Скорость свободного движения плохообтекаемых тел в жидкости

Д.т.н., профессор М.А. Михалев*,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: физическое моделирование; гидравлическая крупность; числа подобия; критерии подобия; критериальное уравнение

Явление осаждения (или всплывания) различных тел в жидкости (или газе) широко используется в технических устройствах (отстойники, камеры флотации и аэрации, гидро- и пневмотранспорт и т.п.). Скорость осаждения или всплывания тел в жидкости или газе, называемая гидравлической крупностью, представляется важной характеристикой явления. Однако существующие трудности математического моделирования позволяют получить решение задачи осаждения в жидкой или газообразной среде плохообтекаемых тел только при очень малых числах Рейнольдса (ползущее, или стоксово течение).

Что же касается методов физического моделирования явления, то оно в основном базируется на результатах моделирования обтекания закрепленных тел набегающем внешним потоком, согласно известному постулату относительности движения. Но, несмотря на кажущуюся аналогию движущегося и обтекаемого с той же скоростью закрепленного тела, с позиций методов физического моделирования – это два различных явления: в первом скорость движения заранее не известна, во втором – она изначально задана [1,2]. Сведения о свободном движении тел в жидкости, содержащиеся в литературных источниках, посвященных физическому моделированию явлений, в основном базируются на результатах изучения воздействия внешнего потока, набегающего на закрепленное тело [3 – 8]. Как правило, приводятся графики зависимости коэффициента сопротивления (числа Эйлера) от числа Рейнольдса. Но в задаче о гидравлической крупности ни число Рейнольдса, ни коэффициент сопротивления не являются критериями подобия, так как содержат скорость движения тела, которая до проведения опытов не известна. Иными словами, для свободно движущегося тела упомянутая зависимость представлена не в критериальной форме, поэтому воспользоваться ею можно только методом последовательных приближений.

При изучении сложных явлений, так или иначе связанных с гидравлической крупностью частиц, возникает необходимость правильного учета влияния на эту скорость (или на коэффициент сопротивления) дополнительных факторов [9 – 11]. Например, если тело, кроме сил тяжести и архимедовой, испытывает воздействие еще какой-то силы [9], то это приведет к изменению характера обтекания тела жидкостью, величины коэффициента сопротивления, в конечном итоге – скорости движения тела. Турбулентность внешнего потока и относительное содержание в нем частиц (несвободное движение тел в жидкости) могут оказать существенное влияние на величину гидравлической крупности [10]. Убедительные сведения на этот счет содержатся в [12]. Любые исследования на физических моделях (или основанные на методах физического моделирования явлений) должны заканчиваться обработкой экспериментальных данных обязательно в критериальной форме [11]. Ниже на примере гидравлической крупности будет показано, каким образом эти требования можно реализовать на практике.

Рассмотрим задачу о гидравлической крупности подробнее, основываясь на методах физического моделирования гидравлических явлений [1].

В основу положим принцип относительности движения, как это принято в механике: процесс обтекания тела одинаков, если закрепленное тело обтекается потоком с той же скоростью, с которой движется тело самостоятельно. Собственно, на этом принципе основывается физическое моделирование моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах. Будем учитывать пока только процессы во внешней среде, возникшие вследствие перемещения в ней тела (движение самого тела обязательно учтем ниже).

Отметим, что при стационарном равномерном движении тела в ньютоновской жидкости (несжимаемой или сжимаемой, но вдали от области, где сжимаемость среды начинает оказывать сопротивление движению – при малых числах Маха) явление характеризуется тремя числами подобия: Рейнольдса, Фруда и Эйлера. Среди них нет ни одного критерия, так как во все числа в качестве характерной входит заранее неизвестная скорость осаждения (или всплывания) ω_0:

$$\mathrm{Re}=\frac{\omega_0 d}{\nu}\,;\ \mathrm{Fr}_\rho=\frac{\omega_0^2\,\rho}{g\,d\,(\rho_1-\rho)}\,;\ \mathrm{Eu}=\frac{\Delta p}{\rho\,\omega_0^2}\,.$$

Здесь d – характерный линейный размер тела, в качестве которого чаще всего принимается объем шара, равный объему тела; ν и ρ – вязкость и плотность жидкости; ρ_1 – плотность вещества, из которого состоит плохо обтекаемое тело; Δp – перепад давления вдоль контура тела, возникающий вследствие его обтекания внешним потоком жидкости; g – ускорение силы тяжести. Число подобия, обозначенное символом Fr_ρ, называют «плотностным числом Фруда», поскольку в него в качестве активной силы входит разность между силой тяжести и архимедовой силой. Эта разность определяет поведение тела в жидкости: если $\rho_1>\rho$, то тело тонет в жидкости, а если $\rho_1<\rho$, то оно всплывает.

