

## Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем

*Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой В.В. Лалин,  
аспирант В.А. Рыбаков\*,  
магистрант С.А. Морозов,*

*ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

**Ключевые слова:** кручение; деформация; интерполяционные полиномы; деформация сдвига; бимомент; матрица жесткости; коэффициент влияния формы сечения

В прошлом номере журнала (№8(26), 2011) в статье [1] были рассмотрены новые тонкостенные конечные элементы, отличающиеся количеством степеней свободы, зависящим от способа аппроксимации функций деформаций (кручения и деформации): линейной, квадратичной и кубической.

Была рассмотрена проблема сложности расчета стержневых элементов тонкостенных конструкций и неприменимости к их расчету обычных теорий и методик. Это приводит к необходимости моделирования стержня одним из двух способов: либо в виде линейной оболочки и последующего моделирования с помощью метода конечных элементов в программных комплексах SCAD, Lira, SOFiSTiK и т.д. [2,3,4,5,6,7,8 и др.]; либо введением седьмой степени свободы тонкостенного стержня [9,10,11,12,13,14] в аналитических или численных методах.

Отмечалась доминирующая важность **бимомента** среди прочих статических силовых факторов, возникающих при стесненном кручении, и даже среди функций перемещений, ввиду того, что именно бимомент является силовым фактором, вносящим наибольший вклад в формулу для вычисления нормальных напряжений, отвечающих за прочность конструкции (первая группа предельных состояний). Данное обстоятельство подтверждено теоретическими и экспериментальными исследованиями [10,11,13 и др.].

В новом СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81\*», введенном в действие с 20 мая 2011 г., бимомент  $B$  как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами  $M_x, M_y$ , о чем свидетельствует формула (43) этого нормативного документа для поперечно-изгибаемых элементов сплошного сечения:

$$\frac{M_x}{I_{xn} R_y \gamma_c} y \pm \frac{M_y}{I_{yn} R_y \gamma_c} x \pm \frac{B \omega}{I_{\omega} R_y \gamma_c} \leq 1 \quad (1)$$

и формулы (105) и (106), аналогичные формуле (1), но для элементов, воспринимающих продольную силу с изгибом.

**Целью данной работы** является реализация алгоритма метода конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем по полусдвиговой и бессдвиговой теориям расчета.

В статье [1] были построены 4 типа конечных элементов (рис. 1 и 2), соответствующие разным теориям стесненного кручения и количеству степеней свободы, зависящему от способа аппроксимации:

- линейная аппроксимация функций кручения и деформации (рис. 1а);
- квадратичная аппроксимация функции кручения и линейная аппроксимация функции деформации (рис. 1б);
- квадратичная аппроксимация функций кручения и деформации (рис. 1в).
- кубическая аппроксимация функции кручения (рис. 2).

Предложенные матрицы жесткости являются универсальными в применении при расчетах методом конечных элементов как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теорий В.З. Власова [11] и В.И. Сливкера [15]), так и закрытого профиля (на основе теорий А.А. Уманского [16] и Пановко-Джанелидзе [15,17]), ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и функционалов энергии деформации.

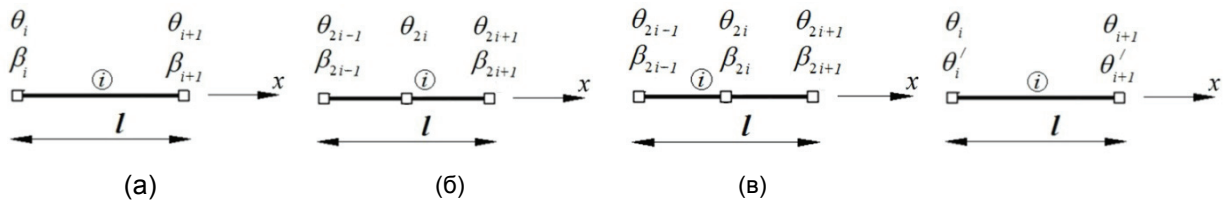


Рисунок 1. Конечные элементы по полусдвиговой теории: с четырьмя, с пятью и с шестью степенями свободы

Рисунок 2. КЭ по бессдвиговой теории

В данной статье мы продолжим реализацию кубической аппроксимации и рассмотрим некоторые тестовые задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня, имеющего различные граничные условия на концах с критической точки зрения – сходимости.

Также рассмотрим данные задачи с точки зрения поиска статических силовых факторов при стесненном кручении: бимоента, секториального крутящего момента и момента чистого кручения.

### О коэффициенте влияния формы сечения

Напомним, что отличительной особенностью функционала энергии деформации тонкостенного стержня (2) для полусдвиговой теории [15,18] является то, что функции кручения  $\theta(x)$  и депланации  $\beta(x)$  представляются как независимые функции:

$$E(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega (\beta')^2 + GI_d (\theta')^2 + GI_d \frac{(\theta' - \beta')^2}{\psi - 1}) dx. \quad (2)$$

В функционале вводится третье слагаемое – так называемая «сдвиго-депланационная» часть, зависящая от параметра  $\psi$ , определяемого на основе коэффициента влияния формы сечения  $\mu_{\omega\omega}$ , о которых далее пойдет речь:

$$\psi = 1 + \frac{\mu_{\omega\omega} I_d}{I_r}; \quad \mu_{\omega\omega} = \frac{I_r}{I_\omega^2} \int_0^l \frac{S_{\omega\omega}^2}{\delta} ds, \quad (3)$$

где  $\delta$  – толщина профиля;  $s$  – дуговая (полярная) координата (рис. 3(2));  $S(s)_{\omega\omega}$  – статический секториальный момент:

$$S_{\omega\omega} = \int_{s(\Gamma)}^s \delta \omega ds; \quad (4)$$

$I_r$  – полярный момент инерции:

$$I_r = \int_{(A)} (y^2 + z^2) dA; \quad (5)$$

$I_\omega$  – секториальный момент инерции:

$$I_\omega = \int_{(A)} \omega^2 dA; \quad (6)$$

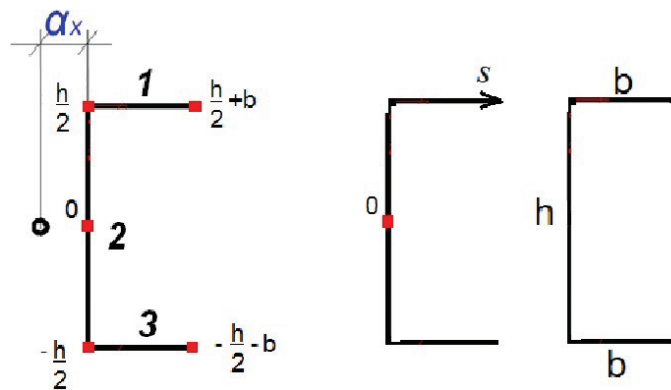
$\omega$  – секториальная координата:

$$\omega(s) = \int_{s(\Gamma)}^s r ds; \quad (7)$$

$I_d$  – момент инерции при свободном кручении.

В формуле (2) и далее  $E$  и  $G$  – соответственно модули упругости и сдвига.

Как видно из формул (4)...(7), процесс вычисления коэффициента влияния формы и, соответственно, параметра  $\psi$ , достаточно трудоемкий. Рассмотрим это на примере швеллерового сечения (рис. 3).



**Рисунок 3. Параметры швеллера и направление дуговой координаты**

На рис. 3 введено обозначение координаты центра изгиба, вычисляемого по [11]:

$$\alpha_x = \frac{b^2 \delta_1}{2b \delta_1 + \frac{h \delta}{3}} = \frac{b^2}{2b + \frac{h}{3}}, \quad (8)$$

где  $\delta_1 = \delta$  – соответственно толщину полок и стенки.

Секториальный момент инерции вычислим по [11] на основании момента инерции  $I_y$  относительно горизонтальной оси:

$$I_\omega = \frac{1}{6} (b - 3\alpha_x) \delta_1 b^2 h^2 + \alpha_x^2 I_y; I_y = \frac{h^3 \delta}{12} + \frac{h^2 b \delta_1}{2}. \quad (9)$$

Момент инерции при кручении, по приближенной формуле Джанелидзе [17]:

$$I_d \approx \frac{2b + h}{3} \delta^2. \quad (10)$$

Определим секториальную координату по сечению швеллера и функцию статического секториального момента (таблица 1).

**Таблица 1. Секториальные координаты и функция статического секториального момента по участкам сечения**

№ участка	Границы участка	Формула для вычисления $\omega(s)$	Формула для вычисления $S_{\omega\omega}(s)$
1	$-\frac{h}{2} \leq s \leq \frac{h}{2}$	$\omega(s) = -\alpha_x s$	$S_{\omega\omega}(s) = \delta \left( \frac{hs^2}{4} + \frac{hs}{2} \left( \frac{h}{2} + \alpha_x \right) + \frac{\alpha_x h}{2} \left( \frac{h}{2} + b \right) + \frac{h^3}{16} - \frac{hb^2}{4} \right)$
2	$\frac{h}{2} \leq s \leq \frac{h}{2} + b$	$\omega(s) = -\frac{\alpha_x h}{2} + \frac{h}{2} \left( s - \frac{h}{2} \right)$	$S_{\omega\omega}(s) = \delta \left( \frac{bh}{4} (2\alpha_x - b) - \frac{\alpha_x s^2}{4} + \frac{h^3}{16} \right)$
3	$-\frac{h}{2} \leq s \leq -\frac{h}{2} - b$	$\omega(s) = \frac{\alpha_x h}{2} - \frac{h}{2} \left( s - \frac{h}{2} \right)$	$S_{\omega\omega}(s) = \delta \left( \frac{bh}{4} (2\alpha_x - b) + \frac{hs^2}{4} - \frac{hs}{2} \left( \frac{h}{2} + \alpha_x \right) + \frac{\alpha_x h^2}{2} + \frac{\alpha_x h^2}{16} \right)$

Для вычисления квадрата функции секториального статического момента и интеграла (3) введем следующие обозначения постоянных  $a_i, b_i, c_i$  (где  $i$  - номер участка) и запишем значения интеграла для каждого участка:

$$S_{o\omega}(s) = a_i s^2 + b_i s + c_i. \quad (11)$$

Тогда значение интеграла составит на каждом участке:

$$\int_{(l)}^i \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds = \int_{(l)}^i \frac{(a_i s^2 + b_i s + c_i)^2}{\delta} ds = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_i^2}{5} s^5 + \frac{a_i b_i}{2} s^4 + \frac{(b_i^2 + 2a_i c_i)}{3} s^3 + b_i c_i s^2 + c_i^2 s \right) \Big|_{(l)}^i. \quad (12)$$

Окончательно формула (12) для каждого участка представлена в таблице 2.

