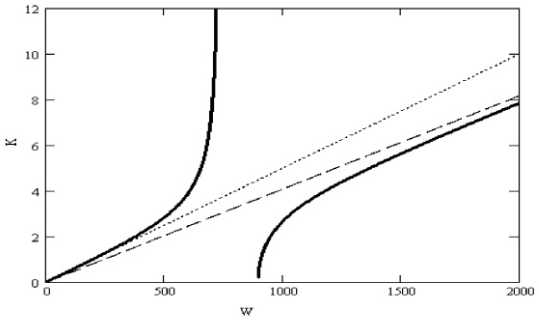
www.engstroy.spb.ru

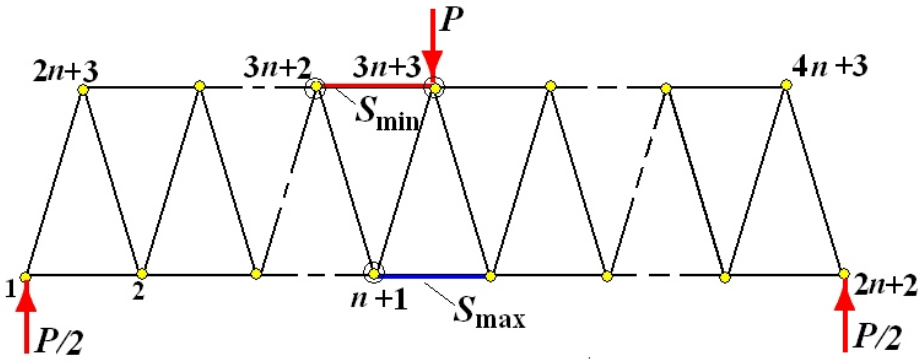
Инженерно-строительный журнал

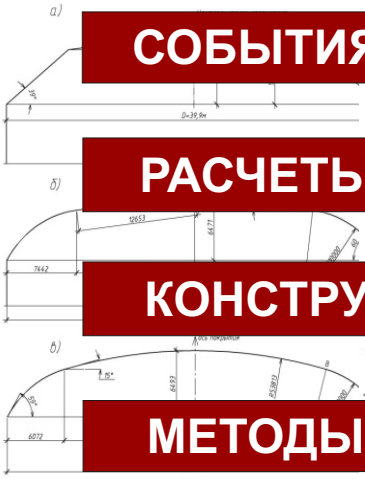
ISSN 2071-4726

научно-прикладное издание

№5(31) июль-август 2012







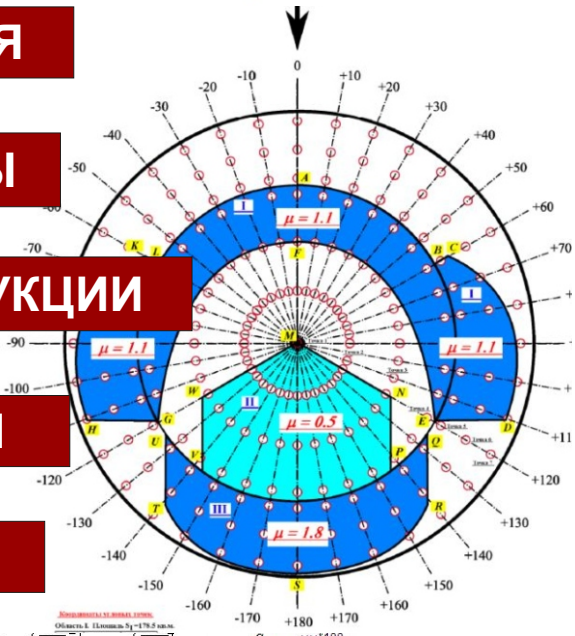
СОБЫТИЯ

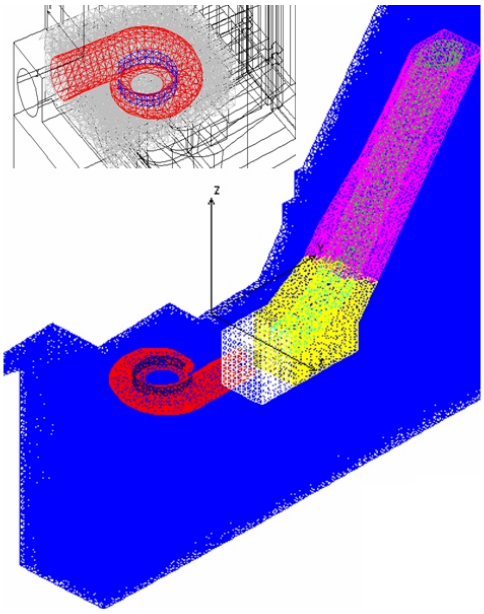
РАСЧЕТЫ

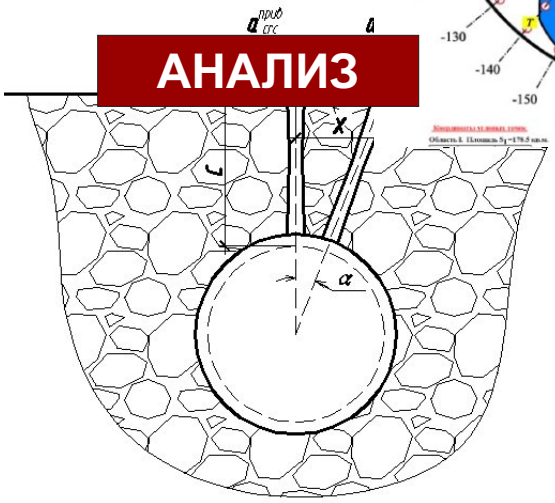
КОНСТРУКЦИИ

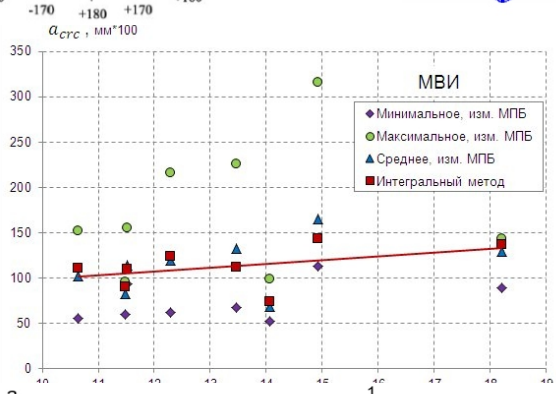
МЕТОДЫ

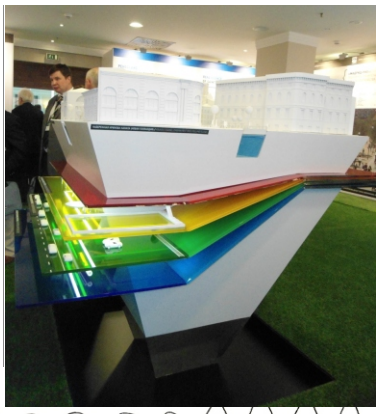
АНАЛИЗ

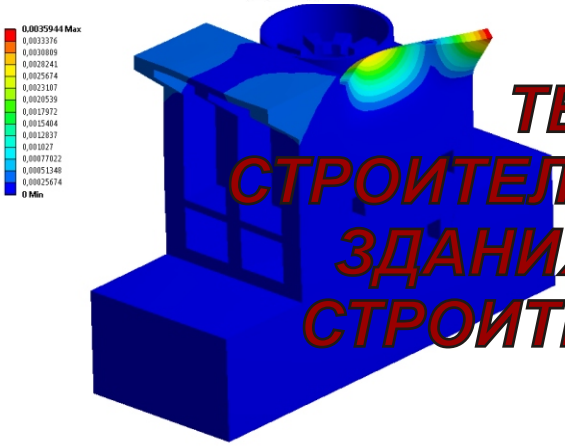


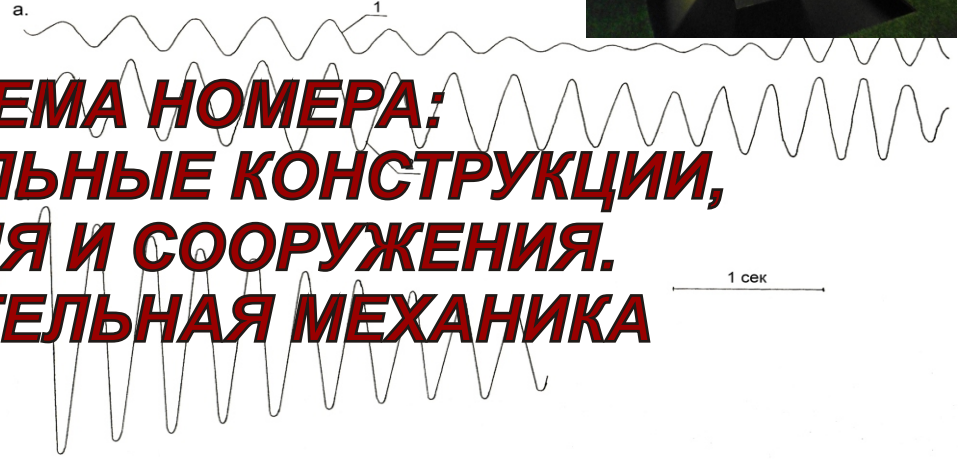












ТЕМА НОМЕРА: СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Инженерно-строительный факультет
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
тел/факс: 552-94-60, www.stroikursi.spb.ru.
stroikursi@mail.ru

Приглашает специалистов организаций, вступающих в СРО, на курсы повышения квалификации (72 часа)