Необходимо остановиться на величине перепада давления, в которую входят две составляющие. Первая, называемая сопротивлением формы тела, возникает вследствие особенности распределения давления по контуру тела: если тело имеет симметричную форму относительно продольной оси своего движения, то это разность между давлением в лобовой и кормовой областях тела. Вторая определяется силой трения, которую испытывает жидкость со стороны контура тела при его обтекании (отсюда и ее название – сопротивление трения). Этим объясняются большие трудности при определении перепада давления. На практике они преодолеваются путем замены перепада давления отношением силы сопротивления к площади приложения ее на контуре тела. Если тело закреплено, то при проведении опытов сила сопротивления легко определяется. Для свободно падающего тела силу сопротивления F_w можно вычислить, если задать ее формулу:

$$F_w=C_w\rho\frac{\omega_0^2}{2}S;\quad \frac{F_w}{S}=\frac{C_w}{2}\rho\,\omega_0^2\ , \tag{1}$$

где C_w – коэффициент сопротивления; S – площадь приложения силы сопротивления. Запишем число Эйлера и примем $\Delta p=F_w/S$ в соответствии со второй формулой в (1), получим:

$$\mathrm{Eu}=\frac{\Delta p}{\rho\,\omega_0^2}=\frac{C_w}{2}\ . \tag{2}$$

Таким образом, если задать силу сопротивления формулой (1), то число Эйлера с точностью до постоянной станет равным коэффициенту сопротивления, входящему в виде сомножителя в эту формулу.

Воспользуемся далее условием равномерного движения тела в жидкости. Оно заранее известно, ради него не нужно ставить эксперимент, достаточно приравнять силу тяжести F_g (с учетом архимедовой силы), приложенную к телу, силе сопротивления:

$$F_g=F_w;\quad Vg(\rho_1-\rho)=\frac{C_w}{2}\rho\,\omega_0^2\,S\ , \tag{3}$$

где V – объем тела. Примем отношение V/S равным d, а постоянную, в общем случае зависящую от формы тела, введем в коэффициент сопротивления. После преобразований из (3) найдем:

$$\frac{gd(\rho_1-\rho)}{\omega_0^2\,\rho}=\frac{C_w}{2};\quad \frac{1}{\mathrm{Fr}_\rho}=\frac{C_w}{2}=\mathrm{Eu}\ . \tag{4}$$

Таким образом, из условия равномерного движения тела в жидкости получается, что число Эйлера,равное половине коэффициента сопротивления, обратно пропорционально плотностному числу Фруда. Следует отметить, что величину коэффициента сопротивления после определения гидравлической крупности в результате проведения экспериментов находят из левого уравнения, содержащегося в (4). Получается, что явление определяется не тремя, а только двумя числами подобия. Имея в виду дальнейшие преобразования, оставим для анализа числа подобия Рейнольдса и плотностное число Фруда. Используя метод комбинаций чисел подобия [1], найдем следующий критерий подобия:

$$\frac{\mathrm{Re}^2}{\mathrm{Fr}_\rho}=\frac{gd^3(\rho_1-\rho)}{\nu^2\rho}=\mathrm{Ar}\ , \tag{5}$$

который называется числом (в данном случае – критерием) Архимеда. В связи с тем, что критерий заменяет только одно число подобия, критериальное уравнение можно представить в двух видах:

$$\mathrm{Re}=f(\mathrm{Ar});\quad \mathrm{Fr}_\rho=\varphi(\mathrm{Ar})\ . \tag{6}$$

