

## О расчете упругих рам на устойчивость

*К.т.н., доцент Л. М. Каган-Розенцвейг\*,  
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет*

**Ключевые слова:** устойчивость рам; бифуркация; метод расчета

Решая без использования расчетных комплексов задачу об устойчивости рамы, находящейся под действием консервативных нагрузок, по традиции предполагают, что приложенная к раме нагрузка вызывает в ее стержнях только растяжение-сжатие [1, 2, 3]. Потерю устойчивости такой рамы называют потерей устойчивости первого рода и выявляют, анализируя возможность бифуркации равновесия.

Если в невозмущенном состоянии стержни испытывают изгиб, говорят о потере устойчивости второго рода, а неустойчивость фиксируют путем деформационного расчета.

Расчетные программные комплексы анализируют произвольно нагруженные системы численно, не различая потерю устойчивости первого и второго рода, судят о неустойчивости по вырождению матрицы расчетного метода.

Хотя задача устойчивости упругого тела, нагруженного произвольными консервативными силами, была сформулирована как задача о бифуркации еще в начале 60-х годов [4], в вопросе о рамах традиционное деление на два типа потери устойчивости, требующее применения разных методов к анализу, сохраняется [5, 6].

Приводимый ниже пример иллюстрирует постановку и решение задачи об устойчивости произвольно нагруженной рамы как задачи о бифуркации ее равновесия. Курсы строительной механики, например, [1–3, 5–7], не содержат примеров расчета на устойчивость подобных рам. Складывается неправильное представление о том, что при нагрузке, вызывающей в элементах рамы изгиб, обязателен трудоемкий деформационный расчет.

Рассматривается упругая плоская рама со стержнями постоянного сечения одинаковой изгибной жесткости  $EI$ , нагруженная силой  $P$  (рис. 1). На рисунке приведены размеры рамы, номера стержней (в прямоугольниках), номера узлов и местные системы координат. Вычисляется критическое значение силы  $P$ . Используются следующие допущения: перемещения малы и вызваны изгибом стержней, продольные силы в стержнях отвечают расчету по недеформированному состоянию.

Решаются две разные задачи устойчивости. Первая задача анализирует раму, нагруженную мертвой нагрузкой. Потеря устойчивости в этой задаче понимается в бифуркационном смысле. Вторая задача анализирует раму со следящей нагрузкой, потеря устойчивости понимается в динамическом смысле.

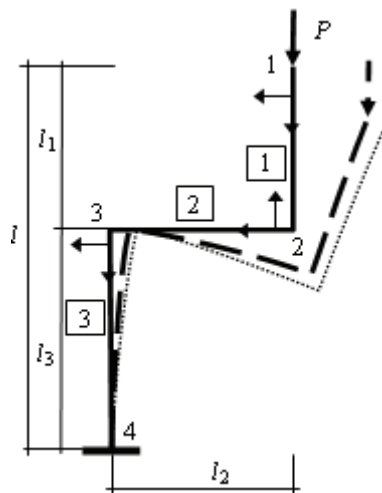


Рисунок 1. Рама с мертвой нагрузкой

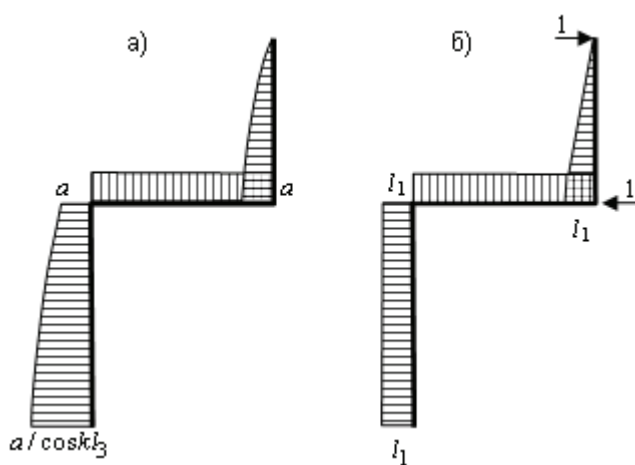


Рисунок 2. Эпюры изгибающих моментов

### Мертвая нагрузка

Равновесие рамы изображено на рис. 1 пунктиром. Выясняются условия, когда при постоянстве нагрузки возможна смежная форма равновесия, показанная точками.