Код	Наименование программы	Виды работ*
Курсы по строительству		
БС-01	«Безопасность и качество выполнения геодезических, подготовительных и земляных работ, устройства оснований и фундаментов»	**1,2,3,5**
БС-02	«Безопасность и качество возведения бетонных и железобетонных конструкций»	**6,7**
БС-03	«Безопасность и качество возведения металлических, каменных и деревянных конструкций»	**9,10,11**
БС-04	«Безопасность и качество выполнения фасадных работ, устройства кровель, защиты строительных конструкций, трубопроводов и оборудования»	**12,13,14**
БС-05	«Безопасность и качество устройства инженерных сетей и систем»	**15,16,17,18,19**
БС-06	«Безопасность и качество устройства электрических сетей и линий связи»	**20,21**
БС-08	«Безопасность и качество выполнения монтажных и пусконаладочных работ»	**23,24**
БС-11	«Безопасность и качество устройства подземных сооружений»	**27,28**
БС-12	«Безопасность и качество устройства мостов, эстакад и путепроводов»	**29**
БС-13	«Безопасность и качество выполнения гидротехнических, водолазных работ»	**30**
БС-14	«Безопасность и качество устройства промышленных печей и дымовых труб»	**31**
БС-15	«Осуществление строительного контроля»	**32**
БС-16	«Организация строительства, реконструкции и капитального ремонта. Выполнение функций заказчика-застройщика и генерального подрядчика»	**33**
Курсы по проектированию		
БП-01	«Разработка схемы планировочной организации земельного участка, архитектурных решений, мероприятий по обеспечению доступа маломобильных групп населения»	**1,2,11**
БП-02	«Разработка конструктивных и объемно-планировочных решений зданий и сооружений»	**3**
БП-03	«Проектирование внутренних сетей инженерно-технического обеспечения»	**4**
БП-04	«Проектирование наружных сетей инженерно-технического обеспечения»	**5**
БП-05	«Разработка технологических решений при проектировании зданий и сооружений»	**6**
БП-06	«Разработка специальных разделов проектной документации»	**7**
БП-07	«Разработка проектов организации строительства»	**8**
БП-08	«Проектные решения по охране окружающей среды»	**9**
БП-09	«Проектные решения по обеспечению пожарной безопасности»	**10**
БП-10	«Обследование строительных конструкций и грунтов основания зданий и сооружений»	**12**
БП-11	«Организация проектных работ. Выполнение функций генерального проектировщика»	**13**
Курсы по инженерным изысканиям		
И-01	«Инженерно-геодезические изыскания в строительстве»	**1**
И-02	«Инженерно-геологические изыскания в строительстве»	**2,5**
И-03	«Инженерно-гидрометеорологические изыскания в строительстве»	**3**
И-04	«Инженерно-экологические изыскания в строительстве»	**4**
ПР-09	«Обследование строительных конструкций и грунтов основания зданий и сооружений»	**6**
И-05	«Организация работ по инженерным изысканиям»	**7**

***(согласно приказам Минрегионразвития РФ N 624 от 30 декабря 2009 г.)**

По окончании курса слушателю выдается удостоверение о краткосрочном повышении квалификации государственного образца (72 ак. часа)

Для регистрации на курс необходимо выслать заявку на участие, и копию диплома об образовании по телефону/факсу: 8(812) 552-94-60, 535-79-92, , e-mail: stroikursi@mail.ru.

Http://www.engstroy.spb.ru – полнотекстовая версия журнала в сети Интернет. Бесплатный доступ, обновление с каждым новым выпуском.

Инженерно-строительный журнал
научно-прикладное издание

ISSN 2071-4726

Свидетельство о государственной регистрации: ПИ №ФС77-38070, выдано Роскомнадзором

Специализированный научный журнал. Выходит с 09.2008.

Включен в Перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ

Периодичность: 8 раз в год

Учредитель и издатель:

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Адрес редакции:

195251, СПб, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 227А

Главный редактор:

Вера Михайловна Якубсон

Научный редактор:

Николай Иванович Ватин

Литературный редактор:

Оксана Валерьевна Николенко

Редакционная коллегия:

д.т.н., проф., зав. каф. ФГБОУ ВПО СПбГПУ Н.В. Арефьев;
д.т.н., проф., ректор ГОУ СГАСУ М.И. Бальзанников;
к.т.н., проф., проректор по перспективным проектам ФГБОУ ВПО СПбГПУ А.И. Боровков;
д.т.н., проф., Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Э.К. Завадскас;
д.т.н., проф., зав. каф. ФГБОУ ВПО СПбГПУ В.В. Лалин;
к.т.н., директор РУП «Институт БелНИИС» М.Ф. Марковский;

и другие.

Полный список редсовета и редколлегии – на веб-сайте журнала.

Установочный тираж 1000 экз.

Подписано в печать 21.08.12
Формат 60x84/8, усл. печ. л. 9.
Заказ №
Отпечатано в типографии СПбГПУ.
СПб, ул. Политехническая, д. 29

Содержание

СОБЫТИЯ

Подземное строительство в городах 2

Конкурс «Архитектурная концепция здания с нулевым потреблением энергии» 4

Поздравление В.С. Ройфе 5

МЕТОДЫ

Степанов В.Б. Методика определения ширины раскрытия коррозионных трещин для оценки технического состояния железобетонных конструкций 6

КОНСТРУКЦИИ

Порываев И.А., Сафиуллин М.Н., Семенов А.А. Исследования ветровой и снеговой нагрузок на покрытия вертикальных цилиндрических резервуаров 12

Мелкумян М.Г. Исследование эффективности одно- и двухмассового динамического гасителя колебаний на модели каркасного здания при вибрационных испытаниях 23

Козинец Г.Л. Обоснование надежности гидроагрегатных блоков высоконапорных ГЭС 30

РАСЧЕТЫ

Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы 38

Жгутов В.М. Геометрически нелинейные математические модели термоползучести оболочек переменной толщины 43

АНАЛИЗ

Денисов Г.В. К вопросу о локализации колебаний в строительных конструкциях 60

Лалин В.В., Зданчук Е.В. Об одной модели сыпучих сред. Волны в редуцированной среде Коссера 65

© ФГБОУ ВПО СПбГПУ, 2012.

На обложке: авторские иллюстрации к статьям номера.

Права на статьи, опубликованные в журнале, принадлежат их авторам и редакции журнала. Перепечатка статей без письменного согласия редакции запрещена.

Контакты:

Тел. +7(812)535-52-47 E-mail: engstroy@inbox.ru Web: Http://www.engstroy.spb.ru

Подземное строительство в городах

С 27 по 29 июня в Санкт-Петербурге проходил международный форум «Комплексное освоение подземного пространства мегаполисов как одно из важнейших направлений государственного управления развитием территорий». В мероприятии приняли участие ведущие представители отрасли из Санкт-Петербурга, других городов России и зарубежья.

Открывая первый день форума, первый вице-президент НОСТРОЙ, генеральный директор ОАО «Группа ЛСР» Александр Иванович Вахмистров отметил актуальность его проведения именно в Санкт-Петербурге, где встречаются цели сохранения памятников архитектуры мирового значения и освоения подземного пространства. Вопреки установившемуся мнению об особой сложности подземного строительства в Петербурге, ни сложные грунты, ни историческая застройка в центре не являются непреодолимыми препятствиями. Настоящим препятствием, по мнению А.И. Вахмистрова, является отставание в области технического регулирования. Сейчас идет активная работа по восстановлению этого пробела. В том числе, НОСТРОЙ разрабатывает 5 стандартов по подземному строительству. На данный момент невозможно купить или арендовать отдельно подземный участок. Это связано, в том числе, с отсутствием 3D кадастра.

Кроме того, многие докладчики отмечали необходимость разработки комплексной программы освоения подземного пространства. По словам Николая Ивановича Кулагина, советника генерального директора ОАО НИПИИ «Ленметрогипротранс», такие программы уже есть в Москве и Екатеринбурге. Программа Санкт-Петербурга, по его мнению, должна включать следующие элементы:

- определение основных целей подземного строительства: что должно быть построено в городе;
- решение энергетических проблем;
- создание геологической карты подземного пространства города;
- развитие правовой основы для безопасности строительства и эксплуатации подземных объектов, введение собственности на них;
- определение приоритетов развития с учетом строительства метрополитена и транспортных тоннелей;
- экономическая поддержка: льготные условия для подземного строительства.

Экономическое обоснование подземного строительства обсуждалось во многих докладах. Ведь известно, что многие проекты освоения подземного пространства не воплощаются в жизнь из-за их высокой стоимости. Оливье Вион, исполнительный директор Международной тоннельной ассоциации, призывает учитывать при экономической оценке все аспекты. В первую очередь, подземное строительство высвобождает надземное пространство под другие цели, а земля сегодня стоит дорого. Далее, долговечность и энергоэффективность подземных сооружений намного выше. Они привносят меньше загрязнения, в том числе шумового. Для сейсмоопасных районов важна сейсмостойкость подземных сооружений. Зарубежные докладчики отмечали, что освоение подземного пространства – это не только строительство, но и использование энергии земли, подземных вод, грунт как строительный материал.

В основном доклады зарубежных гостей были посвящены опыту подземного строительства в странах Европы, Америки и Азии. Так, Эндрю Виттел посвятил свой доклад проекту реконструкции Бостона. Орель Парье рассказал о проекте Deep City в Швейцарии. Ганг Ю Ли, профессор Чханвонгского Национального Университета, в своем докладе о подземном строительстве в Сеуле описывал преимущества «землескреба» (earth scraper) по сравнению с небоскребом (skyscraper).

Подземное строительство в России пока развивается преимущественно в направлении метрополитена. Санкт-Петербург долгое время был лидером по применению передовых технологий в метростроительстве. В том числе, в нашем городе впервые были применены сборные конструкции тоннелей, двухэтажные станции, автоматическое управление движением поездов. Но, по словам Н.И. Кулагина, в последние 20 лет скорость строительства метро в Петербурге снизилась в 2 раза.

Сегодня лидером в этом направлении является, конечно же, Москва. Владимир Алексеевич Куликов, представитель департамента строительства Москвы, рассказал о перспективном плане строительства московского метрополитена. На данный момент он включает 12 линий и 185 станций, первозит 7-8 млн человек ежедневно. Тем не менее, метрополитен перегружен, требуется строительство новых станций в удаленных районах. Сейчас планируется выход линий в Московскую область, кроме того, повышение доступности метрополитена для маломобильных групп населения. К 2020 г. планируется построить 67 новых станций и 7 электродепо. В новом строительстве планируется использовать новые технологии и строительные материалы, позволяющие оптимизировать стоимость проектирования и строительства, а также обеспечить сохранение наземных объектов и высокого уровня художественного оформления станций.

Высокий уровень технологий и материалов, безусловно, важен в строительстве таких уникальных объектов, как подземные. Не менее важен и высокий уровень проектирования с учетом особенностей подземного пространства. Владимир Михайлович Улицкий, заведующий кафедрой оснований и фундаментов Петербургского государственного университета путей сообщения, рассказал о своем опыте работы с расчетными программами. Он отметил, что многие программные комплексы дают высокую сходимость с натурными данными. Важно, чтобы программа не была закрытой, т.е. давала возможность инженеру понять, как работает расчетный алгоритм.

Таким образом, один из ведущих геотехников Санкт-Петербурга подтвердил, что строить подземные сооружения в Петербурге можно и нужно, необходимы только правильные методы расчета, современные технологии и профессионализм строителей.