Приведем формулы, соответствующие первому и второму критериальному уравнению в (6), полученные в результате осаждения частиц кварца в воде. В области стоксова течения, которому соответствуют следующие условия: $\mathrm{Re}<1;\quad \mathrm{Ar}<16;\quad \mathrm{Fr}_\rho<0{,}0625;\quad d<0{,}01 см$, имеем:

$$\mathrm{Re}=\frac{\mathrm{Ar}}{18};\quad \mathrm{Fr}_\rho=\frac{\mathrm{Ar}}{18^2}\ . \tag{7}$$

В области квадратичного сопротивления, существование которой определяют условия: $\mathrm{Re}>100;\quad \mathrm{Ar}>1{,}6\cdot10^4;\quad \mathrm{Fr}_\rho>0{,}625;\quad d>0{,}1 см$, получено:

$$\mathrm{Re}=1{,}2\mathrm{Ar}^{0{,}5};\quad \mathrm{Fr}_\rho=1{,}2^2\ . \tag{8}$$

В области, переходной от стоксова течения до квадратичного сопротивления, найдены следующие зависимости:

$$\mathrm{Re}=\frac{\mathrm{Ar}}{18+0{,}61\mathrm{Ar}^{0{,}5}};\quad \mathrm{Fr}_\rho=\frac{\mathrm{Ar}}{(18+0{,}61\mathrm{Ar}^{0{,}5})^2}\ . \tag{9}$$

Помимо непосредственного использования рассмотренных зависимостей для определения величины гидравлической крупности, отметим еще один метод, с помощью которого на практике решается обратная задача. Он заключается в определении размеров мелких частиц в области стоксова движения после измерении в эксперименте их гидравлической крупности. Далее расчетом из соответствующей формулы определяется линейный размер частиц. Распространим этот метод и на другие области осаждения плохообтекаемых тел, имея в виду возможность его использования не только для определения размеров тел, но и для нахождения вязкости и плотности жидкости, а также плотности вещества, из которого состоят тела. Решим эту задачу, используя методы физического моделирования явлений.

Задача формулируется так, что в ней изначально не заданы ни скорость осаждения, ни линейный размер тела. Но после того как будет выполнен эксперимент, станет известна гидравлическая крупность. Однако среди чисел подобия критерии не появятся, поскольку характерный линейный размер тела не задан. Опуская часть приведенных выше обоснований вывода критериальных уравнений (о числе Эйлера, об использовании интегральных условий движения и т. п.), получим критерий подобия в рассматриваемой задаче. Он равен произведению числа Рейнольдса на число Фруда, так как в такую комбинацию чисел подобия не входит характерный линейный размер тела. Полученная комбинация называется числом (в данном случае это критерий) Келегана, обозначается Ke .

Заметим, что корень кубический из числа Келегана есть безразмерная гидравлическая крупность, которую обозначим символом $\overline{\omega}$. Имеем:

$$\mathrm{ReFr}_{\rho}=\frac{\omega_0^3\,\rho}{\nu g(\rho_1-\rho)}=\mathrm{Ke};\quad \sqrt[3]{\mathrm{Ke}}=\overline{\omega}=\omega_0\sqrt[3]{\frac{\rho}{\nu g(\rho_1-\rho)}}\ . \tag{10}$$

Отметим также, что корень кубический из числа Архимеда есть безразмерный линейный размер тела, который обозначим символом $\overline{d}$:

$$\mathrm{Ar}=\frac{gd^3(\rho_1-\rho)}{\nu^2\rho};\quad \sqrt[3]{\mathrm{Ar}}=\overline{d}=d\sqrt[3]{\frac{g(\rho_1-\rho)}{\nu^2\rho}}\ . \tag{11}$$

В связи с тем, что и число Рейнольдса, и число Фруда являются функциями числа Архимеда, то естественно, что их произведение (число Келегана) будет тоже функцией этого числа. Но, как об этом было сказано выше, число Келегана в поставленной задаче является критерием, поэтомукритериальное уравнение будет таким:

$$\mathrm{Ar}=F_1(\mathrm{Ke})\ . \tag{12}$$

В таком виде связь между числами подобия Архимеда и Келегана в переходной области выражается в виде уравнения четвертой степени, решение которого можно получить только методом последовательного приближения. В практических приложениях гораздо проще рассматривать обратную связь между этими числами. Иными словами, если связь между числами подобия вида (2) доказана, то справедлива и обратная зависимость:

$$\mathrm{Ke}=F(\mathrm{Ar});\quad \overline{\omega}=f(\overline{d})\ . \tag{13}$$

Обратимся к приведенным выше формулам с тем, чтобы получить в явном виде зависимости (13).