**Таблица 2. Формулы для интегральной составляющей коэффициента влияния формы сечения**

№ уч-ка	Формулы для постоянных	Формулы для вычисления интеграла
1	$a_1 = \delta \frac{h}{4}; b_1 = \delta \frac{h}{2} \left( \frac{h}{2} + \alpha_x \right);$ $c_1 = \delta \left( \frac{\alpha_x h}{2} \left( \frac{h}{2} + b \right) + \frac{h^3}{16} - \frac{hb^2}{4} \right)$	$\int_{\frac{h}{2}-b}^{\frac{h}{2}} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_1^2}{5} \left( \left( \frac{h}{2} + b \right)^5 - \left( \frac{h}{2} \right)^5 \right) + \frac{a_1 b_1}{2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^4 - \left( \frac{h}{2} + b \right)^4 \right) + \frac{(b_1^2 + 2a_1 c_1)}{3} \left( \left( \frac{h}{2} + b \right)^3 - \left( \frac{h}{2} \right)^3 \right) + b_1 c_1 \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} + b \right)^2 \right) + c_1^2 b \right)$
2	$a_2 = -\delta \frac{\alpha_x}{4}; b_2 = 0;$ $c_2 = \delta \left( \frac{bh}{4} (2\alpha_x - b) + \frac{\alpha_x h^2}{8} \right)$	$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds = \frac{1}{\delta} \left( \frac{2a_2^2}{5} \left( \frac{h}{2} \right)^5 + \frac{4a_2 c_2}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 + c_2^2 h \right)$
3	$a_3 = \delta \frac{h}{4}; b_3 = -\delta \frac{h}{2} \left( \frac{h}{2} + \alpha_x \right);$ $c_3 = \delta \left( \frac{\alpha_x h}{2} \left( \frac{h}{2} + b \right) + \frac{h^3}{16} - \frac{hb^2}{4} \right)$	$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_3^2}{5} \left( \left( \frac{h}{2} + b \right)^5 - \left( \frac{h}{2} \right)^5 \right) + \frac{a_3 b_3}{2} \left( \left( \frac{h}{2} + b \right)^4 - \left( \frac{h}{2} \right)^4 \right) + \frac{(b_3^2 + 2a_3 c_3)}{3} \left( \left( \frac{h}{2} + b \right)^3 - \left( \frac{h}{2} \right)^3 \right) + b_3 c_3 \left( \left( \frac{h}{2} + b \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) + c_3^2 b \right)$

Нетрудно доказать, что  $\int_{\frac{h}{2}-b}^{\frac{h}{2}} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds.$

С учетом суммарного по участкам интеграла (таблица 2) искомый параметр  $\psi$ , определяемый по формуле (3), составит:

$$\psi = 1 + \frac{I_d}{I_{\omega}^2} \int_{(l)} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds = 1 + \frac{I_d}{I_{\omega}^2} \cdot \left( 2 \int_{\frac{h}{2}-b}^{\frac{h}{2}} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+b} \frac{S_{o\omega}^2}{\delta} ds \right). \quad (13)$$

Как показали численные эксперименты, значение параметра  $\psi$  для наиболее часто встречающихся на практике оцинкованных холодногнутых швеллеровых профилей колеблется в пределах от 1,0024 до 1,00086. Таким образом, с учетом малости деформации сдвига  $\gamma_{\omega}$ , третье слагаемое подынтегрального выражения функционала (2) представляет собой неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , поэтому данный параметр требует особой точности при решении практических задач.

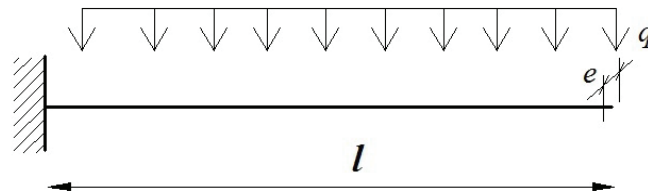
## Аналитическое решение уравнения полусдвиговой теории

### Пример 1. Тонкостенная консольная балка

Рассмотрим тонкостенный стержень (рис. 4), жестко закрепленный с одной стороны и консольно свисающий с другой стороны, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , приложенной с эксцентриситетом  $e$ :

Тогда внешний распределенный крутящий момент  $m_x$  составит:

$$m_x = q \cdot e$$



**Рисунок 4. Стержень с одним заделанным и другим свободным концом**

Согласно [15], дифференциальное уравнение кручения записывается в виде:

$$\psi EI_{\omega} \beta''' - GI_d \beta' = m_x. \quad (14)$$

Зададим граничные условия для левого и правого концов:

$$\begin{aligned} x = 0 : \theta = 0, \quad \beta = 0 \\ x = l : B_{\omega} = 0, \quad M = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $M$  – крутящий момент в сечении, состоящий из момента чистого кручения  $H$  и момента стесненного кручения  $M_{\omega}$ :

$$M = H + M_{\omega} = GI_d \theta' + \frac{GI_d}{\psi - 1} (\theta' - \beta); \quad (16)$$

$B_{\omega}$  – бимомент в сечении, определяемый в полусдвиговой теории [15] как

$$B_{\omega} = -EI_{\omega} \beta'. \quad (17)$$

Приравняв бимомент к нулю (17), получим:

$$\beta' = 0. \quad (18)$$

Домножив выражение (16) на  $\frac{\psi - 1}{GI_d}$  и упростив его, получим:

$$\psi \theta' = \beta. \quad (19)$$

Таким образом, граничные условия при  $x = l$  окончательно определяются выражениями (18) и (19).

Введя обозначение  $\beta' = \alpha$ , перепишем дифференциальное уравнение (14) в классической математической постановке [19]:

$$\alpha'' - k^2 \alpha = \frac{m_x}{\psi EI_{\omega}}, \quad (20)$$

где введено обозначение характеристического числа  $k = \sqrt{\frac{GI_d}{\psi EI_\omega}}$ , являющегося изгибно-крутильной характеристикой для полусдвиговой теории.

Данное дифференциальное уравнение является уравнением 2-го порядка, решение которого имеет общий вид [19]:

$$\alpha = A \operatorname{ch}(kx) + B \operatorname{sh}(kx) - \frac{m_x}{k^2 \psi EI_\omega}. \quad (21)$$

Проинтегрировав уравнение (21) по  $x$ , получим выражение для деформации  $\beta$ :

$$\beta = \frac{A}{k} \operatorname{sh}(kx) + \frac{B}{k} \operatorname{ch}(kx) - \frac{m_x x}{k^2 \psi EI_\omega} + C. \quad (22)$$

Зададим сформулированные выше граничные условия.

Подставив значение деформации в начале стержня (15) в (22), получим:

$$-\frac{B}{k} = C. \quad (23)$$

Подставим граничное условие (18) в (22), получим:

$$A = -\frac{B \operatorname{sh}(kx)}{\operatorname{ch}(kx)} + \frac{m_x x}{k^2 \psi EI_\omega \operatorname{ch}(kx)}. \quad (24)$$

Далее, для того, чтобы воспользоваться двумя другими граничными условиями, выразим функции  $\theta$  и  $\beta$  друг через друга. В [15] приведено выражение:

$$EI_\omega \beta'' - \frac{r^2 GA}{\mu_{\omega\omega}} (\theta' - \beta) = 0, \quad (25)$$

откуда:

$$\theta' = \beta - \frac{EI_\omega}{r^2 GA} \mu_{\omega\omega} \beta''. \quad (26)$$

По определению (3),  $\mu_{\omega\omega} = \frac{(\psi - 1)I_r}{I_d}$ , а квадрат радиуса инерции  $r^2 = \frac{I_r}{A}$ . Тогда (26) можно переписать в виде:

$$\theta' = \beta - \frac{\psi - 1}{\psi k^2} \beta''. \quad (27)$$

Выразив из граничного условия (19)  $\theta'$  и подставив его в (27), получим

$$\beta'' = k^2 \beta. \quad (28)$$

Далее 2 раза продифференцируем выражение (22) и получим:

$$\beta'' = k A \operatorname{sh}(kx) + k B \operatorname{ch}(kx). \quad (29)$$

Подставив (22) и (29) в (28), а также положив  $x = l$ , получим:

$$C = \frac{m_x l}{k^2 \psi EI_\omega}. \quad (30)$$

Тогда, выразив  $B$  из (23) и подставив в (27), получим еще одну неизвестную постоянную:

$$B = -\frac{m_x l}{k \psi EI_{\omega}}. \quad (31)$$

Тогда формула (24) переписется в виде:

$$A = \frac{m_x}{k^2 \psi EI_{\omega} ch(kl)} + \frac{m_x l}{k \psi EI_{\omega} ch(kx)}. \quad (32)$$

Подставив найденные константы  $A$  и  $B$  в выражение (21), а затем – в (17), получим выражение для бимоента в каждом сечении стержня по длине:

$$B_{\omega}(x) = \frac{-m_x}{k^2 \psi \cdot ch(kl)} (ch(kx) - ch(kl) + kl \cdot sh(k(l-x))). \quad (33)$$

Согласно [12, стр.61] бимомент по теории В.З. Власова для консольного стержня выражается зависимостью:

$$B_{\omega}^*(x) = \frac{-m_x}{k^{*2} \cdot ch(k^* l)} (ch(k^* x) - ch(k^* l) + k^* l \cdot sh(k^* (l-x))); \quad (34)$$

$$k^* = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_{\omega}}}. \quad (35)$$

Таким образом, полученное решение по своей форме идентично решению В.З. Власова для «бессдвиговой» теории тонкостенных стержней и отличается от него лишь только наличием в знаменателе параметра  $\psi$  и отличием выражений для изгибно-крутильной характеристики  $k$ .