Продольные силы  $N_i$  постоянны вдоль каждого из стержней рамы, так что для каждого стержня дифференциальное уравнение изгиба

$$(EIw'')'' + N_i w'' = q$$

может быть записано через изгибающий момент  $M$  в сечении стержня [8]:

$$M'' + k_i^2 M = -q, \quad k_i = \sqrt{N_i / EI}. \quad (1)$$

Здесь  $q$  – интенсивность поперечной нагрузки, отсутствует в анализируемой задаче. Положительной считается сжимающая сила  $N$ . Для анализируемой рамы  $N_1 = N_3 = P$ ,  $N_2 = 0$ ,  $k_1 = k_3 = k$ ,  $k_2 = 0$ .

Пусть

$$M = M_p + \Delta M, \quad (2)$$

а  $M_p$  – вычисленный с учетом продольно-поперечного изгиба момент вследствие воздействия нагрузки. Дополнительный момент  $\Delta M$  возникает при потере устойчивости в отсутствие дополнительных внешних сил и удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta M'' + k_i^2 \Delta M = 0 \quad (3)$$

со следующими однородными граничными условиями. В узле 1

$$\Delta M = 0. \quad (4)$$

Поскольку внешняя сила  $P$  является мертвой, в узле 4 отсутствует поперечная сила, то есть

$$\Delta Q = (\Delta M)' = 0. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta M &= A_i \sin k_i x + B_i \cos k_i x, & \Delta Q &= k_i (A_i \cos k_i x - B_i \sin k_i x), & N_i &\neq 0, \\ \Delta M &= A_i + B_i x, & \Delta Q &= B_i, & N_i &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для стержней рамы решение (6) с учетом граничных условий (4), (5) и условий сопряжения дает (верхний индекс указывает номер стержня)

$$\Delta M^{(1)} = \frac{a}{\sin kl_1} \sin kx, \quad \Delta M^{(2)} = a, \quad \Delta M^{(3)} = a(\cos kx + \operatorname{tg} kl_3 \sin kx).$$

Здесь  $a$  – неизвестный пока момент в узле 2. К постоянству момента  $\Delta M^{(2)}$  приводит допущение о независимости от деформаций продольных сил в стержнях. Связь постоянных  $A, B$  для третьего стержня дает граничное условие (5):  $A_3 = \operatorname{tg} kl_3 B_3$ .

Эпюра изгибающего момента  $\Delta M$  показана на рис. 2а, где учтено, что  $\operatorname{tg} kl_3 \sin kl_3 + \cos kl_3 = 1 / \cos kl_3$ .

Изгибающий момент  $a$  в узле вызван разностью  $w$  горизонтальных перемещений узлов 1 и 2 рамы:

$$a = Pw.$$

Величина  $w$  вычисляется с помощью формулы Максвелла-Мора, которая справедлива и для геометрически нелинейных задач:

$$w = \int \frac{\Delta M M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int \Delta M M_1 dx = \frac{a}{EI} \int \bar{M} M_1 dx.$$

Учтено постоянство сечений стержней в анализируемой задаче.  $\bar{M}$  – момент  $\Delta M$  при  $a = 1$  (рис. 2а), момент  $M_1$  отвечает недеформированной схеме, его эпюра приведена на рис. 2б.