В области стоксова течения, в которой $\overline{d}<2{,}52$; $\overline{\omega}<0{,}35$, получим, используя формулы (7):

$$\mathrm{Ke}=\mathrm{ReFr}_{\rho}=\frac{\mathrm{Ar}^2}{18^3};\quad \overline{\omega}=\frac{\overline{d}^{\,2}}{18}\ . \tag{14}$$

В области квадратичного сопротивления, существующей при условиях $\overline{d}>25{,}2$; $\overline{\omega}>6$, найдем, обращаясь к формулам (8):

$$\mathrm{Ke}=1{,}2^3\,\mathrm{Ar}^{0{,}5};\quad \overline{\omega}=1{,}2\,\overline{d}^{\,0{,}5}\ . \tag{15}$$

В области, переходной от стоксова течения до квадратичного сопротивления, получим, используя формулы (9):

$$\mathrm{Ke}=\frac{\mathrm{Ar}^2}{(18+0{,}61\mathrm{Ar}^{0{,}5})^3};\quad \overline{\omega}=\frac{\overline{d}^{\,2}}{18+0{,}61\overline{d}^{\,1{,}5}}\ . \tag{16}$$

В рамках сформулированной выше задачи приведенные формулы позволяют сравнительно легко по величине $\overline{\omega}$, найденной в результате проведения опыта, определить величину $\overline{d}$, а из нее расчетом – d . Как уже было отмечено ранее, исключение представляют расчеты по формулам (16), которые можно выполнить только методом последовательного приближения. Решение обратной задачи – поиск по величине $\overline{d}$ величины $\overline{\omega}$ – реализуется без преодоления каких-либо трудностей. Следует только отметить, что по величинам $\overline{\omega}$ и $\overline{d}$, предварительно найденным в результате выполненных опытов или расчетов, нужно установить область движения, границы которых указаны выше перед соответствующими формулами.

Предложенная здесь методика расчетов скорости осаждения может быть использована для нахождения других параметров, определяющих явление. Например, правые формулы в зависимостях (7) и (9) позволяют по результатам опыта, в котором была установлена величина скорости осаждения и рассчитано число Фруда, найти число Архимеда, а из него – коэффициент кинематической вязкости среды (в области квадратичного сопротивления явление не зависит от вязкости среды, где происходит движение тела). Из левых формул зависимостей (7), (8) и (9) аналогичным образом находится число Рейнольдса, по его величине – область движения и число Архимеда, а из последнего уравнения – либо плотность вещества, из которого состоит тело, либо плотность среды.

Выводы

В заключение следует обратить внимание на обобщающий характер предложенных зависимостей, учитывающих влияние на процесс осаждения (или всплывания) плохообтекаемых тел основных сил: вязкого трения, тяжести, Архимеда. Если явления относятся к одному классу, то совсем не важно, какие в них вязкость и плотность среды, а также плотность вещества, из которого состоит тело, лишь бы были одинаковы числа подобия, тогда такие явления будут описываться одними и теми же зависимостями. К таким явлениям можно отнести: осаждение тяжелых частиц в водной и воздушной средах, капель воды в воздухе, всплывание пузырьков воздуха в воде и т. п.