Подставив константы (30), (31) и (32) в (22), получим выражение для деформации:

$$\beta(x) = \frac{m}{EI_{\omega} k^3 \cdot ch(kl)} [k(l-x) \cdot ch(kx) + sh(kx) - kl \cdot ch(k(l-x))], \quad (36)$$

которое также совпадает с выражением по Власову [12, 17] с точностью до аналогии величин  $k$  и  $k^*$ .

### Пример 2. Жестко заземленная с двух сторон тонкостенная балка

Рассмотрим тонкостенный стержень, жестко закрепленный с двух сторон, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , приложенной с эксцентриситетом  $e$  (рис. 5).

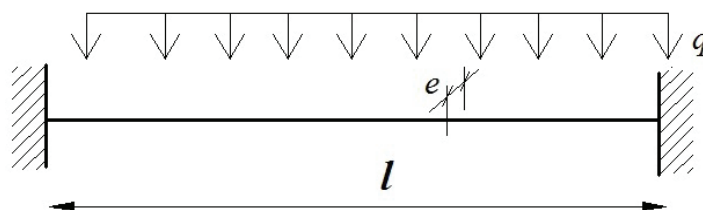


Рисунок 5. Стержень, жестко заземленный с двух сторон

Дифференциальным уравнением кручения стержня будет служить уравнение (14), а его решением – выражение (22).

Граничные условия для обоих концов ( $x = 0$  и  $x = l$ ):

$$\beta = 0. \quad (37)$$

В силу идентичности условий закрепления на левом конце с предыдущей задачей останется в силе выражение (23).

Закрепление на правом конце (выражение для деформации (22)):

$$\frac{A}{k} sh(kl) + \frac{B}{k} ch(kl) - \frac{m_x l}{k^2 \psi EI_\omega} + C = 0. \quad (38)$$

В силу симметрии условий нагружения и опирания, центральное сечение не может деформироваться в ту или другую сторону. Поэтому это же условие выполнится и при  $x = \frac{l}{2}$ :

$$\frac{A}{k} sh\left(\frac{kl}{2}\right) + \frac{B}{k} ch\left(\frac{kl}{2}\right) - \frac{m_x l}{2k^2 \psi EI_\omega} + C = 0. \quad (39)$$

Подставим (23) в (38) и (39) и запишем получившуюся систему уравнений относительно постоянных  $A$  и  $B$ , перегруппировав слагаемые:

$$\begin{cases} A \cdot sh(kl) + B \cdot (ch(kl) - 1) = \frac{m_x l}{k \psi EI_\omega} \\ A \cdot sh\left(\frac{kl}{2}\right) + B \cdot \left(ch\left(\frac{kl}{2}\right) - 1\right) = \frac{m_x l}{2k \psi EI_\omega} \end{cases}. \quad (40)$$

Решая систему (40), получаем:

$$\begin{cases} A = \frac{m_x l}{2k \psi EI_\omega \cdot sh(kl)} (1 + ch(kl)) \\ B = -\frac{m_x l}{2k \psi EI_\omega} \end{cases}. \quad (41)$$

Подставив найденные константы  $A$  и  $B$  в выражения (23) и затем (22), получим выражение для функции деформации:

$$\beta(x) = \frac{m_x}{2GI_d} \left( \frac{sh(k(x-l)) + sh(kx)}{sh(kl)} \cdot l + l - 2x \right). \quad (42)$$

Данное выражение можно преобразовать с учетом свойств гиперболических функций:

$$\beta(x) = \frac{m_x}{GI_d} \left( \frac{sh\left(k\left(x - \frac{l}{2}\right)\right)}{sh\left(\frac{kl}{2}\right)} + \frac{l}{2} - x \right). \quad (43)$$

Данное выражение полностью совпадает с выражением, полученным В.З. Власовым [12] с точностью до выражения изгибно-крутильной характеристики  $k$  (см. формулу (35))

Продифференцировав (43) и домножив на секториальную жесткость (17), получим выражение для бимоента:

$$B_\omega(x) = \frac{m_x}{\psi k^2} \left[ 1 - \frac{kl}{2} \frac{ch\left(k\left(x - \frac{l}{2}\right)\right)}{sh\left(\frac{kl}{2}\right)} \right]. \quad (44)$$



Проинтегрировав формулу (27) взяв в качестве незадействованного граничного условия равенство нулю угла поворота в начале стержня ( $\theta(0) = 0$ ), получим угол закручивания:

$$\theta(x) = \frac{m}{EI_{\omega} k^3} \left[ \frac{kx(x-l)}{2} - l \frac{\operatorname{sh} \frac{kx}{2} \operatorname{sh} \frac{k(x-l)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]. \quad (45)$$

### Численные решения уравнения полусдвиговой теории

Рассмотрим ниже основные типы линейных одномерных задач с использованием конечных элементов, предложенных в [1, 20, 21, 22].

В качестве модели исследования возьмем тонкостенный профиль производства ООО «Балтпрофиль» по ТУ 1121-001-1383-0080-2003. Профили стальные оцинкованные для системы каркасного строительства (рис. 6).

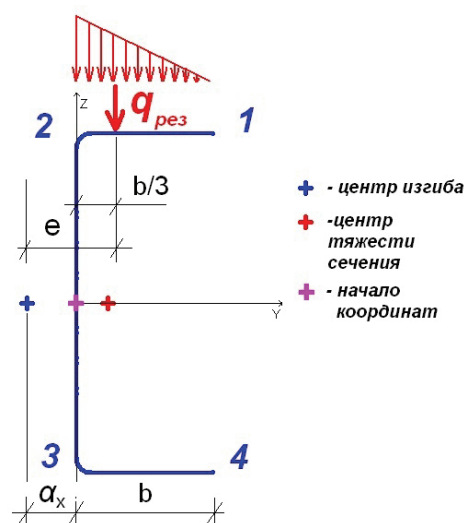
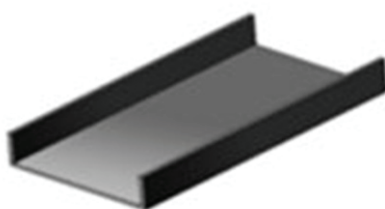
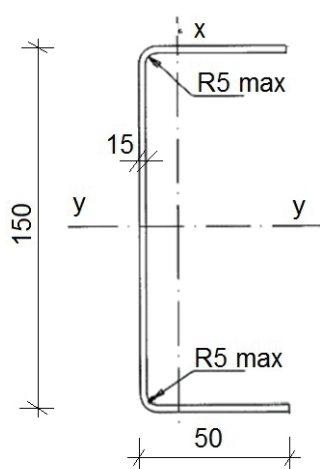


Рисунок 6. Тонкостенный профиль ПН 150-1,5

Рисунок 7. Схема приложения нагрузки

Таблица 3. Геометрические характеристики профиля ПН 150-1,5

Параметр	Значение	Единицы измерения
$I_d$	Момент инерции при свободном кручении	0,028125 см <sup>4</sup>
$I_w$	Секториальный момент инерции	351,5625 см <sup>6</sup>
$I_u$	Максимальный момент инерции	126,5625 см <sup>4</sup>
$\alpha_x$	Координата центра изгиба по оси Y	1,6667 см

$G=0,81 \cdot 10^6$  кгс/см<sup>2</sup> и  $E=2,1 \cdot 10^6$  кгс/см<sup>2</sup> – модули сдвига и упругости стали С-255.

В качестве «тестовой» нагрузки приложим равномерно распределенную по длине единичную нагрузку  $q=1$  кгс/м с эксцентриситетом  $e$ .

Дело в том, что при приложении равномерно распределенной нагрузки и доведении ее до максимального (разрушающего) значения ввиду достаточно большой податливости профиля верхней полки, которая будет существенно деформироваться, профиль потеряет свою первоначальную геометрическую форму. Нагрузка, в большинстве случаев являясь «штамповой», т.е. более жесткой, чем профиль по своей природе, будет уже неплотную прилегать к полке. Для косвенного учета этой геометрической нелинейности приложим нагрузку не равномерно по полке, а по закону треугольника [10]. Тогда результирующий вектор нагрузки пройдет через центр тяжести эпюры нагрузки, лежащей в точке пересечения медиан треугольника, т.е. на расстоянии  $\frac{b}{3}$  от края стенки.

Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем

Как видно из рисунка 7, полный эксцентриситет приложения нагрузки будет складываться из эксцентриситета, обусловленного несовпадением центра тяжести и центра изгиба поперечного сечения  $\alpha_x$ , (равного  $Y_b$ -координате центра изгиба по оси  $y$ ) и непосредственного эксцентриситета приложения нагрузки, равного:

$$e = \alpha_x + \frac{b}{3} = 1,682 + \frac{5}{3} = 3,35 \text{ см.} \quad (46)$$

### Решение задачи в бессдвиговой теории

Рассмотрим стержень, опорные сечения которого закреплены от перемещений как в плоскости этого сечения, так и из плоскости. Это значит, что опорные сечения не только не имеют углов закручивания, но также не могут перемещаться из своей плоскости. Граничные условия в этом случае будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad 1) \theta = 0; \quad 2) \theta' = 0; \\ \text{при } x = l, \quad 3) \theta = 0; \quad 4) \theta' = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (47)$$

Аналитические решения в такой задаче для функций кручения и депланации, бимоента, секториального крутящего момента и момента чистого кручения согласно [11] составят соответственно:

$$\theta = \frac{qe}{EI_\omega k^{*3}} \left[ \frac{k^* z(x-l)}{2} - l \frac{\operatorname{sh} \frac{k^* x}{2} \operatorname{sh} \frac{k^* (x-l)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{k^* l}{2}} \right], \quad (48)$$

$$\theta' = \frac{qe}{Ek^{*2} I_\omega} \left[ x - \frac{l}{2} - \frac{l \operatorname{sh}(k^* (x - \frac{l}{2}))}{2 \operatorname{sh} \frac{k^* l}{2}} \right], \quad (49)$$

$$B_\omega = -\frac{qe}{k^{*2}} \left[ 1 - \frac{k^* l}{2} \frac{\operatorname{ch}(k^* (x - \frac{l}{2}))}{\operatorname{sh} \frac{k^* l}{2}} \right]. \quad (50)$$

