(8). Pp. 42-49. (rus)
5. Airumyan E. L., Kamenshchikov N. I. *Mir stroitelstva i nedvizhimosti* [The world of building and realty]. 2006. No. 36. Pp. 9-11. (rus)
6. Kuzmenko D. V., Vatin N. I. *Magazine of Civil Engineering*. 2008. No. 1. Pp. 13-21. (rus)
7. Vatin N. I., Popova E. N. *Termoprofil v legkikh stalnykh tonkostennykh konstruksiyakh* [Thermo profile in the light-gauge steel structures]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2006. 63 p. (rus)
8. Gordeeva A. O., Vatin N. I. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 3(21). Pp. 36-46. (rus)
9. Smaznov D. N. *Scientific Magazine of KubGAU*. 2011. No. 67(03). Pp. 1-13. (rus)
10. Smaznov D. N. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 3(5). Pp. 42-49. (rus)

11. Shatov D. S. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 3(21). Pp. 32-35. (rus)
12. Yurchenko V. V. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 8(18). Pp. 38-46. (rus)
13. Vatin N. I., Rybakov V. A. *StroyPROFIL*. 2007. No. 2(56). Pp. 60-63. (rus)
14. Rybakov V. A. *Osnovy stroitelnoy mekhaniki legkikh stalnykh tonkostennykh konstruktsiy* [The fundamentals of light steel thin-walled structural mechanics]. Saint-Petersburg : Izd-vo SPbGPU, 2010. 206 p. (rus)
15. Rybakov V. A. *Materialy Pyatogo Vserossiiskogo Foruma studentov, aspirantov i molodykh uchenykh* [Proceedings of 5 all-Russian Forum of students, post-graduate students and young scientists]. Saint-Petersburg , 2011. Pp. 30-32. (rus)
16. Nedviga P. N., Rybakov V. A. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 6(8). Pp. 27-30. (rus)
17. Bychkov D. V. *Stroitel'naya mekhanika sterzhevykh tonkostennykh konstruktsiy* [Structural mechanics of bar thin-walled constructions]. Moscow : Gosstroyizdat, 1962. 476 p. (rus)
18. Vlasov V.Z. *Tonkostennye uprugiy sterzhny (prochnost, ustoychivost, kolebaniya)* [Thin-walled elastic beams (strength, stability, rippling)]. Moscow : Gosstroyizdat, 1940. 276 p. (rus)
19. Kuzmin N. A., Lukash P. A., Mileikovskiy I. E. *Raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhey i obolochek* [The design of thin-walled bar and membranous constructions]. Moscow : Gosstroyizdat, 1960. 264 p. (rus)
20. Belyi G. I. *Mezhvuzovskiy tematicheskiy sbornik trudov* [Inter-university theme collected papers]. 1983. No. 42. Pp. 40-48. (rus)
21. Lalin V. V., Kolosova G. S. *Chislennyye metody v stroitelstve. Resheniye odnomernykh zadach metodom konechnykh elementov* [Numerical methods in civil engineering. The solving of one-dimensional schemes with finite element method]: Saint-Petersburg : Izd-vo SPbGTU, 2001. 72 p. (rus)
22. Zenkevich O. *Finite element method in the theory of structures and in continuum mechanics*. Moscow : 1974. 239 p. (rus)
23. Tusnin A. R. *Chislennyy raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya* [Numerical calculation of structures made of open-section thin-walled bars]. Moscow : ASV, 2009. 143 p. (rus)
24. Slivker V. I. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow : ASV, 2005. 736 p. (rus)
25. Kolosova G.S. *Resheniye odnomernykh zadach stroitelnoy mekhanikichi slennymi metodami* [The solving of one-dimensional schemes of structural mechanics with numerical method]. Saint-Petersburg : Izd-vo SPbGTU, 1993. 84 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 69-80