Доклад Александра Петровича Ледяева, первого проректора государственного университета путей сообщения, и Андрея Анатольевича Панферова, генерального директора ОАО «КБ высотных и подземных сооружений», был посвящен стратегическому планированию в области освоения подземного пространства. В процессе исследований докладчики выяснили, что такой стратегический проект был разработан еще в Ленинграде в 1979 г. В этот план вошли практически все элементы, необходимые в современном городе. Так, все новые районы должны были оснащаться встроенными парковками. Кроме того, были запланированы перехватывающие подземные парковки в 3 поясах, начиная с въезда в город. Было проведено геологическое исследование, результатом которого стало районирование по глубине заложения и стоимости стены в грунте. Была даже осуществлена экономическая оценка на основе цен в крупных городах Европы, получена сметная стоимость и расчетные сроки подземного строительства. Несмотря на проработанность плана, он так и не был реализован. Теперь городу необходим новый стратегический план, в том числе, с анализом экономической эффективности.

К сожалению, как отметил А.А. Панферов, многие зоны, запланированные под подземное строительство, уже заняты уплотнительной застройкой. А стихийное подземное строительство (планируемые сейчас подземные парковки в центре) может лишить город последних участков, пригодных для строительства подземных транспортных развязок и тоннелей.

В то же время, как отмечало большинство докладчиков, подземное транспортное строительство сегодня необходимо для гармоничного развития мегаполиса, возвращения города людям. «Город для людей, а не для машин» – вот основной лозунг развития современных городов.

В.М. Якубсон

Конкурс «Архитектурная концепция здания с нулевым потреблением энергии»

В апреле 2012 года на инженерно-строительном факультете Санкт-Петербургского государственного политехнического университета состоялся конкурс на разработку архитектурной концепции демонстрационной модели здания с нулевым потреблением энергии (конкурс «Арх концепт «0»).

В средствах массовой печати и научных публикациях периодически появляются статьи с информацией о том, что подобные здания во многих европейских странах уже не только проектируются, но строятся и эксплуатируются. В России таких зданий пока нет даже на уровне проектов. Есть несколько зданий с низким уровнем энергопотребления (не более 45 кВт·ч/(м^2·год)). Но в отличие от последних, здания с нулевым уровнем потребления тепловой энергии, как следует из их названия, не имеют затрат на отопление, так как потери тепловой энергии в них компенсируются поступлениями тепловой энергии от возобновляемых источников (например, солнечных коллекторов или теплонасосных установок), а также бытовыми и солнечными теплопоступлениями. Это означает, что при эксплуатации для их отопления не требуется использовать энергию невозобновляемых источников – природных ресурсов, таких как нефть или природный газ. К тому же при их эксплуатации отсутствуют выбросы углекислого газа CO_2 в атмосферу, ответственного, как считают многие исследователи, за ухудшение экологической обстановки на нашей планете.

Инициатором проведения конкурса на разработку архитектурной концепции здания выступила финская компания SPU Oy и ее российское представительство – ООО «СПУ Системс».

В финал конкурса попали 5 проектов, отобранных конкурсным жюри, в состав которого вошли представители как университета, так и организатора конкурса. В итоге были определены три победителя, получившие дипломы и финансовые премии от организатора. Вручение дипломов и денежных премий состоялось 20 апреля 2012 г. на стенде компании SPU Oy в рамках выставки Интерстройэкспо-2012.

Следующим этапом развития данного проекта будет создание (на основе разработанной архитектурной концепции) рабочего проекта здания с нулевым потреблением энергии на отопление. С этой целью из лучших студентов факультета будет создана рабочая группа, в состав которой войдут инженер-конструктор, инженеры по проектированию систем отопления, электроснабжения, вентиляции и кондиционирования. Для осуществления шеф-контроля принимаемых проектных решений и их соответствия нормативным требованиям планируется привлечь крупную проектную организацию. В настоящий момент по данному вопросу достигнута предварительная договоренность с известным российским конструкторским бюро.

После завершения этапа проектирования здание будет построено на территории Политехнического университета. Здание планируется оборудовать всеми современными энергосберегающими технологиями и оборудованием, соответствующими самым высоким мировым стандартам строительства зданий типа «Passive house». После постройки в здании планируется поместить лабораторию энергосберегающих инновационных технологий в строительстве Политехнического университета.

О.А. Орлов

Поздравление В.С. Ройфе

Коллектив Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН) поздравляет Владлена Семеновича Ройфе с 80-летием.

Владлен Семенович Ройфе, работая в ниисф раасн более 50 лет, прошел путь от инженера до высшей научной должности – главного научного сотрудника. Доктор технических наук, профессор, опубликовал более 170 печатных работ, в том числе 3 монографии, автор 52 изобретений, из которых 28 использованы в научных исследованиях и производстве новых приборов, один из наиболее крупных ученых в области строительной физики. Его работы хорошо известны специалистам разных областей науки и техники (теплофизики, измерительной техники, метрологии). Он участвовал в работе 27 научно-технических конференций, симпозиумов, семинаров, в том числе 6 международных, является активным членом Ученого и диссертационного советов института.

С 1960 по 1985 годы научно-практическая деятельность В.С. Ройфе была направлена на решение проблемных задач в области массового неразрушающего контроля качества строительной продукции. В этот период выполненные им обширные теоретические и экспериментальные исследования послужили основой для разработки новых физических методов и средств контроля, их метрологического обеспечения, стандартизации и промышленного производства новых измерительных приборов. В результате этих работ впервые в стране появились нормативные документы, регламентирующие применение в строительной отрасли новых физических методов и средств контроля влажности (ГОСТ 21718-76, ГОСТ 23422-79, ГОСТ 25611-83, ГОСТ 21718-84, ГОСТ 8.519-84), а министерство приборостроения СССР освоило промышленное производство первого отечественного влагомера строительных материалов и изделий типа ВСКМ-12, автором которого является В.С. Ройфе. Этот прибор широко использовался в организациях и на предприятиях стройиндустрии и послужил прототипом многих типов диэлькометрических влагомеров, изготавливаемых в настоящее время.

Из уникальных объектов, при строительстве, реконструкции или обследовании которых успешно применялись разработанные В.С. Ройфе методы и приборы контроля, следует отметить такие, как соборы Московского Кремля, храм Христа Спасителя, инженерный корпус Третьяковской галереи и другие.

С 1989 года В.С. Ройфе начал разработку нового направления в строительной теплофизике, заключающегося в разработке научных основ нетрадиционных методов и средств комплексного определения элементов зданий и сооружений. Это направление позволяет осуществлять оценку теплозащитных качеств без теплового воздействия и практически мгновенно.

За последние 5 лет в этом направлении В.С. Ройфе проведен комплекс теоретических и экспериментальных исследований, в которых подтверждена выдвинутая им ранее научная гипотеза о подобии тепло- и электрофизических свойств строительных материалов. Результаты проведенных за этот период исследований апробированы в публикациях, докладах на конференциях и семинарах, по ним получено 2 патента на изобретения. Практическая значимость этих работ заключается в том, что на их основе разработаны и введены в действие 2 национальных стандарта (ГОСТ Р 8.621-2006 и ГОСТ Р 54858-2011), а также разработан и выпускается прибор типа ИВТП-12, внесенный в Государственный реестр средств измерений Российской Федерации под № 29234-10, не имеющий мировых аналогов.

За плодотворную научно-практическую деятельность, достигнутые успехи в развитии народного хозяйства и внедрение изобретений В.С. Ройфе награжден медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения Владимира Ильича Ленина» (1970 г.), двумя золотыми (1983 и 1988 г.г.), двумя серебряными (1979 и 1985 г.г.) и бронзовой (1971 г.) медалями ВДНХ СССР, нагрудным знаком «Изобретатель СССР» (1985 г.), является Лауреатом премии имени академика РААСН Осипова Г.Л. (2010 г.)

Методика определения ширины раскрытия коррозионных трещин для оценки технического состояния железобетонных конструкций

Аспирант В.Б. Степанов*,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: коррозия; измерение трещин; ресурс конструкций

Исчерпание расчетного срока службы зданий и сооружений, построенных в период массового строительства второй половины прошлого века, приводит к необходимости контроля их остаточного ресурса. В этих случаях проводится оценка необходимости выполнения усиления или демонтажа, разрабатываются мероприятия по дальнейшей эксплуатации конструкции и сооружения в целом.

Определение технического состояния железобетонных конструкций является сложной и актуальной задачей. Это объясняется наличием неконтролируемых факторов и параметров, влияющих на совместную работу бетона и арматуры и их физико-механические характеристики. Большинство параметров оценивается по косвенным данным, так как изъятие фрагментов арматуры и бетона приводит к снижению несущей способности конструкции.

Анализ работ, посвященных развитию методик, инструментальной базы, надежности оценки коррозионного поражения железобетонных конструкций [1-11], позволил выделить три основных направления: вихретоковые измерения коррозии арматуры [6,9,10], ультразвуковая методика [5,7], контроль электрических параметров (потенциала и силы тока в паре бетон – арматура) [8,11]. Также проводится оценка изменения частот колебаний конструкции [3] вследствие коррозии, разрабатываются методики установки и мониторинга образцов-свидетелей, содержащих изотопную метку [1], сенсоров коррозии арматуры [4].

Следует отметить, что перечисленные способы инструментальной оценки коррозионного поражения конструкций трудоемки, а иногда невыполнимы. При большом объеме обследования очевидной характеристикой изменения технического состояния конструкций могут явиться внешние признаки. Такие признаки выявляются в виде дефектов при изменении структуры и сплошности бетона, при обнаружении значительных деформаций.

Коррозия арматуры приводит к изменению ее структуры и площади сечения. При этом производятся продукты коррозии (гидроксиды железа), нарушается сцепление арматуры с бетоном, появляются коррозионные (продольные) трещины. Появление первых видимых коррозионных трещин [12] наблюдается уже при потере площади сечения арматуры более 0,5%. Отслоения защитного слоя бетона свидетельствуют о значительных коррозионных повреждениях. Это создает предпосылки к совершенствованию методик измерения ширины раскрытия коррозионной трещины как наиболее доступного для инструментальной оценки показателя состояния железобетонных конструкций.

Показателен тот факт, что, несмотря на частое использование критерия ширины раскрытия трещины при описании технического состояния конструкции, а также в научных и исследовательских работах, анализ методики ее измерения не проводился. Возможно, это явилось следствием нормативного ограничения ширины раскрытия силовых трещин и использования ее максимального значения в качестве контролируемого параметра [13].