Бифуркационный критерий потери устойчивости означает, что в момент потери устойчивости дифференциальное уравнение изгиба (1) с соответствующими граничными условиями имеет неединственное решение, то есть дополнительный изгибающий момент  $a \neq 0$ . Каган-Розенцвейг Л.М. О расчете упругих рам на устойчивость

Результат – следующее условие потери устойчивости:

$$1 - k^2 \int \Delta \bar{M} M_1 ds = 0.$$

Вычисление интеграла Мора, например, перемножением эпюр дает уравнение для критического параметра  $k$ :

$$1 - \frac{\sin kl_1 - kl_1 \cos kl_1}{\sin kl_1} - kl_1 \operatorname{tg} kl_3 - k^2 l_1 l_2 = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) обладает следующей особенностью: входящие в него величины отвечают недеформированному состоянию рамы. Эта особенность есть следствие отсутствия слежения у нагрузки и допущения о постоянстве продольных сил в стержнях.

На рис. 3 показана зависимость безразмерного критического параметра  $\bar{k} = kl$  от относительной длины стержня  $2 l_2 / l$ . Принято  $l_1 = l_3$ . Вычисления средствами программного комплекса SCAD дают такие же значения критического параметра.

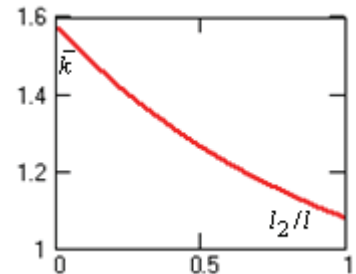


Рисунок 3. Зависимость  $\bar{k}$  от  $l_2 / l$

Заметим, что столь же просто анализируется пространственная форма потери устойчивости, сопровождающаяся кручением стержня 2.

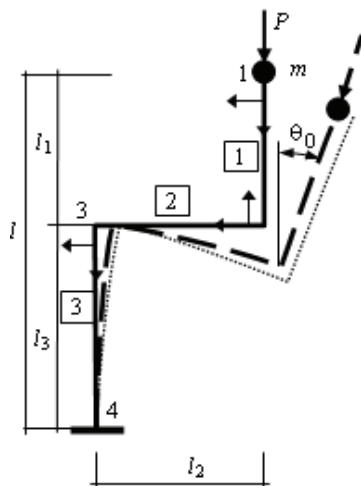


Рисунок 4. Рама со следящей нагрузкой

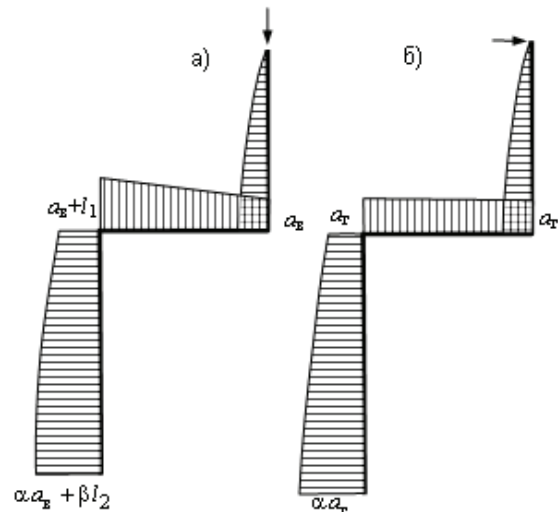


Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов

### Следящая нагрузка

Рама с сосредоточенной в узле 1 массой нагружена следящей силой (рис. 4). Анализируются малые колебания рамы вблизи показанного пунктиром состояния равновесия. В этом состоянии изгибающие моменты в стержнях, найденные с помощью решения (6) и соответствующих граничных условий, таковы:

$$M_p^{(1)} = 0, M_p^{(2)} = Px, M_p^{(3)} = Pl_2[\cos kx - 0.5kl_2 \sin kx].$$

Согласно формуле Максвелла-Мора, угол наклона стержня 1

$$\theta_0 = Pl_2[0.5l_2 \cos kl_3 + (\sin kl_3) / k]. \tag{8}$$

Уравнения малых колебаний имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} m \ddot{w}_1 + \delta_{12} m \ddot{w}_2 + w_1 = 0, \\ \delta_{21} m \ddot{w}_1 + \delta_{22} m \ddot{w}_2 + w_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь  $w_1, w_2$  – соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие перемещения точки 1, а коэффициенты  $\delta_{ij}$  вычисляются по формуле Максвелла-Мора:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_j dx,$$

в которой моменты  $\bar{M}_i$ ,  $M_j$  от единичных сил найдены соответственно с учетом и без учета деформации системы.