Чтобы получить численные решения для обозначенной задачи, зададим граничные условия (47), преобразовав матрицу жесткости системы (2.17).

$$[K^{(i)}][U^{(i)}] = [P^{(i)}] \text{ или } \begin{cases} k_{11}^{(i)} \theta_1 + k_{12}^{(i)} \theta_1' + \dots + k_{1n}^{(i)} \theta_2' = P_1 \\ k_{21}^{(i)} \theta_1 + k_{22}^{(i)} \theta_1' + \dots + k_{2n}^{(i)} \theta_2' = P_2 \\ \dots \\ k_{n1}^{(i)} \theta_1 + k_{n2}^{(i)} \theta_1' + \dots + k_{nn}^{(i)} \theta_2' = P_n \end{cases}. \quad (51)$$

Первые две строчки системы уравнений (51) свидетельствуют о равенстве нулю соответственно угла закручивания и депланации, т.е. могут быть записаны в виде:

$$k_{11}^{(1)} \theta_1 = 0; k_{22}^{(1)} \theta_1' = 0. \quad (52)$$

Аналогичным образом на другом конце стержня:

$$k_{33}^{(n)} \theta_{n+1} = 0; k_{22}^{(l)} \theta_1' = 0. \quad (53)$$

Однако в силу теоремы Бетти [23], матрица жесткости системы является симметричной матрицей, т.е.  $k_{ij} = k_{ji}$ . Поэтому для автоматического выполнения условий (52) и (53), а также теоремы Бетти, при разбиении данного стержня на любое количество конечных элементов нужно:

- 1) «обнулить» две первых и две последних строчки и столбца матрицы  $[K]$  за исключением элементов главной диагонали, как это показано на примере разбиения на 4КЭ для данной задачи (рис. 8);

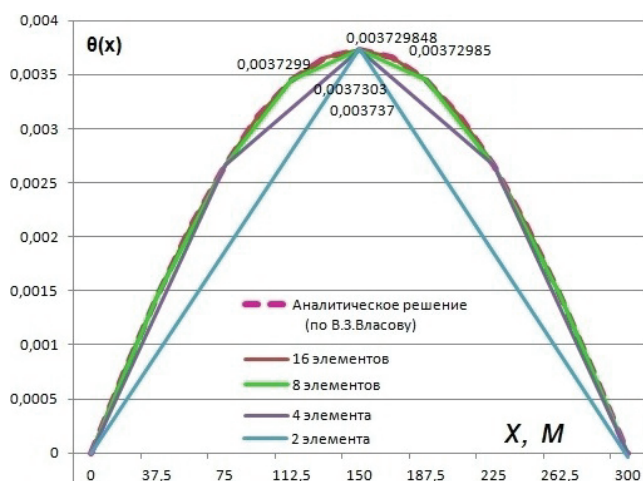
[illegible]

**Рисунок 8. Пример матрицы жесткости и столбца нагрузок (с условием заделки с двух сторон)**

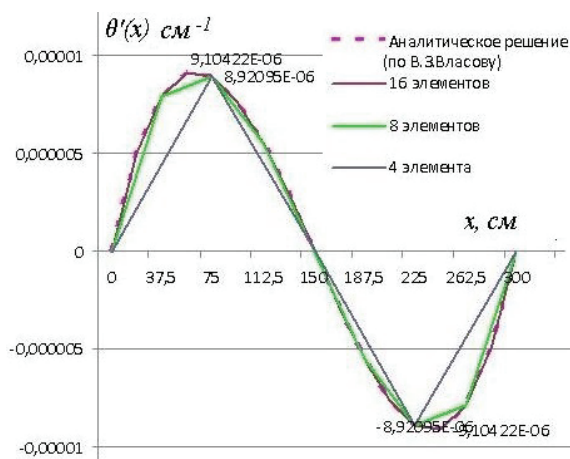
- 2) «обнулить» две первых и два последних числа столбца вектора нагрузок [P] (рис. 8, правая часть).

Решая систему уравнений (51) при разных шагах разбиения стержня, получим ряд зависимостей функций перемещения и усилий от координаты по длине балки (рис. 9-11).

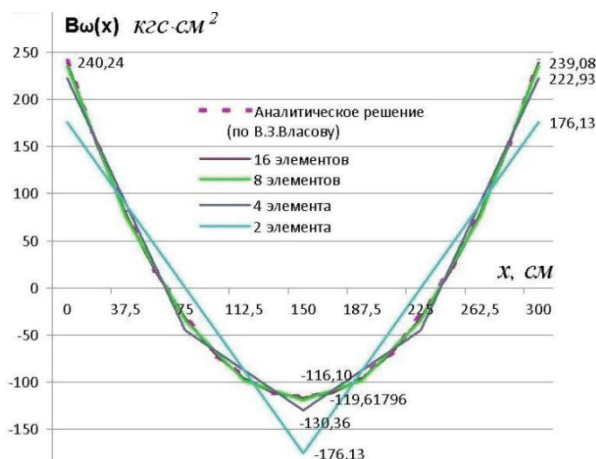
Результаты, показанные на графиках, сведены в таблицу 4.



**Рисунок 9. График функции кручения по  
бессдвиговой теории**



**Рисунок 10. График функции депланации по бессдвиговой теории**



**Рисунок 11. График распределения бимомента по бессдвиговой теории**

**Таблица 4. Результаты численного эксперимента по бессдвиговой теории**

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Характерные значения параметров			
			$\theta_{\max}, 10^{-4}$	$\beta_{\max}, 10^{-6}\text{см}^{-1}$	$B_{\omega}^{on}, \text{кгс}\cdot\text{см}^2$	$B_{\omega}^{np}, \text{кгс}\cdot\text{см}^2$
1	1	300	-	-	-	-
2	2	150	8,94648	0	-176,13	176,13
3	4	75	8,94669	8,92095	-222,93	130,36
4	8	37,5	8,94693	8,92128	-235,70	119,62
5	16	18,75	8,94695	9,10422	-239,08	116,98
6	аналитическое решение		8,94695	9,10422	-240,24	116,10

Сходимость данного вида аппроксимации достаточно очевидна; точное решение в пределах допустимой инженерной погрешности достигается уже при разбиении на 8 конечных элементов, однако данный метод не подходит для решения задач о стесненном кручении тонкостенных стержней открытого и комбинированного профилей.

#### **Решение задачи в полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций кручения и деформации**

В данном параграфе рассмотрим универсальный метод, позволяющий решить задачи о стесненном кручении тонкостенных стержней любых типов, основанный на полусдвиговой теории [15], на примере, приведенном в предыдущем разделе.

Решая систему разрешающих уравнений, аналогичную (51) и сформированную на основании матриц жесткости конечных элементов, предложенных в [1], получим графики зависимости функций кручения и деформации, а также бимоента (соответственно рис. 12,13,14).

Граничные условия зададим по формулам, аналогичным (52) и (53), полагая  $\beta$  вместо  $\theta'$ , и далее – «обнулением» соответствующих строчек.

Результаты вычислений сведены в таблицу 5.

**Таблица 5. Результаты численного эксперимента для балки, жестко заземленной по краям при линейной аппроксимации функций перемещений**

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Характерные значения параметров			
			$\theta_{\max}, 10^{-4}$	$\beta_{\max}, 10^{-6}\text{см}^{-1}$	$B_{\omega}^{on}, \text{кгс}\cdot\text{см}^2$	$B_{\omega}^{np}, \text{кгс}\cdot\text{см}^2$
1	1	300	-	-	-	-
2	2	150	0,161635	0,00000	0,000	0,000
3	4	75	0,644649	0,644649	-6,346	6,346
4	8	37,5	2,04298	2,0078	-34,667	24,671
5	16	18,75	4,8821	4,88049	-104,171	55,895
6	32	9,375	7,48119	7,53879	-178,034	88,742
7	64	4,6875	8,62977	8,7033	-216,569	106,315
8	аналитическое решение		8,67662	9,17292	-240,35	115,163

По результатам численного эксперимента, отображенным на графиках (рис. 12-14) и сведенным в таблицу 5, можно сделать следующие общие выводы и замечания.

1. При линейной аппроксимации функций перемещения  $\theta$  и  $\beta$  наблюдается очень низкая скорость сходимости. Численные решения, удовлетворяющие инженерной точности, достигаются лишь при разбиении на 64 КЭ.
2. Сходимость бимоента, как наиболее важного силового фактора, наблюдается также при разбиении на 64 конечных элемента.
3. Такие силовые факторы как бимомент и момент чистого кручения являются постоянными величинами в пределах одного конечного элемента. Данное обстоятельство сказывается на том, что значения этих силовых факторов в опорных сечениях без дополнительной интерполяции определить не удастся.

4. Секториальный крутящий момент является линейной функцией и потому может быть определен в узловых сечениях. Однако значения на правом и левом узлах двух соседних конечных элементах существенно друг от друга отличаются, вплоть до знака. Представленные на графике узловые значения, взятые как среднее арифметическое, имеют слабую сходимость, даже при разбиении на 64 конечных элемента не удовлетворяющую требованиям инженерной точности.

Из вышесказанного следует, что линейная аппроксимация функций перемещений не рекомендуется для расчетов тонкостенных стержневых элементов.