На кафедре СКиМ СПбГПУ был разработан и опробован новый подход к проведению измерений и обработке опытных данных. Новизна предлагаемой методики заключается в определении осредненного значения ширины раскрытия трещины a_{crc} по отношению площади суммарного лицевого раскрытия S_{crc} трещины к длине ее берегов L_{crc} :

$$a_{crc} = \frac{S_{crc}}{L_{crc}}.$$

Наиболее простым способом реализации предлагаемой методики может стать фотофиксация поврежденных участков с последующей оцифровкой и масштабированием изображения. Масштабирование размеров трещины производится при помощи рамки прямоугольного очертания установленной площади (рис. 1).

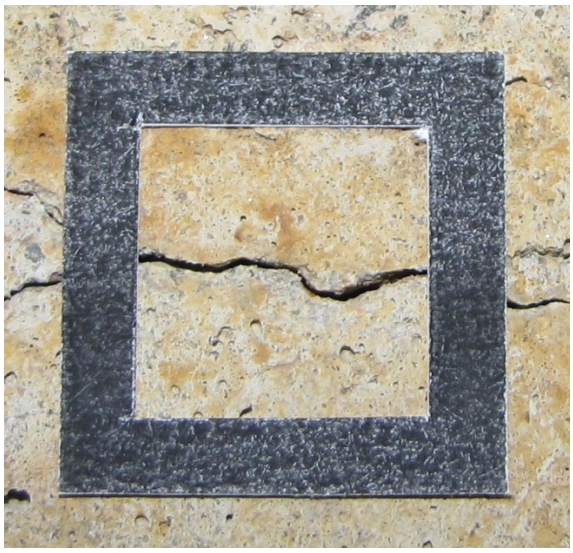


Рисунок 1. Измерение коррозионной трещины с использованием рамки для масштабирования

Рисунок 2. Контур трещины после обработки в графическом редакторе

Для улучшения качества аппаратной обработки изображения рекомендуется производить инъецирование (затирку) трещин составом, контрастного к общему фону цвета. Графические редакторы позволяют вычленить нужный спектр из общей палитры цветов.

Получение изображения может производиться при помощи сканирующих устройств. При этом не требуется фокусировка объектива и масштабирование рисунка, отсутствует оптическое искажение снимка, характерное для фотографии. Разрешающая способность сканирующих устройств находится в пределах 150…600 до 1000 spi. Разрешение 600 spi соответствует значению 25,4/600=0,042мм, что сопоставимо с ценой деления микроскопа МПБ-2 (0,02мм и 0,04мм на шкалах 50х и 25х соответственно).

Представленные средства измерений используются для оценки интегрального значения ширины раскрытия коррозионной трещины на участке длиной l_0. В пределах исследуемого участка может наблюдаться отклонение планового положения трещины от проекции центра тяжести арматуры. Это объясняется конгломератной структурой бетонного камня. Развитие трещин происходит по поверхности зерен крупного заполнителя, раскрываясь в виде линии криволинейного очертания (см. рис. 4).

Проведенные ранее исследования [14] показывают пропорциональную зависимость ширины раскрытия трещины от величины защитного слоя бетона. Поэтому на участке со значительной кривизной трещины действительное значение степени коррозии арматуры, как функции от ширины раскрытия трещины, может быть переоценено. Указанную погрешность предлагается компенсировать пересчетом с определением приведенной ширины раскрытия трещины a_{crc}^{red}. Коэффициент приведения определяется (см. рис. 3) по углу, образованному проекцией нормали и условной плоскостью проложения трещины к центральной оси арматуры:

$$a_{crc}^{red} = a_{crc} \cdot cos^2 \alpha ,$$

$$\alpha = arctg \frac{x}{c} ,$$

где c – величина защитного слоя бетона;
x – отклонение трещины от нормальной проекции центральной оси арматуры на поверхности бетонного камня.

Максимальное отклонение трещины (см. рис. 4):

$$x_{max} = \frac{\sqrt{l_{crc}^2 - l_0^2}}{2n} ,$$

где n=1…4 и более – показатель, характеризующий линейность трещины.

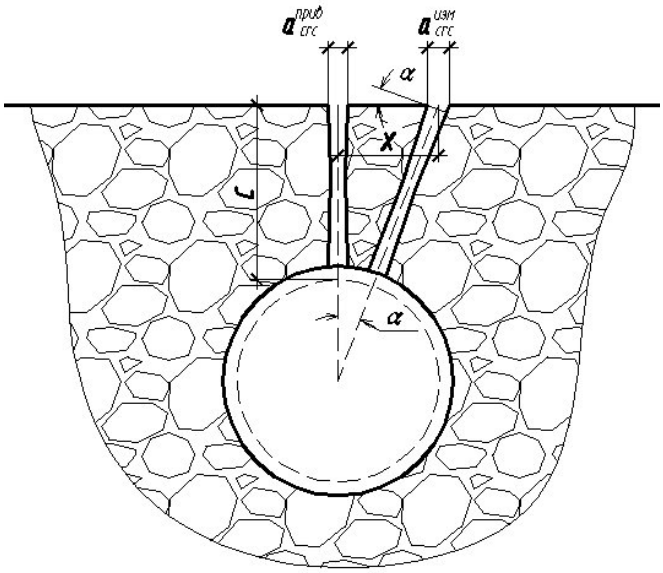


Рисунок 3. Графическое определение a_{crc}^{red}

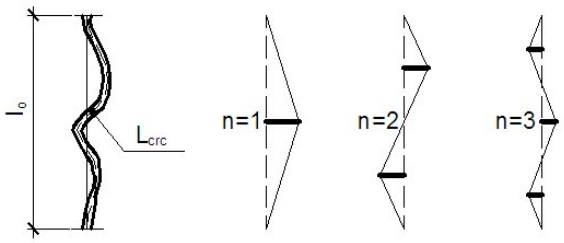


Рисунок 4. Определение показателя линейности коррозионной трещины

Тогда среднее значение отклонения трещины на рассматриваемом участке:

$$|x| = \frac{x_{max}}{2} = \frac{\sqrt{l_{crc}^2 - l_0^2}}{4n}.$$

Окончательно приведенное значение ширины раскрытия трещины:

$$a_{crc}^{red} = a_{crc} \cdot cos^2(arctg\frac{x}{c}) = a_{crc} \cdot cos^2(arctg\frac{\sqrt{l_{crc}^2 - l_0^2}}{4n \cdot c}),$$

где a_{crc} - измеренное значение ширины раскрытия трещины; l_{crc} – осредненное значение длины берегов трещины; l_0 – длина участка поверхности измеряемой трещины; n – показатель линейности трещины, численно равный количеству максимумов в соответствии с рис. 4; c – величина защитного слоя бетона.

При увеличении показателя n уменьшается эффект приведения ширины раскрытия трещины, который характеризуется отношением a_{crc}/a_{crc}^{red}. При $l_0 \le 50$ и n > 4 можно пренебречь ее нелинейностью, так как погрешность измерения a_{crc} не превышает 1%.

Эффективность введения новой характеристики коррозионного поражения арматуры – приведенной ширины раскрытия трещины – оценивалась по результатам проведенного эксперимента (табл. 1).

Для этого на восьми участках поверхности железобетонных образцов проводились замеры ширины раскрытия трещины стандартным методом (микроскопом МПБ-2 с ценой деления шкалы 0,02 мм) и интегральным методом (с помощью рамки и цифрового фотоаппарата). В первом случае измерения велись по нормали к локальному направлению трещины с шагом 1 см. Количество измерений принималось равным длине рассматриваемого участка – от 4 до 10 см. Среднее значение ширины раскрытия трещин на рассматриваемых участках составило от 0,7 до 1,4 мм.

Оценка фактического коррозионного поражения арматуры проводилась гравиметрическим методом. Иначе говоря, измерялась длина и масса фрагментов арматуры после удаления продуктов коррозии. Результаты, представленные в таблице 1, проиллюстрированы на рис. 5.

Таблица 1. Результаты измерения ширины раскрытия коррозионной трещины различными методиками (МВИ)

№ уч.	Интегральный метод		Микроскоп МПБ-2				Разность оценок МВИ		Степень корро-зионного поражения арматуры, %
	Ширина раскрытия трещины, изм., мм*100	Ширина раскрытия трещины, прив., мм*100	Число изме-рений в серии	Макси-мальное в серии, мм*100	Мини-мальное в серии, мм*100	Сред-нее мм*100	В абс. ед. мм*100	В проц. от (3)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	91	**90**	10	96	60	**83**	7	8,2%	**11,48**
2	144	**142**	7	316	114	**166**	-24	-16,8%	**14,92**
3	137	**128**	10	144	90	**130**	-2	-1,4%	**18,20**
4	111	**110**	10	156	94	**114**	-4	-3,6%	**11,52**
5	111	**110**	7	152	56	**102**	8	6,9%	**10,65**
6	125	**122**	4	216	62	**119**	3	2,4%	**12,29**
7	112	**111**	6	226	68	**133**	-22	-19,9%	**13,46**
8	74	**74**	5	100	52	**69**	5	6,7%	**14,07**

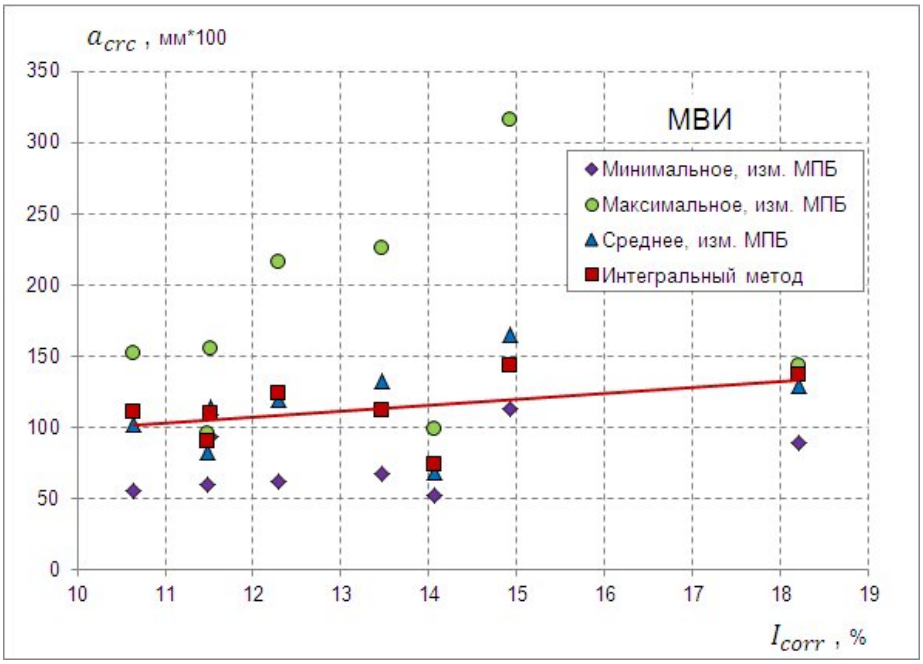


Рисунок 5. Сравнительный анализ методик выполнения измерений

Следует обратить внимание на тот факт, что при назначении шага измерений по стандартной методике, положение шкалы микроскопа может совпасть с локальными дефектами поверхности бетона (кавернами и выколами). Поэтому полученные значения максимальной ширины раскрытия трещины могут не отражать степени коррозионного поражения арматуры. Необходимость цензурирования значений наводит на мысль о применимости данного критерия. Попытка осуществлять выборочные измерения приводит к возникновению субъективных погрешностей.