Характеристические показатели  $\lambda$  являются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 + \delta_{11}m\lambda^2 & \delta_{12}m\lambda^2 \\ \delta_{21}m\lambda^2 & 1 + \delta_{22}m\lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Условие динамической неустойчивости:

$$\operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (11)$$

Выражения для  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  имеют вид (6), причем параметры  $k$  в этих уравнениях вычисляется по недеформированной схеме. Эпюры моментов  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  приведены на рис. 5, где  $\alpha = \cos kl_3 + (\operatorname{ctg} kl_1 - kl_2) \sin kl_3$ ,  $\beta = \cos kl_3 - 0.5kl_2 \sin kl_3$ . Построены эпюры следующим образом.

Момент в верхнем сечении стержня 1 отсутствует, так что в этом стержне момент и поперечная сила имеют вид

$$\bar{M}^{(1)} = a \frac{\sin kx}{\sin kl_1}, \quad \bar{Q}^{(1)} = \bar{M}^{(1)'} = ka \frac{\cos kx}{\sin kl_1},$$

где  $a$  – значение момента в нижнем сечении.

Для стержня 2 ( $k = 0$ ) имеем:

$$\bar{M}^{(2)} = a + sx, \quad \bar{Q}^{(2)} = s,$$

где  $s$  – продольная сила в стержне 1 вследствие силы  $r = 1$  ( $s = 1$  или  $s = 0$  для вертикальной и горизонтальной сил  $r$  соответственно). Продольная сила в стержне 2 (вследствие малости колебаний учитывается только при построении эпюр) такова:

$$\bar{N}^{(2)} = -\bar{Q}^{(1)}(l_1).$$

Для стержня 3 имеем:

$$\bar{M}^{(3)} = (a + l_2s) \cos kx + B \sin kx, \quad \bar{Q}^{(3)} = k[-(a + l_2s) \sin kx + B \cos kx].$$

Равновесие узла 3 определяет постоянную  $B$ :

$$\bar{Q}^{(3)}(0) = kB = \bar{Q}^{(1)}(l_1) - P\Delta\theta_2,$$

где  $\Delta\theta_2$  – взаимный угол поворота торцевых сечений стержня 2.

Равновесие стержня 1 определяет неизвестный пока момент  $a$ :

$$\bar{M}_1(l_1) = a = rc - Pl_1\Delta\theta = rc - Pl_1 \int_0^{l_1} a / \sin kl_1 \sin(kx) \cdot l dx.$$

Здесь  $c = \theta_0 l_1$  или  $c = l_1$  для вертикальной и горизонтальной сил  $r$ . В результате

$$a_B = \frac{\theta_0 l_1 \sin kl_1}{\sin kl_1 + k(1 - \cos kl_1)}, \quad a_r = \frac{l_1 \sin kl_1}{\sin kl_1 + k(1 - \cos kl_1)}.$$

Зависимость критического параметра  $\bar{k} = kl$  от отношения  $l_2/l$  дана на рис. 6 (принято  $l_1 = l_3$ ). Она построена путем вычисления корней уравнения (10) и выяснения уровня нагрузки, при котором для одного из корней выполняется условие (11). При всех значениях параметров (кроме  $l_2 = 0$ ) потеря устойчивости имеет вид флаттера, то есть в момент потери устойчивости  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ . Зависимость  $\bar{k}$  от  $l_2/l$  является непрерывной.