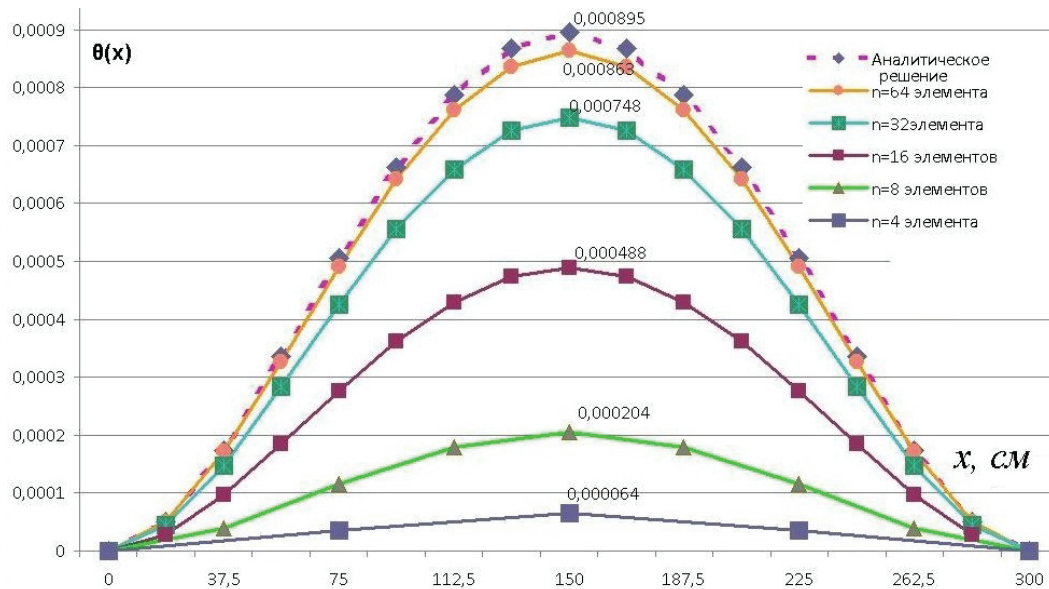


Рисунок 12. График функции кручения по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций перемещений

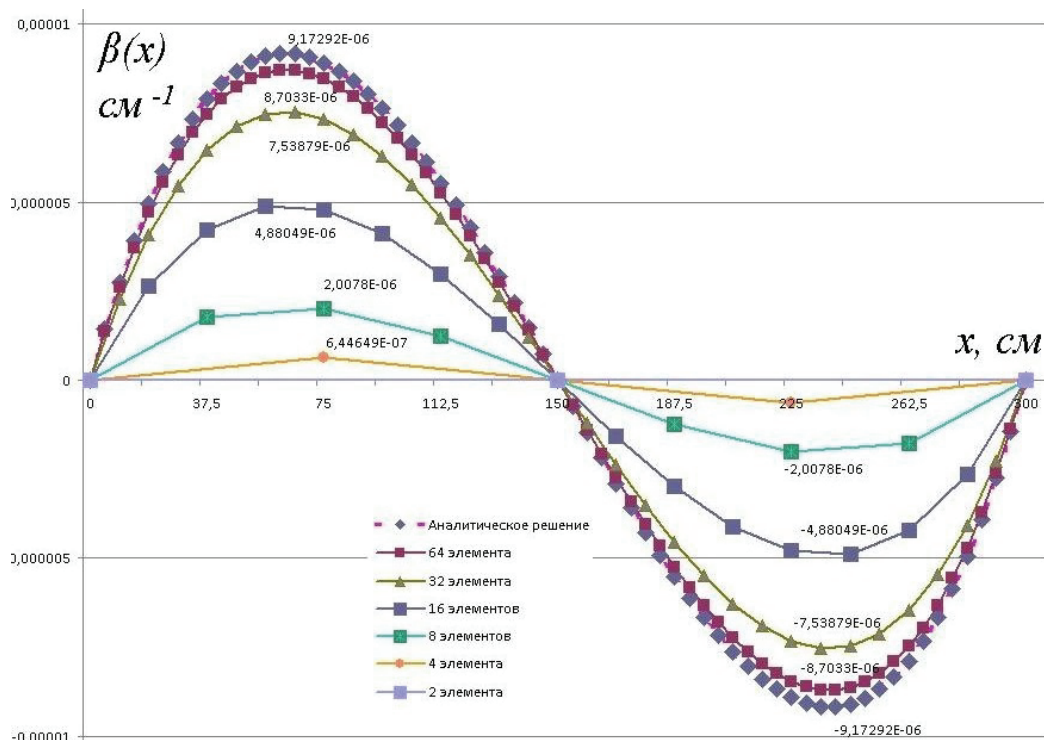
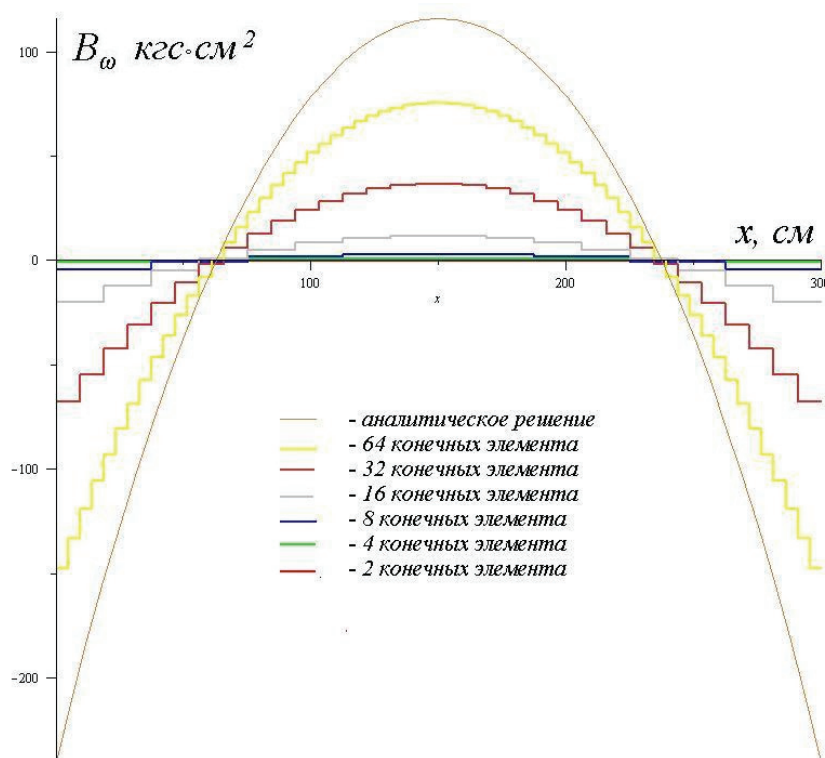


Рисунок 13. График функции деформации по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций перемещений



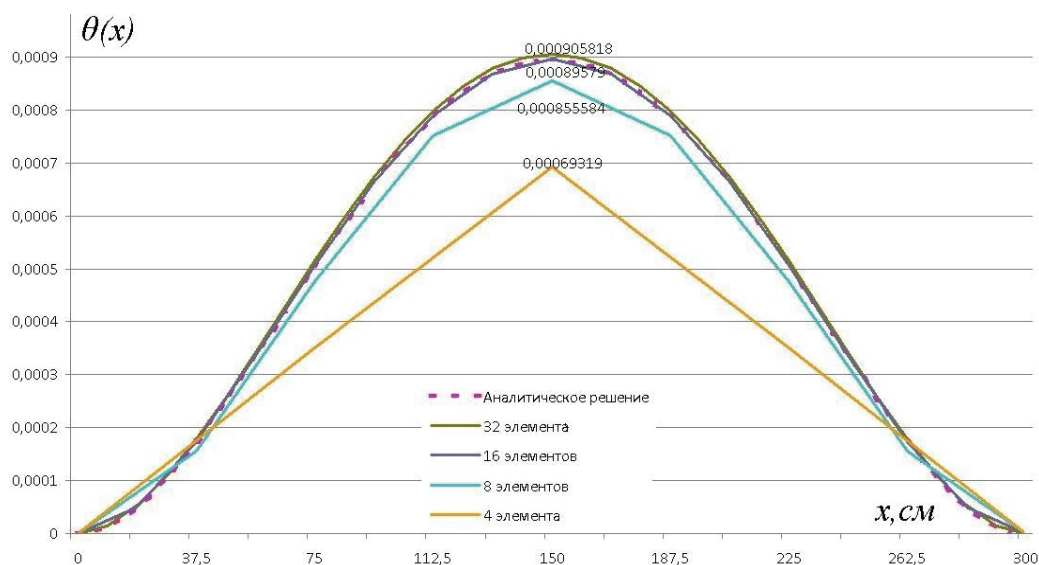


**Рисунок 14. График распределения бимомента по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций перемещений**

**Решение задачи в полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функции кручения и квадратичной аппроксимации функции деформации**

В данном параграфе рассмотрено решение ранее обозначенной задачи, но при квадратичной аппроксимации функции кручения. При данном типе аппроксимации производная  $\theta'$  окажется линейной функцией и, таким образом, разность двух линейных величин  $\theta'$  и  $\beta$ , входящая в третье слагаемое функционала (2), будет вычислена более точно. Данное обстоятельство повысит точность алгоритма и, соответственно, скорость сходимости неизвестных.

На рис. 15-17 представлены графики зависимости функций кручения и деформации, а также бимомента.