Измерения интегральным методом позволяют получить более точное значение средней ширины раскрытия трещины по сравнению со стандартной методикой измерений. Это может быть одной из причин плохой корреляции степени коррозии арматуры и ширины раскрытия трещины в проведенных ранее исследованиях [15]. Другой объективной причиной следует считать изменение величины [16] дополнительного давления продуктов коррозии на окружающий слой бетона. При различной интенсивности коррозионных воздействий образуется слой продуктов коррозии различной толщины вследствие их частичной диссипации в поры бетона.

Оценка степени коррозионных повреждений может производиться по аналитической формуле [17]:

$$w_c = \frac{4\pi d_s}{(1-\upsilon_c)(a/b)^{\sqrt{\alpha}} + (1+\upsilon_c)(b/a)^{\sqrt{\alpha}}} - \frac{2\pi b f_t}{E_{ef}},$$

где w_c – ширина раскрытия трещины; d_s – толщина слоя продуктов коррозии; υ_c – коэффициент Пуассона для бетона; a и b – соответственно радиус арматуры и величина защитного слоя бетона от ее центра; α – коэффициент изменения жесткости бетона; f_t – прочность бетона на растяжение; E_{ef} – значение модуля деформации бетона.

Приведенная формула позволяет рассматривать показатель средней ширины раскрытия трещины как самостоятельный параметр коррозионных повреждений. Следует отметить, что прочность железобетонных конструкций, подверженных коррозии арматуры, снижается до 10-25%, жесткость – до 50% [12,14,18]. В работах отмечается, что изменение прочности и жесткости происходит главным образом из-за потери сцепления между арматурой и бетоном. Изменение последнего может быть выражено через толщину слоя продуктов коррозии, но не степени коррозионного поражения арматуры. Доступным фактором этой оценки является осредненная ширина раскрытия трещины.

На основании вышеизложенного сформулированы основные выводы по статье.

1. Разработана новая методика определения ширины раскрытия трещины. Она включает в себя получение изображений поврежденных участков (см. рис. 1) с последующей оцифровкой и масштабированием (см. рис. 2). Новизна предлагаемой методики заключается в подходе к определению осредненного значения ширины раскрытия трещины a_{crc} по отношению площади суммарного лицевого раскрытия S_{crc} трещины к длине ее берегов L_{crc}.

2. Интегральный метод оценки избавляет от субъективных погрешностей, связанных с расположением и ориентацией измерительного прибора. Осреднение ширины раскрытия трещины позволяет выполнять математическую обработку и корректировку результатов измерения, в том числе учесть методические погрешности, вызванные случайным характером ее изменения.

3. Для учета геометрической нелинейности раскрытия трещины вводится понятие ее приведенного значения. Этот показатель может более точно характеризовать техническое состояние конструкций, так как учитывает зависимость ширины раскрытия трещины от величины защитного слоя бетона. То же используется для переменной величины защитного слоя бетона по длине арматуры.

4. Контроль остаточного ресурса зданий и сооружений может производиться по внешним признакам. Осредненное значение ширины раскрытия трещины должно стать самостоятельным параметром оценки коррозионных повреждений конструкций для определения деструкции и остаточной прочности бетонной матрицы вследствие давления продуктов коррозии арматуры.

Литература

1. Пастухов Ю. В., Сидельникова О. П. Контроль коррозии при эксплуатации зданий и сооружений в особых условиях // Вестник ВолгГАСУ. Выпуск 7(26). Строительство и архитектура. Волгоград, 2007. С. 41-44.
2. Наумова Г. А., Гарибов Р. Б. Прочностной мониторинг потенциально опасных строительных объектов, выполненных из железобетона, с учетом реальных условий эксплуатации // Вестник ВолгГАСУ. Выпуск 8(27). Строительство и архитектура. Волгоград, 2007. С. 37-45.

3. Capozucca R., Nilde Cerri M. Identification of damage in reinforced concrete beams subjected to corrosion // ACI Structural Journal. Vol. 97. No. 6. November-December 2000. Pp. 902-909.
4. Marsh P., Frangopol D. Lifetime мultiobjective optimization of cost and spacing of corrosion rate sensors, embedded in a deteriorating reinforced concrete bridge deck // ASCE. June 2007. Pp 777-787.
5. Ing M. Detection of Reinforcement Corrosion by an Acoustic Technique. Doctoral thesis, submitted in partial fulfilment of the requirements for the award of EngD of Loughborough University. September 2003.
6. Nygaard P., Geiker M., Elsener B. Corrosion rate of steel in concrete: evaluation of confinement techniques for on-site corrosion rate measurements // Materials and Structures 42 (2009). Pp. 1059–1076.
7. Katwan M., Hodgkiess T., Arthur P. Study of electrochemical noise technique for the prediction of corrosion rate of steel in concrete // Materials and Structures. June 1996. Pp. 286–294.
8. Lambert P., Page C. Investigations of reinforcement corrosion 2. Electrochemical monitoring of steel in chloride-contaminated concrete // Materials and Structures. Vol. 24. Pp. 351–358.
9. Andrade C., Alonso C. Test methods for on-site corrosion rate measurement of steel reinforcement in concrete by means of the polarization resistance method // Materials and Structures. Vol. 37. November 2004. Pp. 623–643.
10. Andrade C., Martinez I. Calibration by gravimetric losses of electrochemical corrosion rate measurement using modulated confinement of the current // Materials and Structures. Vol. 38. November 2005. Pp. 833-841.
11. El-Gelany M. Short-term corrosion rate measurement of OPC and HPC reinforced concrete specimens by electrochemical techniques // Materials and Structures. Vol. 34. August-September 2001. Pp. 426–432.
12. Mangat P., Elgarf M. Flexural strength of concrete beams with corroding reinforcement // ACI Structural Journal. Vol. 96. No. 1. January-February 1999. Pp. 149-158.
13. Пособие по обследованию строительных конструкций зданий / АО «ЦНИИПРОМЗДАНИЙ». М., 2004. 208 с.
14. Степанов В. Б., Мельков Б. Н., Белов В. В. Экспериментальное исследование зависимостей: степень коррозии арматуры – сцепление арматуры с бетоном – прочность и жесткость железобетонных конструкций, подверженных коррозии арматуры // Сборник «Труды Псковского политехнического института». №14.2 (Строительство экономика). Псков: Издательство ППИ, 2010. С. 128-138.
15. Tammo K., Thelandersson S. Crack behavior near reinforcing bars in concrete structures // ACI Structural Journal. Vol. 106. No. 3. May-June 2009. Pp. 259-267.
16. Vu K., Stewart M., Mullard J. Corrosion-induced cracking: experimental data and predictive models // ACI Structural Journal. Vol. 102. No. 5. September-October 2005. Pp. 719-726.
17. Li C., Melchers R. Time-dependent reliability analysis of corrosion-induced concrete cracking // ACI Structural Journal. Vol. 102. No. 4. July-August 2005. Pp. 543-549.
18. Чаганов А. Б. Прочность и жесткость железобетонных ребристых плит с нарушением сцепления арматуры с бетоном. Автореферат на соискание ученой степени к.т.н. 2008. 158 с.

** Виталий Борисович Степанов, г. Псков, Россия*

Тел. моб.: +7(911)356-33-28; эл. почта: vital60rus@mail.ru

© Степанов В.Б., 2012

Исследования ветровой и снеговой нагрузок на покрытия вертикальных цилиндрических резервуаров

Аспирант И.А. Порываев*;
аспирант М.Н. Сафиуллин;
к.т.н., профессор А.А. Семенов,
ФГБОУ ВПО Уфимский государственный нефтяной технический университет

Ключевые слова: вертикальный цилиндрический резервуар; купольное покрытие; аэродинамические исследования; симметричная снеговая нагрузка; несимметричная снеговая нагрузка

Листовые конструкции в виде емкостных сооружений (резервуаров и газгольдеров) широко применяются во всех отраслях промышленности. Металлические резервуары цилиндрической формы впервые были введены в практику В.Г. Шуховым. В качестве покрытий первых цилиндрических резервуаров использовались конические купола, а также плоские шпренгельные системы [1]. В работе [2] А.С. Арзунян описал конструкцию крыши резервуара в форме безмоментной оболочки. В 50-е годы М.И. Ашкинази [3] предложил использовать резервуары со сфероцилиндрической крышей.

Сегодня на территории России расположено более 50 тыс. резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов, и наблюдается тенденция к увеличению их количества [4]. В настоящее время нормативные документы [5-8] рекомендуют в качестве стационарных покрытий цилиндрических резервуаров использовать сферические или конические купола различных конструктивных схем (щитовые, ребристые, ребристо-кольцевые, сетчатые) [9]. При этом нормы не запрещают использовать в качестве стационарных покрытий резервуаров крыши других форм.

При расчете покрытий зданий и сооружений любого назначения необходимо учитывать снеговую нагрузку. Величина и характер распределения снеговой нагрузки по покрытию зависят от ряда факторов (вес снегового покрова на поверхности земли, теплотехнические характеристики кровли, сдувание снега и т.д.) [10] и во многом определяются геометрическими параметрами крыши. Снеговую нагрузку на сферические и конические покрытия следует определять согласно схемам Г.13 и Г.14 (рис. 1) [11]. При этом необходимо учитывать симметричное (снег 1) и несимметричное (снег 2) (с учетом снегопереноса) распределение нагрузки. Аналогичные схемы приведены в нормативах для проектирования резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов [12]. Проведенные исследования [13] показали, что в условиях климатических районов с высокими значениями веса снегового покрова (IV-VIII снеговые районы РФ) основной вклад в напряженно-деформированное состояние (НДС) конструктивных элементов сферических покрытий вертикальных цилиндрических резервуаров вносит именно снеговая нагрузка.