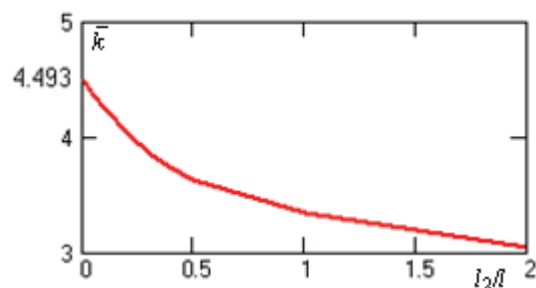


Рисунок 6. Зависимость  $\bar{k}$  от  $l_2/l$

Вопрос о непрерывности этой зависимости возник в связи с результатом работ [9–12], где показано, что в неконсервативных задачах устойчивости увеличение числа степеней свободы системы может изменять критические силы скачком.

### Заклучение

Выше предложен способ вычисления критических сил в рамах.

Для рамы, испытывающей действие произвольных консервативных сил, используется бифуркационная постановка задачи устойчивости.

К консервативным рамам бифуркационная постановка задачи применялась ранее [13, 14], однако в учебной литературе не отражена [1–3, 5–7, 15]. Новый способ реализации такой постановки задачи имеет как теоретическое, так и прикладное значение [16–18].

Устойчивость равновесия рамы, нагруженной неконсервативными следящими силами, анализируется динамически. Новым является прием вычисления коэффициентов уравнения малых колебаний.

Примененный способ вычисления критических сил очевидным образом распространяется на случай деформационного расчета рамы.

### Литература

1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 3. М. : Изд-во Машиностроение, 1968. 567 с.
2. Киселев В. А. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М. : Стройиздат, 1980. 616 с.
3. Смирнов А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М. : Стройиздат, 1984. 413 с.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. : Физматгиз, 1961. 339 с.
5. Саргсян А. Е., Демченко А. Т., Дворянчиков Н. В., Джинчвелашвили Г. А. Строительная механика. М. : Высшая школа, 2000. 416 с.
6. Бабанов В. В. Строительная механика. М. : Издательский центр Академия, 2011. 288 с.
7. Коробко В. И., Коробко А. В. Строительная механика. Динамика и устойчивость стержневых систем. М. : АСВ, 2008. 400 с.
8. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М. : Гостехиздат, 1955. 475 с.
9. Каган-Розенцвейг Л. М. Влияние малых изменений массы системы на результат динамического анализа устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2007. №11. С. 45–46.
10. Каган-Розенцвейг Л. М. О влиянии малой распределенной массы на устойчивость неконсервативного упругого стержня // Промышленное и гражданское строительство. 2011. №8. С. 51–52.
11. Каган-Розенцвейг Л. М. Изменение критической силы за счет возмущения массы неконсервативной упругой системы // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 3. С. 63–66.
12. Каган-Розенцвейг Л. М. Неконсервативный стержень, динамически устойчивый при любом уровне нагрузки // Вестник гражданских инженеров. 2011. № 2. С. 65–67.
13. Bazant Z. P., Cedolin L. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories. Dover: 2003. 1035 p.
14. Yoo C. H., Lee S. C. Stability of structures. Principles and applications. Elsevier: 2011. 523 p.
15. Salem A. H., El Dib F. F., El Aghoury M., Hanna M. T. Elastic stability of planar steel frames with unsymmetrical beam loading // Journal of structural engineering. 2004. Vol. 130, № 11. Pp. 1852–1859.
16. Special issue of Journal of Engineering Mechanics: Advances in stability of framed structures. 2005. Vol. 131. № 6.
17. Simitses G. J., Hodges D. H. Fundamentals of Structural Stability. Elsevier: 2006. 389 p.
18. Simitses G. J., Kounadis A. N. Buckling of imperfect rigid-jointed frames // ASCE journal of the engineering mechanics division. 1976. Vol. 104, № 3. Pp. 569–586.