**Рисунок 15. График функции кручения по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций кручения и квадратичной аппроксимации функции деформации**

Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем

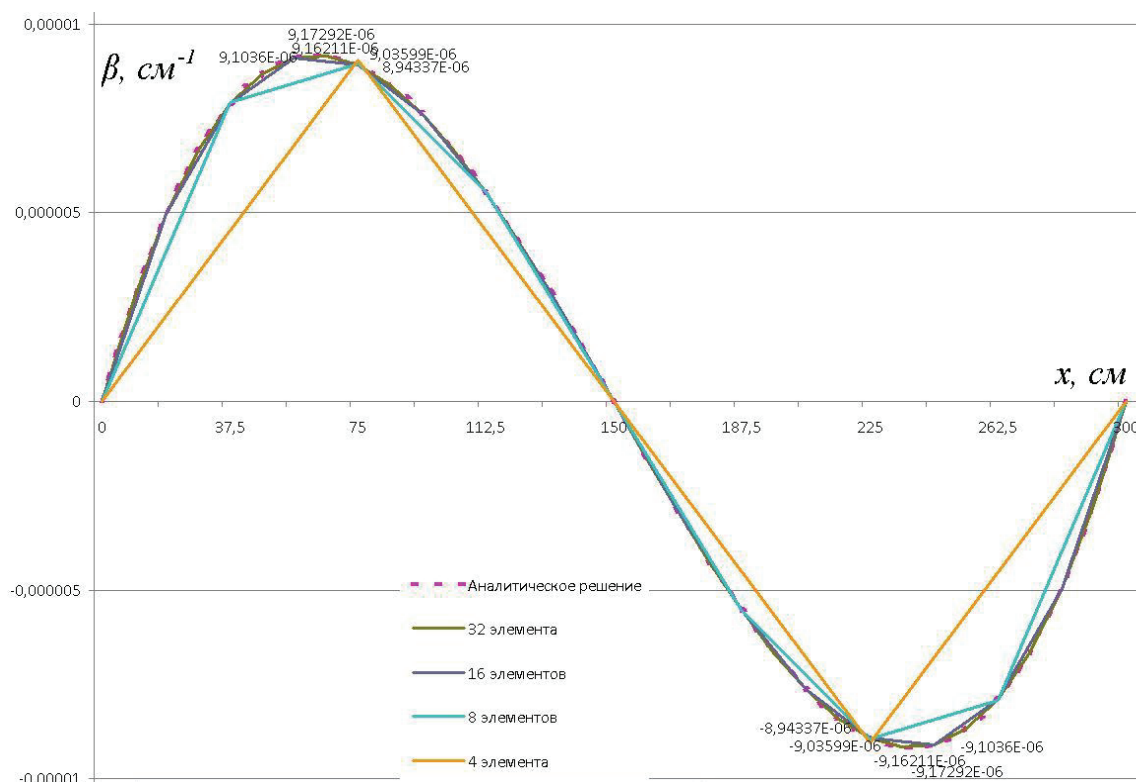


Рисунок 16. График функции деформации по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций кручения и квадратичной аппроксимации функции деформации

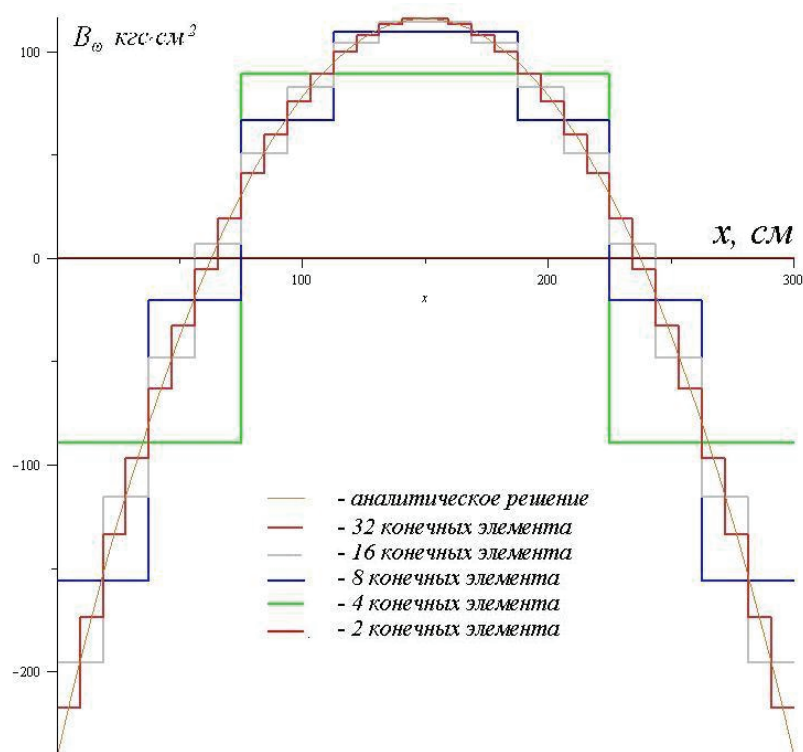


Рисунок 17. График распределения бимомента по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функций кручения и квадратичной аппроксимации функции деформации

**Таблица 6. Результаты численного эксперимента для балки, жестко защемленной по краям, при линейной и квадратичной аппроксимациях функций перемещений**

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Характерные значения параметров			
			$\theta_{\max}, 10^{-4}$	$\beta_{\max}, 10^{-6} \text{ см}^{-1}$	$B_{\omega}^{on}, \text{ кгс} \cdot \text{см}^2$	$B_{\omega}^{np}, \text{ кгс} \cdot \text{см}^2$
1	1	300	-	-	-	-
2	2	150	0,16153	0	-	-
3	4	75	6,9319	9,0360	-133,422	133,422
4	8	37,5	8,55584	8,9434	-186,512	116,953
5	16	18,75	8,89579	9,1036	-213,065	116,093
6	32	9,375	9,05818	9,16211	-226,491	116,018
7	аналитическое решение		8,9745	9,17292	-240,35	115,163

По результатам численного эксперимента, отображенным на графиках (рис. 15-17) и сведенным в таблицу 6, можно сделать следующее заключение: при данном типе аппроксимации функций  $\theta$  и  $\beta$  наблюдается достаточно высокая скорость сходимости. Так, например, численные решения, удовлетворяющие инженерной точности, достигаются уже при разбиении на 8 КЭ.

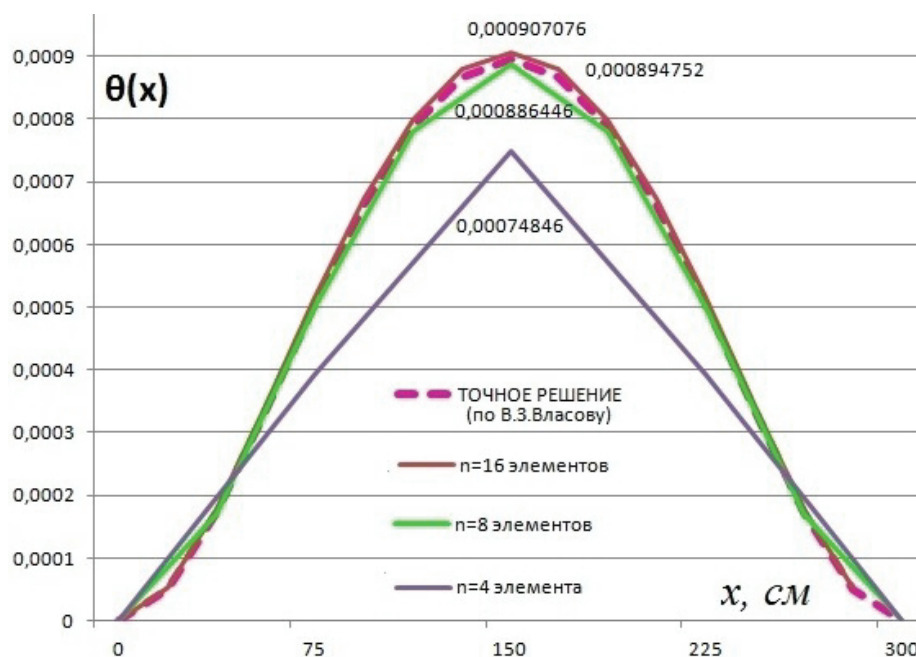
Однако функция бимоента оказывается ступенчатой. Как показали предварительные исследования, простые виды аппроксимаций (осреднение значений по элементам в узле либо принятие полученных постоянных на элементе значений только в центре соответствующих элементов) являются неэффективными с точки зрения точности.

Далее в статье рассмотрим два варианта решения данной проблемы:

- 1) использование квадратичной аппроксимации функции деформации, приводящей к линейному распределению бимоента в пределах элемента (п. 3.4);
- 2) сопряженная аппроксимация узловых значений с сохранением линейной аппроксимации функции деформации (п. 3.5).

#### *Решение задачи в полусдвиговой теории при квадратичной аппроксимации функций кручения и деформации*

На рисунках 18-20 представлены графики зависимости функций кручения и деформации, а также бимоента, для ранее обозначенной задачи, но при способе квадратичной аппроксимации. Конечные элементы, необходимые для решения данной задачи, построены ранее в [1].



**Рисунок 18. График функции кручения по полусдвиговой теории при квадратичной аппроксимации функций перемещений**



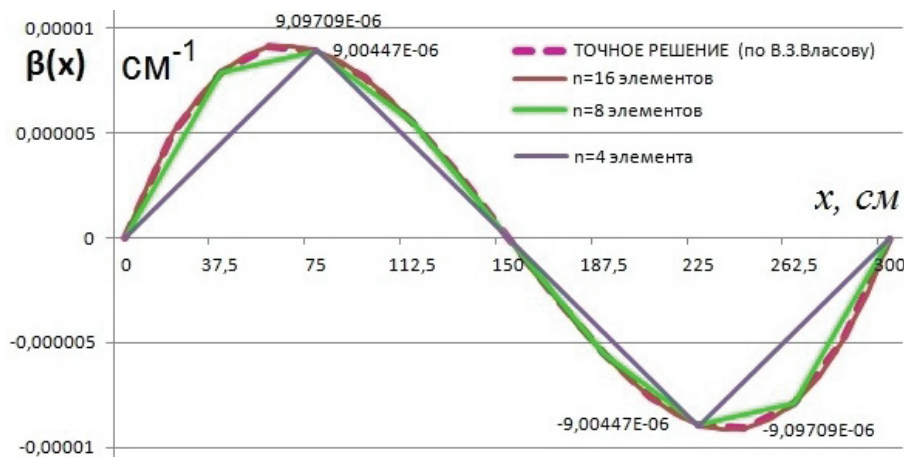


Рисунок 19. График функции депланации по полусдвиговой теории при квадратичной аппроксимации функций перемещений

