

## Об одной модели сыпучих сред. Волны в редуцированной среде Коссера

*Д.т.н., профессор В.В. Лалин;  
ассистент Е.В. Зданчук\**

*ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

**Ключевые слова:** редуцированная среда Коссера; дополнительная упругая постоянная; аналитическое решение; объемные волны; дисперсия; запрещенная зона

При описании колебательных свойств в деформируемых телах обычно предполагается, что размер колеблющихся частиц незначителен по сравнению со средним расстоянием между ними, поэтому для описания кинематики таких сред используется только вектор перемещений. Такова классическая модель сплошной среды, которая часто используется для моделирования волн в упругих телах [1].

Однако некоторые эффекты, наблюдаемые при исследовании сейсмических волн и задач взаимодействия сооружений с массивами гранулированных или трещиноватых скальных оснований, плохо описываются классическими моделями сплошной среды. К таким эффектам относятся, например, значительная дисперсия и (или) затухание волн [2,3]. Для описания таких свойств могут использоваться неклассические модели с микроструктурой или дополнительными степенями свободы. При этом в большинстве работ считается, что при учете независимых вращательных степеней свободы необходимо введение моментных напряжений. Такие модели сплошных сред хорошо известны, например, моментная теория упругости или среда Коссера, теория которой начала интенсивно развиваться около 50 лет назад [4-10].

Не так широко известно, что возможен и промежуточный вариант, когда вращательные степени свободы независимы от перемещений, а моментные напряжения отсутствуют. Такой класс моделей сплошных сред был назван на основании классификации, предложенной в [11], «безмоментными средами со свободным вращением». Впоследствии выяснилось, что применительно к трехмерным средам такая модель была предложена в [12] и получила затем название «редуцированная среда Коссера». Вывод основных уравнений и анализ некоторых задач для такой среды приведены в работах [13-16].

В работе [12] подобная среда предлагалась для моделирования поведения океанских отложений и осадочных пород. Мы предполагаем, что такую модель можно использовать для любых сыпучих сред.

Отличительная особенность редуцированной среды Коссера заключается в том, что тензор напряжений является несимметричным, причем в статических задачах этот тензор становится симметричным. Таким образом, в статике редуцированная среда Коссера неотличима от классической сплошной среды, в которой вращательные степени свободы не являются независимыми, так как выражаются через перемещения, а тензор напряжений является симметричным.

В настоящей работе исследуются волновые движения трехмерной, изотропной, упругой редуцированной среды Коссера, выводятся уравнения для потенциальных и вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота, строятся и анализируются дисперсионные уравнения для плоских волн.

В классической упругой, изотропной среде Коссера, уравнения движения в перемещениях имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\text{graddiv}u - (\mu + \alpha)\text{rotrot}u + 2\alpha\text{rot}\omega + X &= \rho\ddot{u}, \\ (\beta + 2\gamma)\text{graddiv}\omega - (\gamma + \varepsilon)\text{rotrot}\omega + 2\alpha\text{rot}u - 4\alpha\omega + Y &= J\ddot{\omega}. \end{aligned}$$

Для перехода к редуцированной среде Коссера необходимо положить:  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Также мы будем рассматривать случай отсутствия объемной нагрузки ( $X, Y = 0$ ). Приходим к следующим уравнениям движения редуцированной среды Коссера:

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}u - (\mu + \alpha)\text{rotrot}u + 2\alpha\text{rot}\varphi = \rho\ddot{u}, \quad (1)$$

$$2\alpha\text{rot}u - 4\alpha\varphi = J\ddot{\varphi}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  – вектор поворота (у Новацкого  $\omega=\varphi$ );

$u$  – вектор перемещений;

$\lambda, \mu$  – постоянные Ламе;

$\alpha$  – дополнительная упругая постоянная;

$\rho$  – объемная плотность;

$J$  – объемная плотность шарового тензора инерции.