Литература

1. Михалев М. А. Физическое моделирование гидравлических явлений: Учебное пособие / СПбГПУ. СПб., 2008. 443 с.
2. Михалев М. А. Теория подобия и размерностей: Учебное пособие. СПб.: СПбГТУ, 2001. 68 с.
3. Леви И. И. Моделирование гидравлических явлений. Л.: Энергия. 1967. 235 с.
4. Зегжда А. П. Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей. Л.–М.: Госстроойиздат. 1938. 162 с.
5. Шарп Дж. Гидравлическое моделирование. М.: Мир. 1984. 280 с.
6. Graf W. H. Hydraulics of Sediment Transport. New York: McGraw-Hill Book Company, 1970. 513 p.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 904 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1969. 737 с.
9. Ватин Н. И., Гиргидов А. А., Стрелец К. И. Численное моделирование трехмерного поля скорости в циклоне // Инженерно-строительный журнал. 2011. №5. С. 5–9.
10. Маркелова Е. А. Технология применения активной примеси при строительстве и эксплуатации подводных трубопроводов // Инженерно-строительный журнал. 2011. №2. С. 55–62.
11. Ватин Н. И., Стрелец К. И, Китаин М. Б. Определение характеристик сварочных искр для расчета их удаления в циклоне // Инженерно-строительный журнал. 2011. №5. С. 25–30.
12. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.

** Михаил Андреевич Михалев, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812)535-46-10; эл. почта: mikhalev@cef.spbstu.ru

doi: 10.5862/MCE.28.9

Free flow velocity of high-drag particles in liquid

M.A. Mikhalev
Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia
+7(812)535-46-10; e-mail: mikhalev@cef.spbstu.ru

Key words

physical modeling; settling velocity; numbers of similarity; criteria of similarity; criteria equations

Abstract

This article discusses the phenomenon of free movement of buffle bodies in a fluid. The basis of hydraulic design of many technical devices (septic tanks, aeration and flotation chambers, hydro-and pneumatic transport, etc.) is the deposition rate (or floating) of the various bodies in the fluid.

The solution of objective is obtained by the methods of mathematical modeling only at very low Reynolds numbers. Physical modeling of the phenomena is based on the results of fixed bodies flowed by oncoming external flow study.

But from the standpoint of modern physical modeling methods the body, which moves freely, and the fixed body, streamlined at the same rate, represent two different phenomena: at the first variant speed is not known beforehand, at the second — it is originally given. Consequently, at the first variant there is no criterion between similarity numbers. The paper shows how the criteria are obtained from similarity numbers.

Decisions are based on the similarity theory.The numbers, similarity criteria and criterial equations are determined. Proposed dependences have generalizing properties, if the conditions belong to the same class. In case of equal numbers of similarity, such phenomena are described by the same dependencies. They include: deposition of heavy particles in the air and water environments, the water droplets in the air, floating bubbles in the water, etc.

References

1. Mikhalev M. A. *Fizicheskoye modelirovaniye gidravlicheskikh yavleniy: Uchebnoye posobiye* [Physical modeling of hydraulic phenomena: Textbook]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2008. 443 p. (rus)
2. Mikhalev M. A. *Teoriya podobiya i razmernostey: Uchebnoye posobiye* [The theory of similarity and dimensions: Textbook]. Saint-Petersburg: SPbGTU, 2001. 68 p. (rus)
3. Levi I. I. *Modelirovaniye gidravlicheskikh yavleniy* [Modelling of hydraulic phenomena]. Leningrad: Energiya. 1967. 235 p. (rus)
4. Zegzhda A. P. *Teoriya podobiya i metodika rascheta gidrotekhnicheskikh modeley* [Similarity theory and calculation method of hydraulic models]. Leningrad–Moscow: Gosstrooyizdat, 1938. 162 p. (rus)
5. Sharp Dzh. *Gidravlicheskoye modelirovaniye* [Hydraulic modelling]. Moscow: Mir, 1984. 280 p. (rus)
6. Graf W. H. *Hydraulics of Sediment Transport*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1970. 513 p.
7. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Liquid and gas mechanics]. Moscow: Nauka, 1973. 904 p. (rus)
8. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Theory of boundary layer]. Moscow: Nauka, 1969. 737 p. (rus)
9. Vatin N. I., Girgidov A. A., Strelets K. I. *Magazine of civil engineering*. 2011. No. 5. Pp. 5 – 9. (rus)
10. Markelova Ye. A. *Magazine of civil engineering*. 2011. No. 2. Pp. 55 – 62. (rus)
11. Vatin N. I., Strelets K. I, Kitain M. B. *Magazine of civil engineering*. 2011. No.5. Pp. 25 – 30. (rus)
12. Sou S. *Gidrodinamika mnogofaznykh system* [Hydrodynamics of multiphase systems]. Moscow: Mir. 1971. 536 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 56-60.