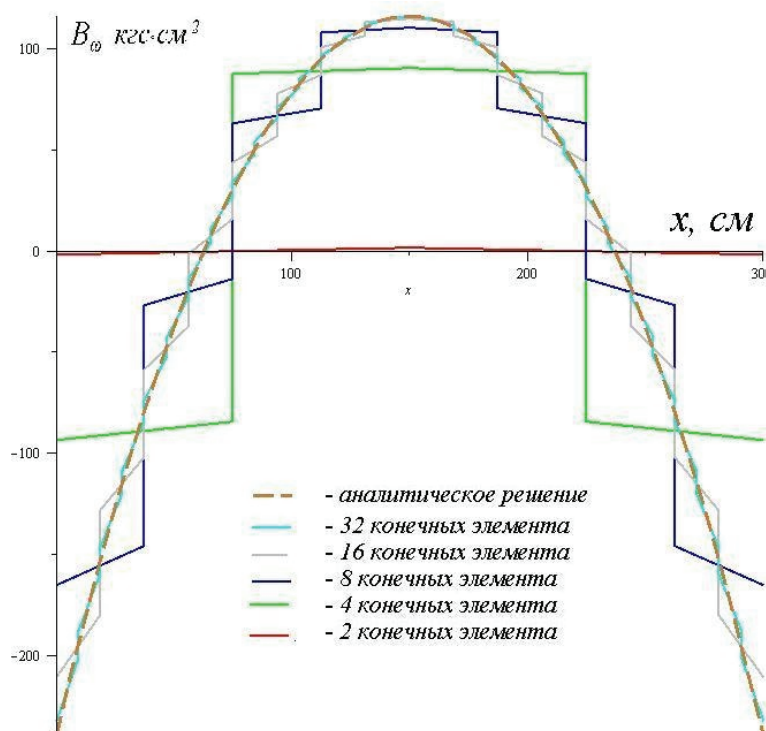


Рисунок 20. График распределения бимоента по полусдвиговой теории при квадратичной аппроксимации функций перемещений

Таблица 7. Результаты численного эксперимента для балки, жестко защемленной по краям, при квадратичной аппроксимации функций перемещений

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Характерные значения параметров			
			$\theta_{\max}, 10^{-4}$	$\beta_{\max}, 10^{-6} \text{ см}^{-1}$	$B_{\omega}^{on}, \text{ кгс} \cdot \text{см}^2$	$B_{\omega}^{np}, \text{ кгс} \cdot \text{см}^2$
1	1	300	-	-	-	-
2	2	150	0,9022	0,0000	-14,59	14,59
3	4	75	7,4846	9,00447	-123,19	99,51
4	8	37,5	8,86446	8,92597	-201,67	115,20
5	16	18,75	9,07076	9,09709	-232,10	116,48
6	аналитическое решение		8,9745	9,17292	-240,35	115,163

Как видно из таблицы 7, наблюдается достаточно приемлемая скорость аппроксимации, и требуемая сходимость достигается при разбиении на 8 конечных элементов, а сходимость бимоментов по краям – при 16 элементах.

Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем

### Сопряженная аппроксимация бимомента и момента чистого кручения

Одним из недостатков применения линейных интерполяционных полиномов функции является невозможность получения градиентов как функций  $x$ . Градиент и любая связанная с ним величина получаются постоянными внутри элемента. Чтобы иметь более приемлемые значения узловых величин применяются различные методы усреднения. Можно, например, в качестве значения градиента в данном узле принять среднюю по двум соседним с этим узлом элементам величину, что является самым простым и, соответственно, самым приближенным способом.

Узловые значения усилий элемента (бимомент, секториальный крутящий момент и др.) можно также получить с помощью теории сопряженной аппроксимации. [24,25,26]. Этот способ дает значения статических силовых факторов элемента, согласованные с аппроксимирующими полиномами для векторной или скалярной величины.

Представим бимомент как линейную функцию в пределах одного конечного элемента  $(i)$ :

$$B_{\omega}^{(i)}(x) = \mathfrak{D}_1^{(i)} B_{2i-1} + \mathfrak{D}_2^{(i)} B_{2i+1}, \quad (54)$$

где  $\mathfrak{D}_1^{(i)}, \mathfrak{D}_2^{(i)}$  – линейные полиномы [1].

Тогда узловые значения бимомента получаются решением системы уравнений:

$$[C] \cdot [B_{\omega}] = [R], \quad (55)$$

где  $[B_{\omega}]$  – столбец узловых бимоментов:

$$[B_{\omega}] = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_i & \dots & B_{n+1} \end{pmatrix}^T; \quad (56)$$

$[C]$  – матрица размерностью  $n \times n$ , определяемая как сумма матриц элементов вида:

$$[C^{(i)}] = \int_0^l [\mathfrak{D}^{(i)}]^T \cdot [\mathfrak{D}^{(i)}] dx = \begin{pmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}; \quad (57)$$

$[R]$  – столбец, являющийся суммой поэлементных векторов, определяемых равенством:

$$[R^{(i)}] = \int_0^l B_{\omega}^{(i)} \cdot [\mathfrak{D}^{(i)}]^T dx, \quad (58)$$

где  $B_{\omega}^{(i)}$  – бимомент в пределах одного конечного элемента, являющийся постоянной величиной на элементе.

Или, с учетом постоянства исходного бимомента в пределах конечного элемента:

$$[R^{(i)}] = B_{\omega}^{(i)} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Распишем систему уравнений (55):

$$[K] = \begin{pmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{22}^{(i-1)} + C_{11}^{(i)} & C_{12}^{(i)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{12}^{(n)} & C_{22}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_i \\ \dots \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} + R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} + R_1^{(3)} \\ \dots \\ R_2^{(i-1)} + R_1^{(i)} \\ \dots \\ R_2^{(n)} \end{pmatrix} \quad (60)$$

и определим узловые неизвестные (56).

Аналогичным образом можно определить столбец узловых значений момента чистого кручения.

Далее рассматривается пример использования сопряженной аппроксимации для значений бимомента, вычисленного по полусдвиговой теории при линейной аппроксимации функции деформации и квадратичной аппроксимации функции кручения. Результаты сведены в таблицу 8 и представлены в виде графика (рис. 21).

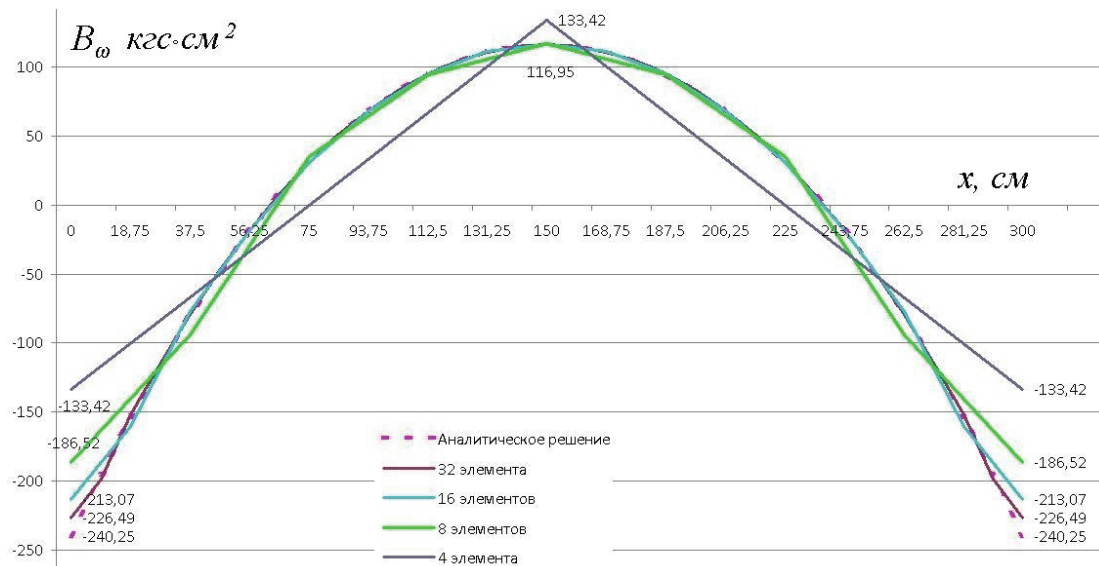


Рисунок 21. График распределения бимомента по полусдвиговой теории после сопряженной аппроксимации

Таблица 8. Результаты сопряженной аппроксимации функции бимомента

№ п/п	Кол- во КЭ	Размер КЭ, см	Значения $B_{\omega}$ , кгс*см <sup>2</sup> при x, см								x=225	x=300	
			$x = 0$		$x = 75$		$x = 150$ (центр)						
			МКЭ	сопряж.	МКЭ		сопряж.	МКЭ		сопряж.			
			$B_{\omega}^{справа}$	$B_{\omega}$	$B_{\omega}^{слева}$	$B_{\omega}^{справа}$	$B_{\omega}$	$B_{\omega}^{слева}$	$B_{\omega}^{справа}$	$B_{\omega}$	симметрично	симметрично	
1	1	300	-	-	-	-	-	-	-	-			
2	2	150	0,0000	-	0,0000	0	-	0	0	-			
3	4	75	-88,948	-133,422	-88,948	88,948	0	88,948	88,948	133,422			
4	8	37,5	-155,717	-186,515	-20,356	66,373	34,7809	109,3425	109,3425	116,953			
5	16	18,75	-194,495	-213,065	7,2018	50,5179	30,908	114,3377	114,3377	116,093			
6	32	9,375	-217,137	226,491	19,4555	41,0854	30,7472	115,5802	115,5802	116,018			
	Аналитич.реш		-240,35		30,77			115,163					

Сходимость бимоента, полученная методом сопряженной аппроксимации, наблюдается также при разбиении на 8 конечных элементов. Однако бимомент в опорно-концевых сечениях даже при разбиении стержня на 32 конечных элемента не дает требуемой инженерной точности, что свидетельствует о недостаточности разбиения.

Из вышесказанного следует, что линейная аппроксимация функций кручения и квадратичная аппроксимация функции деформации при сопряженной аппроксимации узловых неизвестных может быть использована для расчетов при разбиении минимум на 8 КЭ.