Построим общее решение уравнений движения для задачи в плоскости  $x, z$  с помощью метода, изложенного в работе [7]. Будем искать решение в виде  $u(x, z, t) = U(z)e^{ikx}U(t)$ , т.е. рассматривать гармоническую волну, распространяющуюся в направлении  $x$  с амплитудой, зависящей от  $z$ . Сделаем преобразование Фурье по времени и получим  $\hat{u} = U(z)e^{ikx}U_0(\omega)$ , где  $U_0(\omega)$  – спектральная плотность волнового пакета. Аналогично,  $\hat{\varphi} = \varphi(z)e^{ikx}\varphi_0(\omega)$ .

Преобразование Фурье имеет свойство:  $\hat{u} = (i\omega)^2 \hat{u}$ ,  $\hat{\varphi} = (i\omega)^2 \hat{\varphi}$ . Используя это свойство, из (1), (2) получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $U_1(z), U_2(z), U_3(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)$ :

$$(\mu + \alpha) \frac{d^2}{dz^2} U_1(z) + (\rho\omega^2 - k^2(2\mu + \lambda)) U_1(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_3(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} \varphi_2(z) = 0, \quad (3)$$

$$(\mu + \alpha) \frac{d^2}{dz^2} U_2(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha)) U_2(z) - 2ik\alpha\varphi_3(z) + 2\alpha \frac{d}{dz} \varphi_1(z) = 0, \quad (4)$$

$$(2\mu + \lambda) \frac{d^2}{dz^2} U_3(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha)) U_3(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_1(z) + 2ik\alpha\varphi_2(z) = 0, \quad (5)$$

$$-2\alpha \frac{d}{dz} U_2(z) + (J\omega^2 - 4\alpha)\varphi_1(z) = 0, \quad (6)$$

$$2\alpha \frac{d}{dz} U_1(z) + (J\omega^2 - 4\alpha)\varphi_2(z) - 2ik\alpha U_3(z) = 0, \quad (7)$$

$$2ik\alpha U_2(z) + (J\omega^2 - 4\alpha)\varphi_3(z) = 0. \quad (8)$$

Выразим из уравнений (6), (7), (8)  $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)$  через  $U_1(z), U_2(z), U_3(z)$  и подставим в уравнения (3), (4), (5). Обозначим  $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ ,  $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ ,  $c_3^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{4\alpha}{J}$ . Тогда получим:

$$\left( \frac{c_3^2}{c_1^2} + \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_1^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} U_1(z) + \left( \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \right) U_1(z) + ik \left( \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1^2} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_1^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \frac{d}{dz} U_3(z) = 0, \quad (9)$$

$$\left( 1 + \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} U_2(z) + \left( \frac{\omega^2}{c_3^2} - k^2 \left( 1 + \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right) U_2(z) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} U_3(z) + \left( \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \left( \frac{c_3^2}{c_1^2} + \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_1^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right) U_3(z) + ik \left( \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1^2} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_1^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \frac{d}{dz} U_1(z) = 0 \quad (11)$$

Введем обозначение  $a = \frac{c_3^2}{c_1^2} + \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_1^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$  и сделаем замену переменных:

$$U_1(z) = ik\Phi(z) - \frac{d}{dz}\psi(z), \quad U_3(z) = \frac{d}{dz}\Phi(z) + ik\psi(z).$$

Из уравнений (9), (11) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2\right)\Phi(z) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + \left(\frac{\omega^2}{ac_1^2} - k^2\right)\psi(z) = 0. \quad (13)$$

Общее решение уравнений (12), (13) для величин  $\Phi(z)$  и  $\psi(z)$  имеет вид:

$$\Phi(z) = Ae^{v_1 z} + Be^{-v_1 z}, \quad \psi(z) = Ce^{v_2 z} + De^{-v_2 z},$$

где экспоненциальные показатели  $v_1, v_2$  определяются выражениями:

$$v_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}, \quad v_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{ac_1^2}}.$$