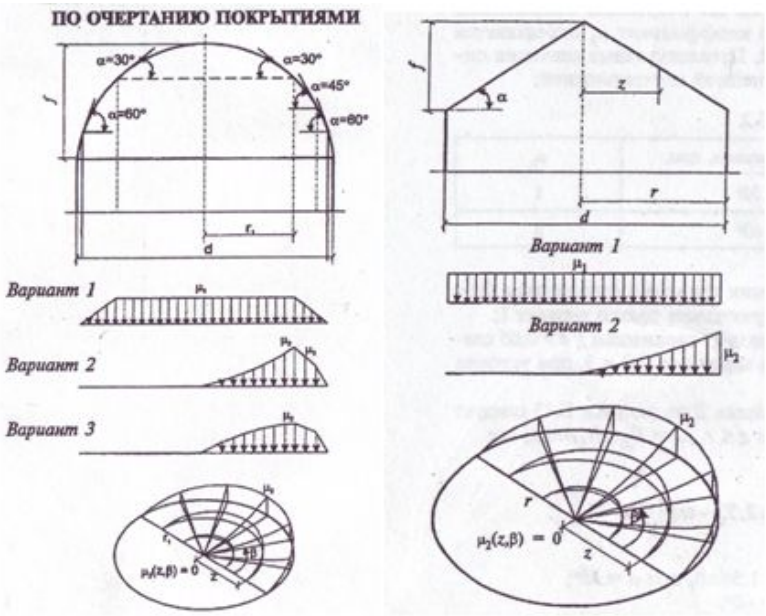


Рисунок 1. Схемы для определения снеговой нагрузки на сферические и конические покрытия

Проблемы определения снеговых нагрузок на покрытия зданий освещены в работах [14-19]. В исследованиях [20-22] величина и характер распределения снеговых нагрузок по покрытиям установлены по результатам аэродинамических испытаний. В работе [23] освещаются вопросы численного моделирования снеговых воздействий. Исследование [24] посвящено определению снеговых воздействий на здания по результатам статистической обработки данных о весе снегового покрова. Вопросам определения и минимизации влияния снеговой нагрузки на сферические купольные крыши резервуаров посвящен ряд работ [25-28]. Подобные исследования обеспечивают повышение надежности, а в ряде случаев и снижение материалоемкости покрытий цилиндрических резервуаров.

Целью исследования является решение задачи формообразования купольных покрытий вертикального цилиндрического резервуара для хранения нефти и нефтепродуктов объемом 20000 м^3 (РВС 20000, диаметр 39,9м, высота стенки 18м) и экспериментальное определение ветровых и снеговых нагрузок на крышу.

В основу поиска геометрических форм покрытий резервуара был положен следующий принцип: покрытие формируется путем сопряжения конических или сферических поверхностей. На основе проведенных исследований было предложено три варианта геометрических схем покрытий (рис. 2).

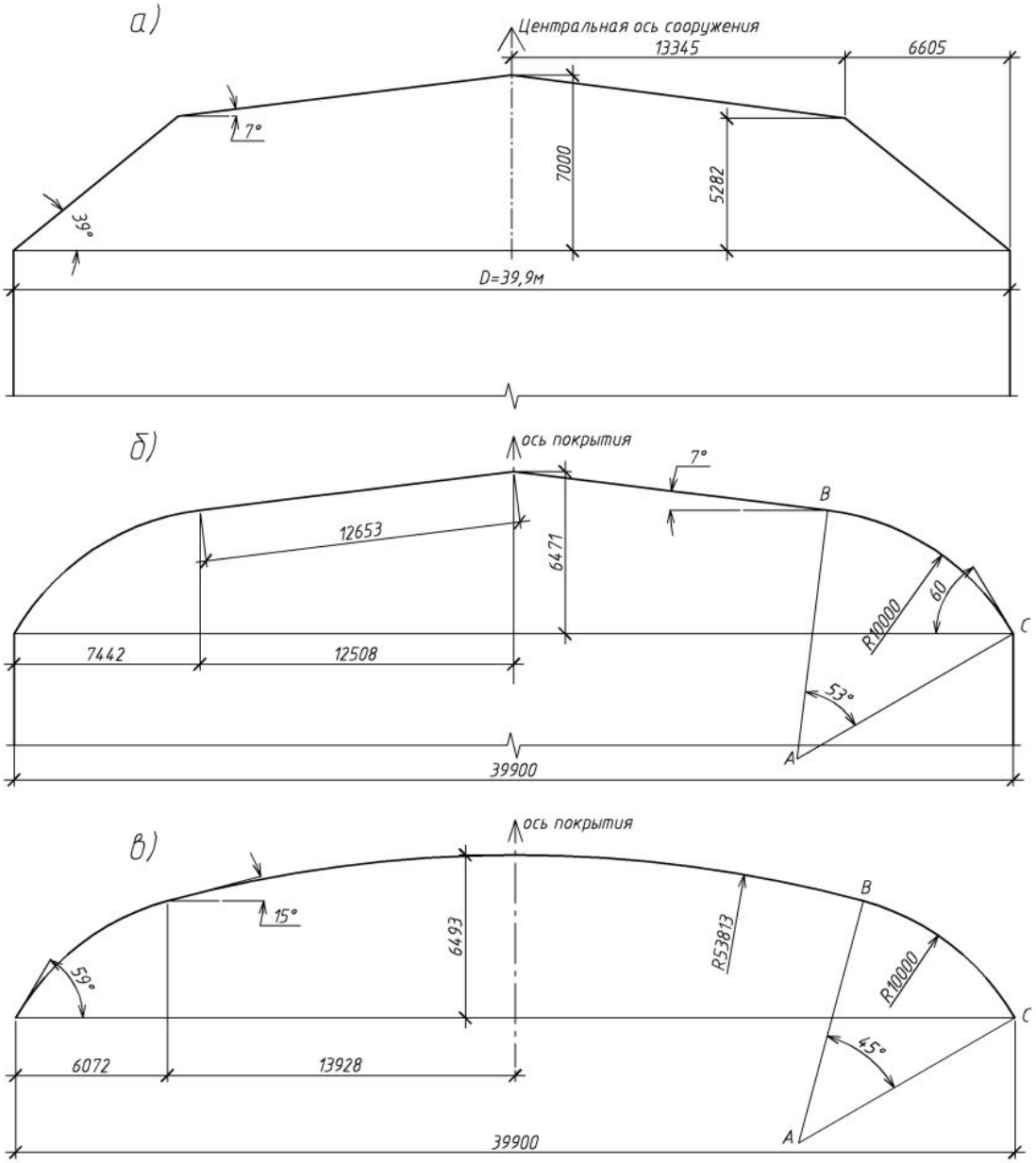


Рисунок 2. Геометрические параметры предложенных вариантов: а) В-1; б) В-2; в) В-3

Покрытие В-1 образовано путем сопряжения двух конических поверхностей; В-2 – сопряжением конической поверхности с тором; В-3 – сопряжением сферической поверхности с тором. Для покрытий предложенных форм в нормативной и технической литературе [5-12, 29, 30] отсутствуют рекомендации по назначению ветровых и снеговых нагрузок. С целью определения аэродинамических коэффициентов внешнего давления на поверхности стен и крыши резервуаров, а также для установления качественной и количественной картины снегоотложений на покрытиях авторами совместно со специалистами Новосибирского отдела Научно-исследовательской и проектно-строительной фирмы УНИКОН были проведены эксперименты в специализированной аэродинамической трубе с длинной рабочей частью.

Экспериментальные исследования выполнялись в три этапа:

- определение аэродинамических коэффициентов внешнего давления;
- измерение скорости ветра вблизи исследуемого покрытия (на расстоянии 0,5 м в натуре);
- установление качественной и количественной картины снегоотложений на покрытиях.

Для проведения эксперимента модель отдельно стоящего резервуара с обвалованием (выполненная в масштабе 1:200 [29]) устанавливалась в рабочую часть трубы. Обвалование выполнено согласно требованиям СНиП 2.11.03-93. Испытания всех моделей были выполнены при следующих условиях: пограничный слой типа А, II ветровой, V снеговой районы [11]. Высота моделируемого пограничного слоя земли 300 метров. При этом были выдержаны критерии подобия профилей средней скорости и уровня турбулентных пульсаций скорости модельного пограничного слоя пограничному слою земли [29].

Для измерения средней и пульсационной составляющих ветровой нагрузки исследуемая модель оснащалась 14 датчиками приемниками давления, расположенными в одном сечении. При измерениях давления модель дискретно поворачивалась через $\Delta\beta = 10^0$ в диапазоне $0^0 \le \beta \le 180^0$. Измеренное давление представлялось безразмерными коэффициентами, представляющими собой отношение давления в точке измерения к давлению набегающего потока (скоростному напору) в контрольной точке (аэродинамические коэффициенты внешнего давления) [29]:

$$C_e = \frac{(P - P_0)}{q_{к.т.}} = \frac{(P - P_0)}{\frac{\rho \cdot U^2_{к.т.}}{2}}, \qquad (1)$$

где P – измеренное абсолютное давление в точке поверхности модели; P_0 – давление невозмущенного потока; $q_{к.т.}$ – скоростной напор в контрольной точке потока; $U_{к.т.}$ – скорость в контрольной точке потока.

Контрольные измерения скорости выполнены в передней части модели со смещением в сторону от нее для исключения влияния турбулентного следа от измерительного устройства на показатели давления на модели (рис. 3). Высота измерения *Z= 120 мм*.