\* Лев Марленович Каган-Розенцвейг, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)575-05-50; эл. почта: Kagan\_R@mail.ru

## About stability analysis of elastic frames

**L.M. Kagan-Rosenzweig**

*Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russia*  
+7(812)575-05-50; e-mail: Kagan\_R@mail.ru

### Key words

stability of frames; bifurcation; method of analysis

### Abstract

This article illustrates a simple method of stability analysis for elastic frames loaded with dead and follow forces. In its undisturbed state, frame elements might undergo not compression only but bending and torsion as well. It is shown that for simple frames there is no necessity of program complexes using.

For conservative systems the problem is formulated as a problem of equilibrium bifurcation. For non-conservative systems, dynamical approach is applied. The suggested method is used for calculation of coefficients in equations of motion.

### References

1. *Prochnost, ustojchivost, kolebaniya. Spravochnik* [Strength, stability, vibrations. Handbook]. Vol. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 567 p. (rus)
2. Kiselev V. A. *Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost sooruzhenij* [Structural Mechanics. Dynamics and stability of structures]. Moscow: Strojizdat, 1980. 616 p. (rus)
3. Smirnov A. F. *Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost sooruzhenij* [Structural Mechanics. Dynamics and stability of structures]. Moscow: Strojizdat, 1984. 413 p. (rus)
4. Bolotin V. V. *Nekonservativnie zadachi teorii uprugoj ustojchivosti* [Nonconservative problems of the elastic stability theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 339 p. (rus)
5. Sargsyn A. E., Demchenko A. T., Dvoryanchikov N. V., Dzhinchvelashvili G. A. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural Mechanics]. Moscow: Visshaya Shkola, 2000. 416 p. (rus)
6. Babanov V. V. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural Mechanics]. Moscow: Izdatelskij zentr Akademiya, 2011. 288 p. (rus)
7. Korobko V. I., Korobko A. V. *Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost sterzhnevih system* [Structural Mechanics. Dynamics and stability of the beam systems]. Moscow: Izdatelstvo ACV, 2008. 400p. (rus)
8. Rzhaniczin A. P. *Ustojchivost ravnovesiya uprugih system* [Stability of elastic systems equilibrium]. Moscow: Gostehizdat, 1955. 475 p. (rus)
9. Kagan-Rosenzweig L. M. *Promishlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo* [Industrial and civil engineering]. 2007. No. 11. Pp. 45–46. (rus)
10. Kagan-Rosenzweig L. M. *Promishlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo* [Industrial and civil engineering]. 2011. No. 8. Pp. 51–52. (rus)
11. Kagan-Rosenzweig L. M. *Vestnik grazhdanskich inzhenerov* [Bulletin of civil engineers]. 2010. No. 3. Pp. 63–66. (rus)
12. Kagan-Rosenzweig L. M. *Vestnik grazhdanskich inzhenerov* [Bulletin of civil engineers]. 2011. No. 2. Pp. 65–67. (rus)
13. Bazant Z. P., Cedolin L. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories*. Dover: 2003. 1035 p.
14. Yoo C. H., Lee S. C. *Stability of structures. Principles and applications*. Elsevier: 2011. p. 523.
15. Salem A. H., El Dib F. F., El Aghoury M., Hanna M. T. Elastic stability of planar steel frames with unsymmetrical beam loading. *Journal of structural engineering, ASCE*. 2004. Vol. 130, No. 11. Pp. 1852–1859.
16. Advances in stability of framed structures. Special issue. *Journal of Engineering Mechanics*. 2005. Vol. 131. No. 6.
17. Simites G. J., Hodges D. H. *Fundamentals of Structural Stability*. Elsevier: 2006. 389 p.
18. Simites G. J., Kounadis A. N. Buckling of imperfect rigid-jointed frames. *ASCE journal of the engineering mechanics division*. 1976. Vol. 104, No. 3. Pp. 569–586.

**Full text of this article in Russian: pp. 74-78**