Теперь мы можем определить вид амплитудных функций  $U_1(z), U_2(z), U_3(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)$ :

$$U_1(z) = ikAe^{v_1 z} + ikBe^{-v_1 z} - Ce^{v_2 z} + De^{-v_2 z}, \quad (14)$$

$$U_2(z) = Ee^{v_2 z} + Fe^{-v_2 z}, \quad (15)$$

$$U_3(z) = Av_1 e^{v_1 z} - Bv_1 e^{-v_1 z} + ikCe^{v_2 z} + ikDe^{-v_2 z}, \quad (16)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{\omega_0^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{d}{dz} U_2(z), \quad (17)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{\omega_0^2 ik}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} U_3(z) - \frac{\omega_0^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{d}{dz} U_1(z), \quad (18)$$

$$\varphi_3(z) = -\frac{\omega_0^2 ik}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} U_2(z). \quad (19)$$

Константы A-F определяются для каждого типа волны из соответствующих граничных условий.

Рассмотрим в частном случае дисперсионные соотношения для объемных продольных и поперечных волн.

### 1. Объемная продольная волна (нет изменения амплитуды с глубиной)

$U_3(z) = 0$ ,  $U_1(z) = const$ . Из уравнения (9) при этих условиях получаем:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2},$$

что дает нам скорость продольной волны.

### 2. Поперечная волна с горизонтальной поляризацией

$U_2(z) = const$ . Из уравнения (10) получаем:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\frac{c_3^2 \omega^2 - c_2^2 \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}. \quad (20)$$

### 3. Поперечная волна с вертикальной поляризацией

$U_1(z) = 0$ ,  $U_3(z) = const$ . Из уравнения (11) получаем:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\frac{c_3^2 \omega^2 - c_2^2 \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}. \quad (21)$$

В случаях 2 и 3 получили одно и то же дисперсионное соотношение, анализ которого будет приведен ниже.

Вернемся к уравнениям (1) и (2) и произведем разделение неизвестных, для чего представим их в несколько иной форме. Векторы  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  могут быть разложены на скалярный и векторный потенциалы:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla a + \nabla \times \mathbf{b}, & \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\ \boldsymbol{\varphi} &= \nabla c + \nabla \times \mathbf{d}, & \nabla \cdot \mathbf{d} &= 0. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнения (1), (2), получим:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta \nabla a - (\mu + \alpha)\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} + 2\alpha \nabla \times \nabla \times \mathbf{d} = \rho(\nabla \ddot{a} + \nabla \times \ddot{\mathbf{b}}), \quad (22)$$

$$2\alpha(\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} - 2(\nabla c + \nabla \times \mathbf{d})) = J(\nabla \ddot{c} + \nabla \times \ddot{\mathbf{d}}). \quad (23)$$

Возьмем дивергенцию уравнения (22), получим уравнение только для «а»:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta a = \rho \ddot{a}.$$

Данное уравнение описывает продольную волну. Проследим характер распространения волны на примере монохроматической плоской волны, распространяющейся в направлении  $x$ . Для этого подставим в последнее уравнение:

$$a = A \exp(-i\omega t + ikx).$$

Получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\lambda + 2\mu)k^2 = \rho \omega^2.$$

Отсюда находим фазовую скорость волны:

$$c_1^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Она совпадает с фазовой скоростью продольной волны в классической теории упругости [1]. Отсюда следует, что если в среде измерять только скорость продольной волны, то невозможно отличить классическую среду от редуцированной среды Коссера.

Возьмем дивергенцию уравнения (23), получим уравнение только для «с»:

$$4\alpha c = -J \ddot{c}.$$

Полученное уравнение не является волновым, а представляет собой уравнение осциллятора с собственной частотой  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{J}}$ . Наличие такой частоты микровращения является отличительной особенностью редуцированной среды Коссера.