### Выводы

1. Получены формулы для вычисления коэффициента влияния формы сечения для швеллерового профиля, необходимые для применения полусдвиговой теории стесненного кручения тонкостенных стержней.
2. На конкретных примерах (рис.3) показана сходимость предложенных конечных элементов, скорость которой зависит от типа аппроксимации базисных функций.
3. Показано, что линейная аппроксимация функций перемещений не может быть рекомендована для расчетов тонкостенных стержневых элементов при разбиении стержня менее чем на 64 КЭ.
4. Показано, что линейная аппроксимация функций кручения и квадратичная аппроксимация функции деформации при сопряженной аппроксимации узловых неизвестных может быть использована для расчетов при разбиении минимум на 8 КЭ.
5. Метод квадратичной аппроксимации базисных функций предложен как наиболее подходящий для практических расчетов на прочность тонкостенных конструкций, имеющий оптимальное соотношение между скоростью сходимости и простотой реализации.
6. Получены аналитические решения для основных силовых факторов и деформаций по полусдвиговой теории для четырех наиболее часто встречающихся в инженерной практике простых расчетных схем, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой с эксцентриситетом.

### Литература

1. Лалин В. В., Рыбаков В.А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №8(26). С. 69-80.
2. Гордеева А. О., Ватин Н. И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 36-46.
3. Смазнов Д. Н. Конечноэлементное моделирование работы жестких вставок тонкостенных холодноформованных стальных профилей // Научный журнал КубГАУ. 2011. №67(03). С. 1-13.
4. Айрумян Э. Л., Белый Г. И. Исследование работы стальной фермы из холодногнутых профилей с учетом их местной и общей устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №5. С. 41-44.
5. Шатов Д. С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 32-35.
6. Юрченко В. В. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8(18). С. 38-46.
7. Bayan Anwer Ali, Sariffuddin Saad, Mohd Hanim Osman, Yusof Ahmad. Finite Element Analysis of Cold-formed Steel Connections // International Journal of Engineering (IJE). 2011. Volume 5, №2. Pp. 55-61.
8. Schafer W., Pekoz T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses // Journal of Constructional Steel Research. 1998. Vol. 47. Pp. 193-210.
9. Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы // СтройПРОФИль. 2007. № 2(56). С. 60-63.

10. Рыбаков В. А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2010. 206 с.
11. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания). М. : Госстройиздат, 1940. 276 с.
12. Кузьмин Н. А., Лукаш П. А., Милейковский И. Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М. : Госстройиздат, 1960. 264 с.
13. Туснин А. Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.т.н. М. , 2004. 37 с.
14. Sedlacek G., Bild J., Ungermann D. On the buckling of plates – Some recent developments in light weight structures// 4th international conference on aluminium weldments. Tokyo: 1988.
15. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М.:Издательство ассоциации строительных вузов, 2005. 736с.
16. Уманский А. А. Строительная механика самолета. М.: Оборонгиз, 1961. 569с.
17. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 205 с.
18. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1: Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем. М. : СКАД СОФТ, 2010. 681 с.
19. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
20. Рыбаков В. А., Лалин В. В.. Разработка алгоритма метода конечных элементов для полусдвиговой теории тонкостенных стержней // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2011. С. 212-214.
21. Рыбаков В.А. Применение метода конечных элементов для полусдвиговой теории тонкостенных стержней // Материалы Пятого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2011.С. 30-32.
22. Морозов С. А., Рыбаков В. А. Применение численных методов для разложения матрицы жесткости систем тонкостенных конечных элементов // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2011. С.210-212.
23. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М. : Высшая школа, 1986. 607 с.
24. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М. : Мир, 1976. 464 с.
25. Oden J. T., Reddy J. N. Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1973. Vol. 6, №1. Pp. 55-61.
26. Oden J. T. A general theory of finite elements. I. Topological consideration // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1969. Vol. 1, №2. Pp. 201-205.

*\*Владимир Александрович Рыбаков, Санкт-Петербург, Россия*

*Тел. моб.: +7(964)331-29-15, эл. почта: fishermanoff@mail.ru*

# The Finite Elements Research for Calculation of Thin-Walled Bar Systems

**V.V. Lalin**

*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*

**V.A. Rybakov**

*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*

**S.A. Morozov**

*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*

+7 (964) 331-29-25; e-mail: fishermanoff@mail.ru

## Key words

torsion; warping; interpolation polynomials; shear deformation; bimoment; stiffness matrix; factor of cross-section influence

## Abstract

This article is written to continue the article of recent issue of the journal (Lalin V.V., Rybakov V.A. The finite elements for design of building walling made of thin-walled beams) considered the creating of 4 types of finite elements – depending on a way of function approximation of deformations (torsion and warping):

1. Linear approximation of torsional functions with a 2-central finite element having 4 transitions;
2. Square-law approximation of torsional functions and linear approximation of warping function with a 3-central finite element having 5 transitions;
3. Square-law approximation of functions of torsional and warping functions with a 3-central finite element having 6 transitions
4. Cubical approximation of functions of torsional with a 2-central finite element having 4 transitions

In the article we continue realization of finite elements method algorithms and we consider some test examples about the torsion of the thin-walled beam having various boundary conditions on the ends. Also the given problems are considered from the point of view of search of static power factors at the constrained torsion: a bimoment, a sectorial torsion moment and the moment of free torsion.

Formulas for cross-sectional form for channel influence factor calculation, which are necessary for application of the semisheared theory of thin-walled beams, are received. Analytical decisions for the basic power factors and deformations under the semisheared theory for simple schemes most often meeting in engineering practice loaded by in regular intervals distributed loading with excenterisity are received. Convergence of the offered finite elements which speed depends on the type of basic functions approximation is shown on concrete examples.

Recommendations and conclusions concerning application of various finite elements are formulated.

## References

1. Lalin V. V., Rybakov V. A. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 8(26). Pp. 69-80. (rus)
2. Gordeeva A. O., Vatin N. I. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 3(21). Pp. 36-46. (rus)
3. Smaznov D. N. *Nauchnyy zhurnal KubGAU* [Scientific Magazine of KubGAU]. 2011. No.67(03). Pp. 1-13. (rus)
4. Airumyan E. L., Belyi G. I. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitelstvo* [Industrial and civil engineering]. 2010. No. 5. Pp. 41-44. (rus)
5. Shatov D. S. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 3(21). Pp. 32-35. (rus)
6. Yurchenko V. V. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 8(18). Pp. 38-46. (rus)
7. Bayan Anwer Ali, Sariffuddin Saad, Mohd Hanim Osman, Yusof Ahmad. Finite Element Analysis of Cold-formed Steel Connections. *International Journal of Engineering (IJE)*. 2011. Volume 5, No. 2. Pp. 55-61.
8. Schafer W., Pekoz T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses. *Journal of Constructional Steel Research*. 1998. Vol. 47. Pp. 193-210.

Lalin V.V., Rybakov V.A., Morozov S.A. The Finite Elements Research for Calculation of Thin-Walled Bar Systems



9. Vatin N. I., Rybakov V. A. *StroyPROFIL*. 2007. No. 2(56).Pp. 60-63. (rus)
10. Rybakov V. A. *Osnovy stroitel'noy mekhaniki legkikh stalnykh tonkostennykh konstruktsiy* [The fundamentals of light steel thin-walled structural mechanics]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2010. 207 p. (rus)
11. Vlasov V. Z. *Tonkostennyye uprugie sterzhny (prochnost, ustoichivost, kolebaniya)* [Thin-walled elastic beams (strength, stability, rippling)]. Moscow:1940. (rus)
12. Kuzmin N. A., Lukash P. A., Mileikovsky I. E. *Raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhey i obolochek* [The design of thin-walled bar and membranous constructions]. Gosstroyizdat, 1960. (rus)
13. Tusnin A. R. *Chislenny raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya* [Numerical calculation of structures made of open-section thin-walled bars]. Moscow: ASV, 2009. 143 p. (rus)
14. Sedlacek G., Bild J., Ungermann D. On the buckling of plates - Some recent developments in light weight structures. *4th international conference on aluminium weldments*. Tokyo: 1988.
15. Slivker V. I. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow: ASV, 2005. 736 p. (rus)
16. Umanskiy A. A. *Stroitel'naya mekhanika samoleta* [The aircraft Structural Mechanics]. Moscow: Oborongiz, 1961. 569 p. (rus)
17. Dzhanelidze G. Yu., Panovko Ya. G. *Statika uprugikh tonkostennykh sterzhney* [Statics of elastic thin-walled]. Moscow: 1948. 208 p. (rus)
18. Perelmuter A. V., Slivker V. I. *Ustoichivost ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennyye problemy. T.1: Obshchiye teoremy. Ustoichivost otdelnykh elementov mekhanicheskikh sistem* [The stability of constructions and related problems. Vol1: The general theorems. Stability of separate elements of mechanical systems]. Moscow: SKAD SOFT, 2010. (rus)
19. Elsgolts L. E. *Differentsialnyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969. (rus)
20. Rybakov V. A, Lalin V. V. *XL Nedelya nauki SPbGPU: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Ch.1*[XL Science Week SPbGPU: Proceedings of the International Scientific Conference. Part 1]. Saint-Petersburg: Izd-vo Politekhnikheskogo un-ta, 2011. Pp. 212-214 (rus)
21. Rybakov V. A. *Materialy Pyatogo Vserossiyskogo foruma studentov, aspirantov i molodykh uchenykh* [Proceedings of the Fifth All-Russian forum of students and young scientists]. Saint-Petersburg : Izd-vo Politekhnikheskogo un-ta, 2011. Pp. 30-32. (rus)
22. Morozov S. A., Rybakov V. A. *XL Nedelya nauki SPbGPU: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Ch.1*[XL Science Week SPbGPU: Proceedings of an international scientific conference. Part 1]. Saint-Petersburg : Izd-vo Politekhnikheskogo un-ta, 2011. Pp. 210-212. (rus)
23. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow: 1986. 607 p. (rus)
24. Oden J. *Konechnyye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite elements in nonlinear continuum mechanics]. Moscow : Mir, 1976. (rus)
25. Oden J. T., Reddy J. N. Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1973. Vol. 6, №1. Pp. 55-61.
26. Oden J. T. A general theory of finite elements. I. Topological consideration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1973. Vol. 6, №1. Pp. 201-205.

**Full text of this article in Russian: pp. 53-73**