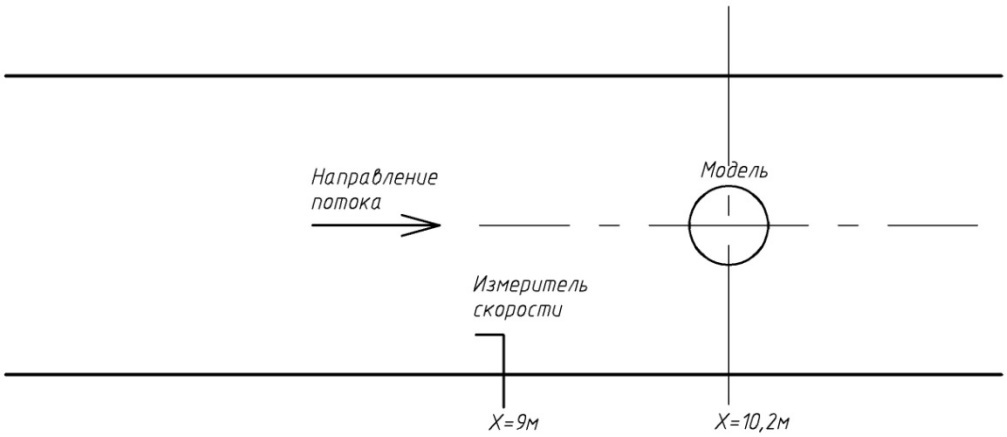
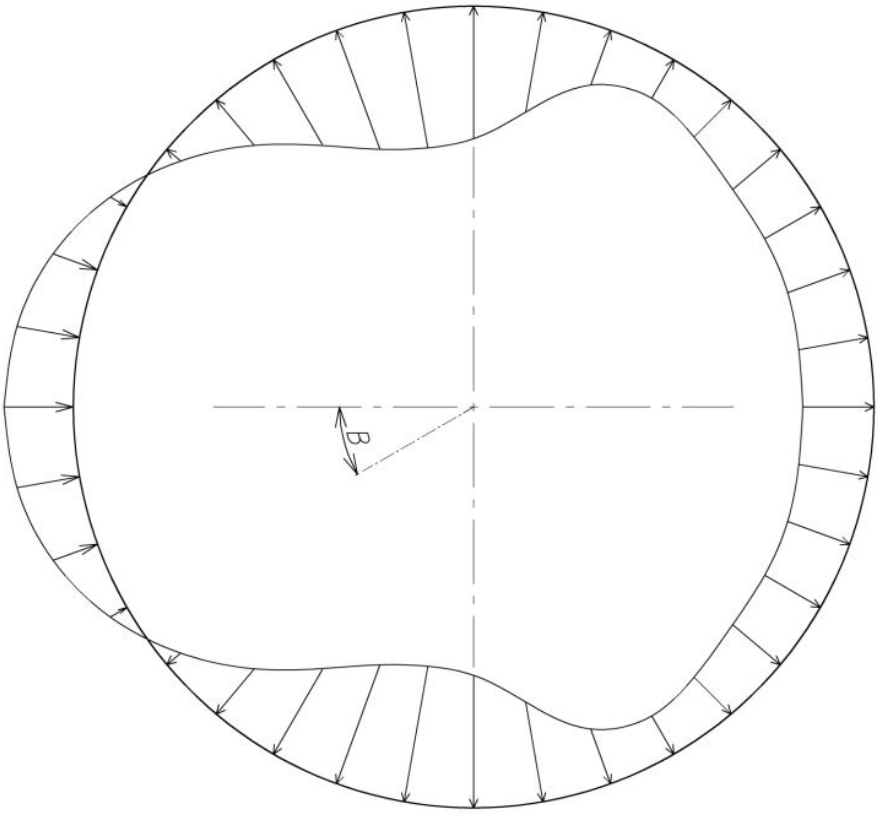


Рисунок 3. Размещение измерителя скорости относительно модели

Распределение аэродинамических коэффициентов внешнего давления по поверхности стенки резервуара аналогично для всех вариантов покрытия и показано на рис. 4.



Угол B	Коэффициент Ce
0	0,69
10	0,63
20	0,47
30	0,19
40	-0,18
50	-0,59
60	-0,97
70	-1,26
80	-1,37
90	-1,32
100	-1,01
110	-0,58
120	-0,44
130	-0,52
140	-0,62
150	-0,64
160	-0,66
170	-0,7
180	-0,71

Рисунок 4. Распределение аэродинамических коэффициентов в горизонтальном сечении стенки на отметке +7,800

В диапазоне $0^0 \le \beta \le 35^0$ стенка испытывает положительное давление. По остальной поверхности действует отрицательное давление. Распределение коэффициентов давления на внешней поверхности резервуара с покрытием первого типа в продольном вертикальном сечении, проходящем через вертикальную ось, показано на рис. 5.

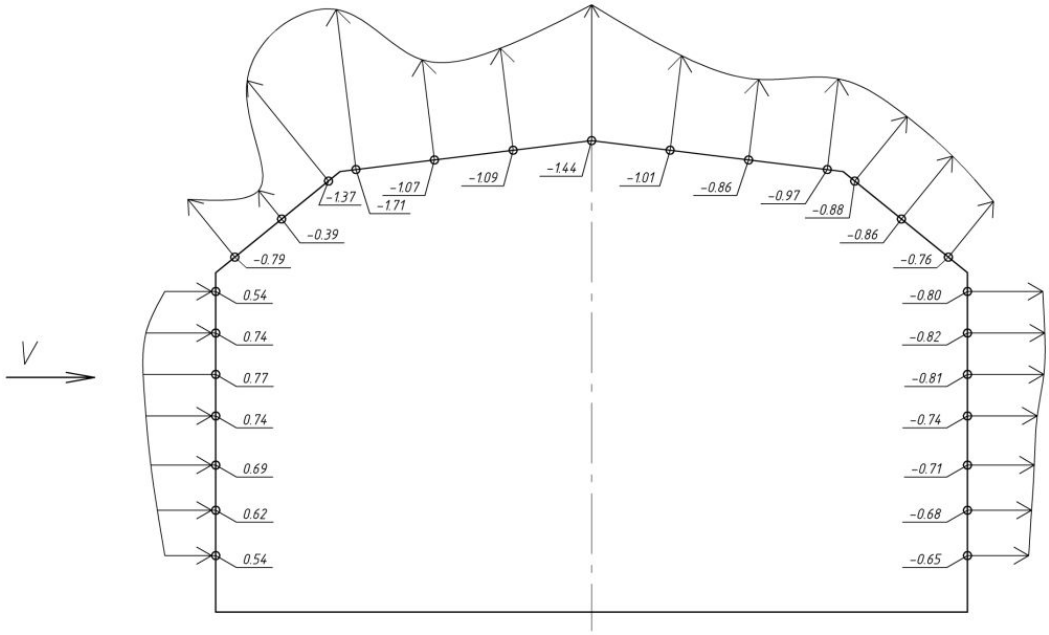


Рисунок 5. Распределение коэффициентов давления на внешней поверхности резервуара с покрытием 1 типа в продольном вертикальном сечении, проходящем через центральную ось

Линии равных коэффициентов давления C_e (изолинии) на покрытии В-1 показаны на рис. 6.

Покрытие В-1 испытывает отрицательное давление. Значения аэродинамических коэффициентов изменяются в диапазоне от -0,6 до -1,7. В области изменения угла наклона образующей покрытия с наветренной стороны наблюдается скачкообразное изменение значений аэродинамических коэффициентов. Суммированием локальных давлений определена полная подъемная сила, которую испытывает покрытие резервуара. При скорости ветра на высоте покрытия *U = 22 м/с* полная подъемная сила, действующая на покрытие В-1, равна $Z_1 = 430кН$.

Распределение коэффициентов внешнего давления по поверхности резервуаров с покрытиями В-2 и В-3 показано на рис. 7, 8.

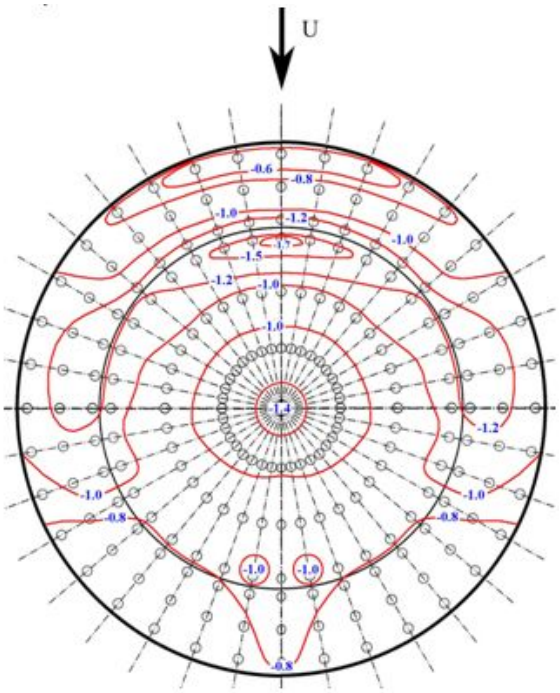


Рисунок 6. Изолинии коэффициентов давления на поверхности покрытия В-1

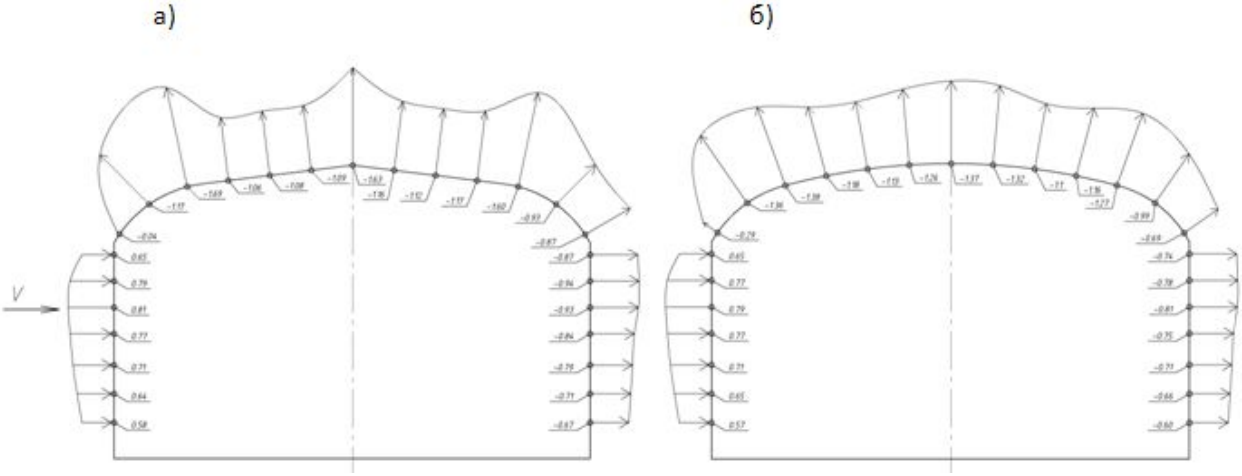


Рисунок 7. Распределение коэффициентов давления на внешней поверхности резервуара с покрытием В-2 (а) и В-3 (б) в продольном вертикальном сечении, проходящем через центральную ось

Покрытие В-2 испытывает отрицательное давление. Аэродинамические коэффициенты изменяются в диапазоне от -0,6 до -1,6. Изменение аэродинамических коэффициентов в области изменения «геометрии» покрытия менее выражено по сравнению с покрытием В-1. Полная подъемная сила, действующая на покрытие В-2, равна $Z_2 = 542кН$.

Покрытие В-3 испытывает отрицательное давление. Аэродинамические коэффициенты изменяются в диапазоне от −0,8 до −1,4. Полная подъемная сила, действующая на покрытие В-3, равна $Z_3 = 560кН$.