Для того чтобы получить отдельное уравнение для «b», воспользуемся следующим преобразованием уравнений (22), (23):

$$(-\partial_i^2 [J(22)] - 4\alpha(22) - 2\alpha \text{rot}(23)).$$

В результате получим:

$$-J(\mu + \alpha)\Delta \partial_i^2 b + J\rho \partial_i^4 b - 4\alpha\mu \Delta b + 4\alpha\rho \partial_i^2 b = 0. \quad (24)$$

Для того чтобы получить отдельное уравнение для «d», воспользуемся следующим преобразованием уравнений (22), (23):

$$(-\partial_i^2 [\rho(23)] - (\mu + \alpha) \text{rot rot}(23) - 2\alpha \text{rot}(22)).$$

Получим:

$$-J(\mu + \alpha)\Delta\partial_i^2 b + J\rho\partial_i^4 b - 4\alpha\mu\Delta b + 4\alpha\rho\partial_i^2 b = 0. \quad (25)$$

Обратим внимание, что уравнение (24) совпадает с уравнением (25). Таким образом, вихревая часть вектора перемещения совпадает с вихревой частью вектора вращения.

Подставив в уравнение (24)  $b = B \exp(-i\omega t + ikx)$ , получим следующее дисперсионное уравнение, совпадающее с уравнениями (20), (21):

$$(c_2^2\omega_0^2 - c_3^2\omega^2)k^2 - \omega^2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0.$$

Отсюда:

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{c_2^2\omega_0^2 - c_3^2\omega^2}}. \quad (26)$$

Проанализировав данное выражение, можно найти следующее.

1. В интервале  $\omega_k \langle \omega \langle \omega_0$ , где  $\omega_k = \omega_0 \sqrt{\frac{c_2^2}{c_3^2}}$ , корней уравнения не существует, т.е. волны с такими частотами в редуцированной среде Коссера распространяться не могут.

2. При  $\omega_k \rangle \omega$  или  $\omega \rangle \omega_0$  существует один корень уравнения.

3. Для малых частот волновое число, с точностью до  $\omega^3$ , имеет значение  $k = \frac{\omega}{c_2}$ , с

точностью до  $\omega^5$ ,  $k = \frac{\omega}{c_2} + \frac{1}{2\omega_0^2 c_2} \left( \frac{c_3^2}{c_2^2} - 1 \right) \omega^3$ . Таким образом, фазовая скорость волны для малых

частот составляет приблизительно  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ , что совпадает со скоростью поперечных волн в классической теории упругости [1].

4. Для больших частот волновое число  $k = \frac{\omega}{c_3}$  с точностью до  $\frac{1}{\omega}$ ; с точностью до  $\frac{1}{\omega^3}$  -

$k = \frac{\omega}{c_3} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{c_2^2}{c_3^2} - 1 \right) \frac{1}{\omega}$ . Отсюда следует, что значение фазовой скорости для больших частот

приблизительно составляет  $c_3 = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}$ .

Построим дисперсионную кривую, соответствующую уравнению (26) (рис. 1).

Константы в приведенном примере таковы:  $\lambda = 2.8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 4 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 10^5 \text{ кг/м}^3$ ,  $J = 10^4 \text{ кг}^2/\text{м}$ .

Частотная зависимость  $k(\omega)$  построена на рисунках сплошной черной линией. При малых частотах дисперсионная ветвь приближается к прямой, соответствующей скорости  $c_2$  (штриховая линия). При больших частотах –  $c_3$  (пунктирная линия).

Особенностью редуцированной среды Коссера является то, что для объемных поперечных волн существует запрещенная зона

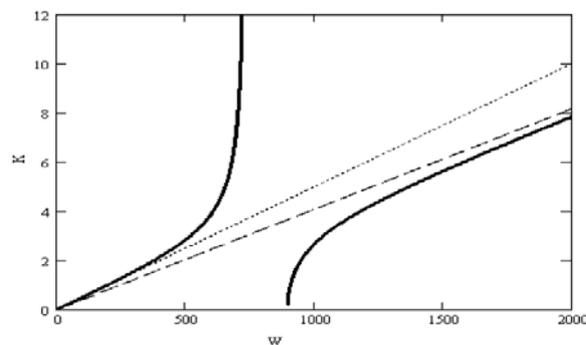


Рисунок 1. Дисперсионная кривая при

$$\alpha = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2.$$

Предельные прямые при малых и больших частотах

(рис. 2). Поперечные волны не могут распространяться в интервале  $\omega_k \langle \omega \rangle \omega_0$  (для нашего примера от  $730.3 c^{-1}$  до  $894.4 c^{-1}$ ).

Так как предполагается, что данную модель среды можно использовать для сыпучих сред, то наличие запрещенной зоны является большим преимуществом этой модели: сыпучий грунт будет гасить волны, распространяющиеся с частотой, попадающей в запрещенный интервал.

Сложность, которая не дает пока возможности осуществлять решение задач по этой модели, состоит в том, что нам неизвестны значения дополнительной упругой постоянной  $\alpha$  для реальных сред. Так при уменьшении  $\alpha$  на порядок ( $\alpha = 2 \cdot 10^8 H/m^2$ ) запрещенная зона сужается до интервала от  $276 c^{-1}$  до  $282.8 c^{-1}$  (рис. 3), а при увеличении на порядок ( $\alpha = 2 \cdot 10^{10} H/m^2$ ) – увеличивается до интервала от  $1155 c^{-1}$  до  $2828 c^{-1}$  (рис. 4). Также, при уменьшении  $\alpha$  до  $2 \cdot 10^8 H/m^2$ , скорости  $c_2$  и  $c_3$  становятся почти равными:  $c_2 = 200 m/c, c_3 = 204.9 m/c$ .

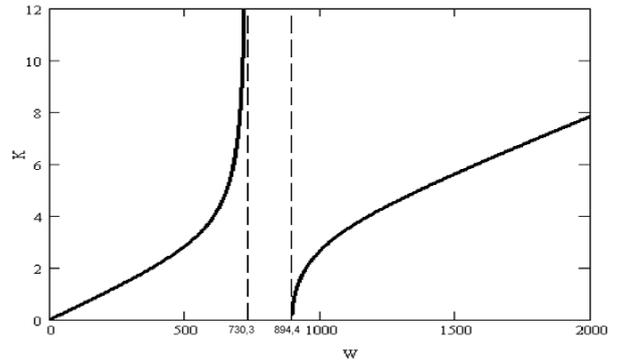


Рисунок 2. Дисперсионная кривая при

$$\alpha = 2 \cdot 10^9 H/m^2.$$

Запрещенная частотная зона

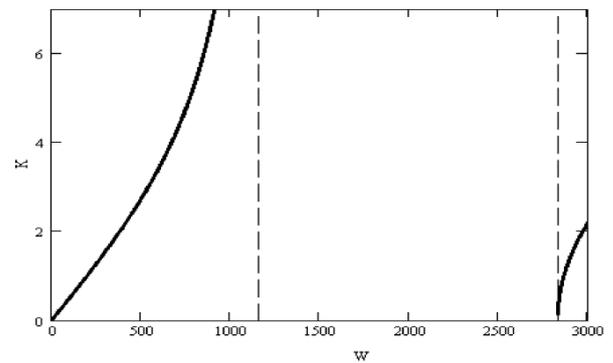


Рисунок 3. Дисперсионная кривая при

$$\alpha = 2 \cdot 10^8 H/m^2$$

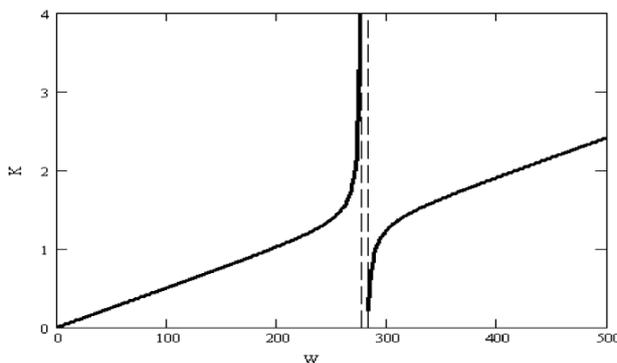


Рисунок 4. Дисперсионная кривая при

$$\alpha = 2 \cdot 10^{10} H/m^2$$

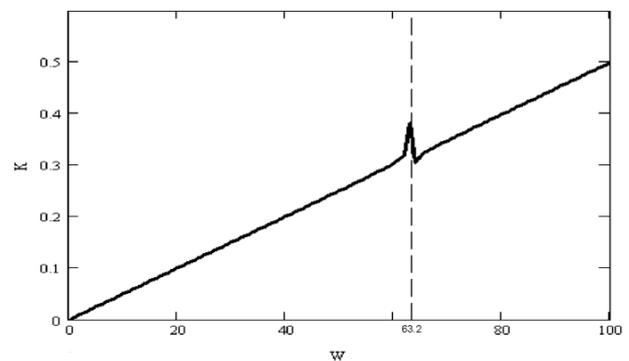


Рисунок 5. Дисперсионная кривая при

$$\alpha = 2 \cdot 10^7 H/m^2$$

При дальнейшем уменьшении  $\alpha$  до  $10^7 H/m^2$  практически исчезает дисперсия поперечных волн (рис. 5),  $c_2 = c_3 = 200 m/c$ , и наблюдается неоднородность, соответствующая резонансу при совпадении скорости поперечной волны с осцилляциями частиц с частотой  $\omega_0 = 63.2 c^{-1}$ .

## Выводы

В статье были рассмотрены некоторые вопросы распространения волн в упругой изотропной безмоментной среде со свободным вращением – редуцированной среде Коссера, как одной из моделей гранулированных сред. На основании проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Получены независимые уравнения для потенциальных и вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота.
2. Показано, что динамические свойства вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота одинаковы.
3. Исследовано влияние дополнительной упругой постоянной на свойства дисперсионной кривой для поперечных волн.

## Литература

1. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, N-НPC. 1973. 426 p.
2. Уайт Дж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 263 с.
3. Linton C. M., McIver P. Handbook of Mathematical Techniques for Wave. Structure Interactions. CRC Press LLC, 2001. 298 p.
4. Toupin R. A. Elastic materials with couple stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V.11. №5, Pp. 1189-1196.
5. Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // ФТТ. 1963. Т.5. №9. С. 2591-2597.
6. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. С. 401-408.
7. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple stress // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V.17. Pp. 85-112.
8. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 11. №5. Pp. 1183-1188.
9. Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15. Pp. 909-923.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Лалин В. В. О классификации сплошных сред. Новые модели в строительной механике // VII международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте». Тезисы. СПб, 2008. С. 123.
12. Lawrence M. Schwartz, David Linton Johnson and Shechao Feng. Vibrational Modes in Granular Materials // Physical Review Letters. 1984. Vol. 52, №10. Pp. 831–834.
13. Grekova E. F., Kulesh M. A., Herman G. C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bull. Seismol. Soc. Am., 2009. Vol. 99, №2B. Pp. 1423-1428.
14. Кулеш М. А., Грекова Е. Ф., Шардаков И. Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. 2009. Том 55, №2. С. 216-225.
15. Zdanchuk E., Lalin V. The theory of continuous medium with free rotation without coupled Stresses // Proceedings of the XXXVIII Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS. 2010. Pp. 771-775.
16. Lalin V., Zdanchuk E. On the Cauchy problem for nonlinear reduced Cosserat continuum // Proceedings of the XXXIX Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS. 2011. Pp. 549-552.
17. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
18. Кулеш М. А., Шардаков И. Н. Волновая динамика упругих сред: методический материал к спецкурсу / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2007. 60 с.

\* *Елизавета Викторовна Зданчук, Санкт-Петербург, Россия*  
*Тел. моб.: +7(905)251-81-13; эл. почта: zelizaveta@yandex.ru*

© Лалин В.В., Зданчук Е.В., 2012

doi: 10.5862/MCE.31.8

## A model of continuous granular medium. Waves in the reduced Cosserat continuum

V.V. Lalin;  
Ye.V. Zdanchuk,

Saint-Petersburg State Polytechnical University,  
+7(905)251-81-13; e-mail: zelizaveta@yandex.ru

### Key words

reduced Cosserat continuum; additional elastic constant; analytical solution; volume waves; dispersion; band gap

### Abstract

In the description of vibrational properties of deformable bodies, it is usually assumed that the size of the oscillating particles is negligible in comparison with the average distance between them, so to describe the kinematics of such media only the displacement vector is used. In the majority of work is considered that when the independent rotational degrees of freedom are taken into account it become necessary to introduce the couple stress. Such models of continuous media are well known, for example, moment theory of elasticity or Cosserat media.

A distinctive feature of the reduced Cosserat medium is that the stress tensor is asymmetric, and in static problems, this tensor becomes symmetric. Thus, in statics the reduced Cosserat media is indistinguishable from the the classical continuum in which the rotational degrees of freedom are not independent, as they are expressed in terms of displacement and the stress tensor is symmetric.

In this paper we investigate the wave motion of a three-dimensional, isotropic, elastic reduced Cosserat medium, the characteristic velocities of wave propagation are finding, we also construct and analyze the dispersion curve for the dynamic equations.

### References

1. Achenbach J. D. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, N-HPC. 1973. 426 p.
2. Uayt J. E. *Vozbuzhdeniye i rasprostraneniye seysmicheskikh voln* [Seismic wave excitation and propagation]. Moscow: Nedra, 1986. 263 p. (rus)
3. Linton C. M., McIver P. *Handbook of Mathematical Techniques for Wave. Structure Interactions*. CRC Press LLC, 2001. 298 p.
4. Toupin R. A. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1962. V.11. No. 5. Pp. 1189-1196.
5. Kuvshinskiy Ye. V., Aero E. L. *FTT*. 1963. Vol. 5. No. 9. Pp. 2591-2597. (rus)
6. Palmov V. A. *PMM*. 1964. Vol. 28. Pp. 401-408. (rus)
7. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple stress. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1964. V.17. Pp. 85-112.
8. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1965. Vol. 11. No. 5. Pp. 1183-1188.
9. Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.* 1966. Vol. 15. Pp. 909-923.
10. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (rus)
11. Lalin V. V. VII mezhdunarodnaya konferentsiya «Problemy prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte». Tezisy [VII international conference "Problems of material and building strength in transport". Theses]. Saint-Petersburg, 2008. Pp. 123. (rus)
12. Lawrence M. Schwartz, David Linton Johnson and Shechao Feng. Vibrational Modes in Granular Materials. *Physical Review Letters*. 1984. Vol. 52, No. 10. Pp. 831-834.
13. Grekova E. F., Kulesh M. A., Herman G. C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 2009. Vol. 99, No. 2B. Pp. 1423-1428.
14. Kulesh M. A., Grekova Ye. F., Shardakov I. N. *Akusticheskiy zhurnal*. 2009. Tom 55, No. 2. Pp. 216-225.

15. Zdanchuk E., Lalin V. The theory of continuous medium with free rotation without coupled stresses. *Proceedings of the XXXVIII Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS*. 2010. Pp. 771-775.
16. Lalin V., Zdanchuk E. On the Cauchy problem for nonlinear reduced Cosserat continuum. *Proceedings of the XXXIX Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS*. 2011. Pp. 549-552.
17. Erofeev V. I. *Volnovyye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy* [Wave processes in solid bodies with microstructure]. Moscow: Izd-vo MGU, 1999. 328 p.
18. Kulesh M. A., Shardakov I. N. *Volnovaya dinamika uprugikh sred: metodicheskiy material k spetskursu* [Wave dynamics of elastic media: student guide for special course]. Perm: Perm. gos. un-t, 2007. 60 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 65-71**