Измерения скорости ветра вблизи поверхности покрытия проведены методом термоанемометрии. Измеренные значения скоростей ветра выражены безразмерными коэффициентами:

$$K = \frac{U_{изм}}{U_{к.т.}}, \qquad (2)$$

где $U_{изм}$ – значение скорости ветра в точке измерения; $U_{к.т.}$ – значение скорости ветра в контрольной точке (рис. 3).

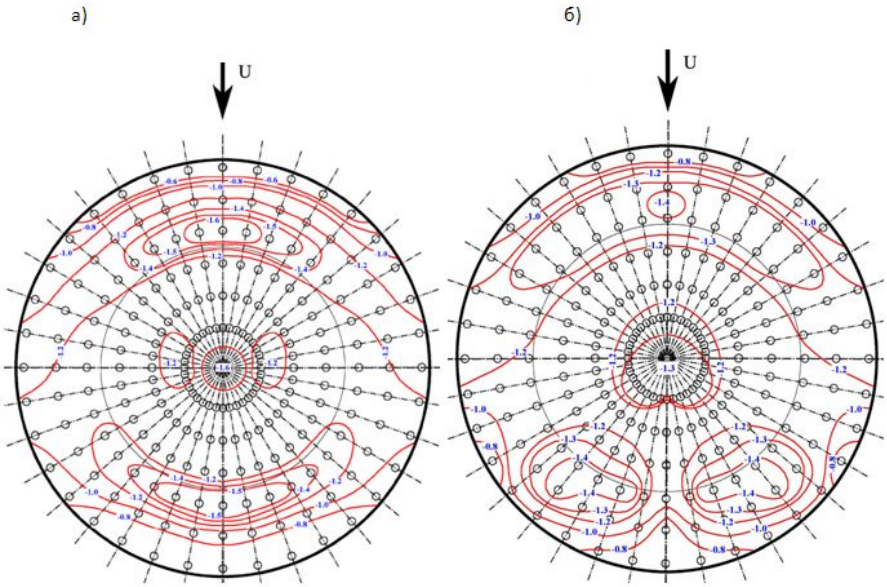


Рисунок 8 . Изолинии коэффициентов давления на поверхности покрытия В-2 (а) и В-3 (б)

Линии равных скоростей ветра (изотахи) показаны на рис. 9.

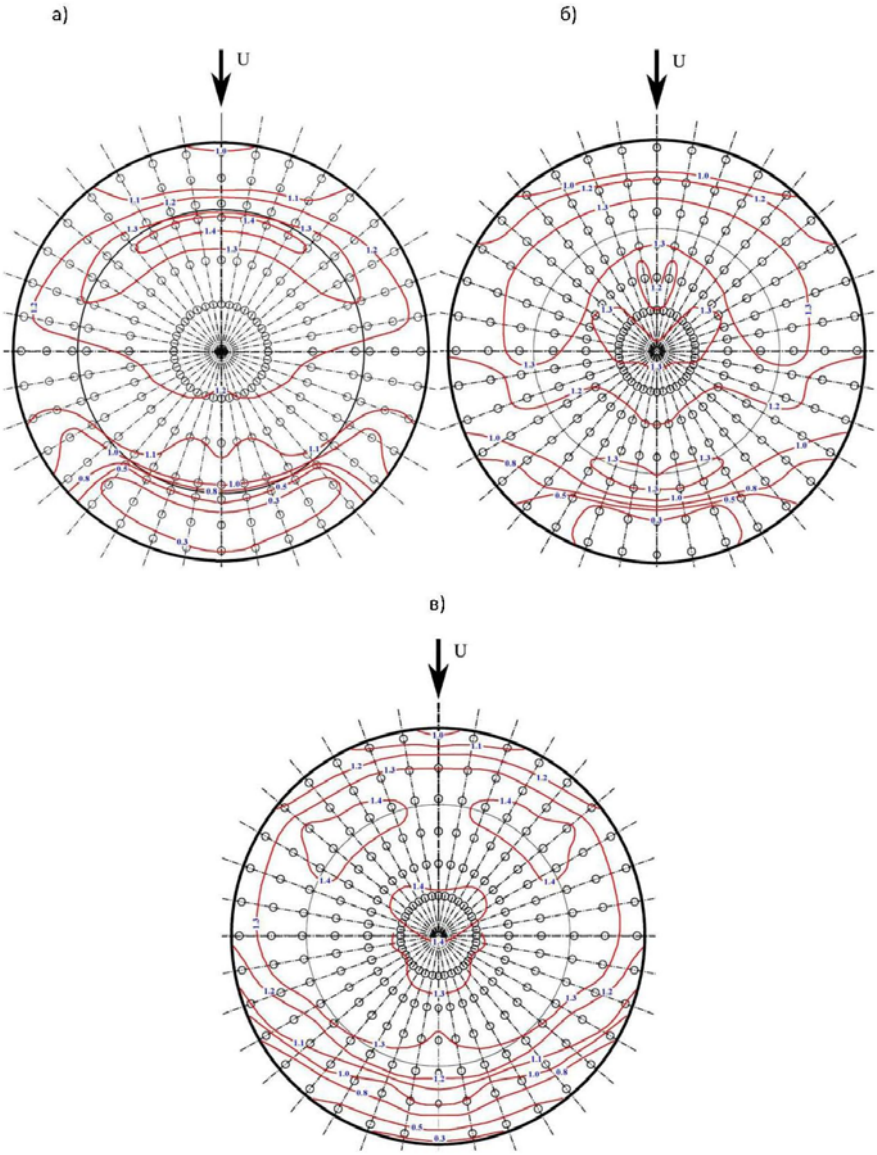


Рисунок 9. Линии равных скоростей (изотахи)
на поверхности покрытия В-1 (а); В-2 (б); В-3 (в)

На наветренной стороне покрытия В-1 скорость ветра увеличивается в направлении к центральной оси покрытия (коэффициенты *К* изменяются от 1 до 1,4). На подветренной стороне можно выделить область аэродинамической тени, в которой коэффициент *К* снижается до 0,3. В области аэродинамической тени возможно образование повышенных снеговых отложений (снеговых «мешков») [30].

Аналогичные тенденции характерны для покрытий В-2 и В-3.

Для оценки объемов выноса и отложения снеговых масс на покрытия наносился слой модельного материала (древесная мука) и выполнялась продувка со ступенчатым изменением скорости ветра от 2 м/с до 6-7 м/с. Формы конечных отложений снеговых масс показаны на рис. 10.

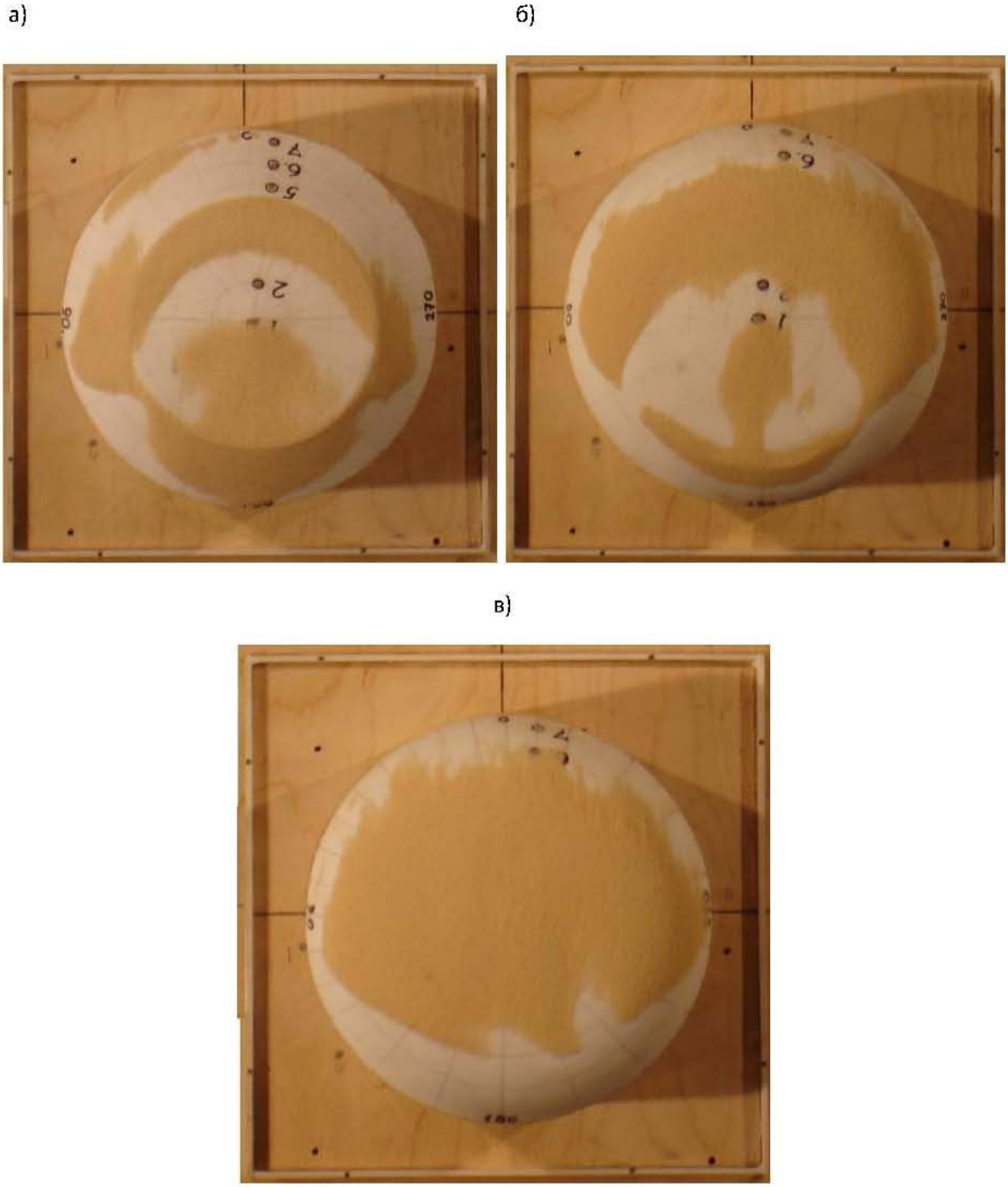


Рисунок 10. Конечные формы снеговых отложений на покрытиях В-1 (а); В-2 (б); В-3 (в)

По полученным данным определены коэффициенты перехода от веса снегового покрова земли к весу снегового покрова на покрытиях исследованных форм (коэффициенты *μ*). Распределение коэффициента *μ* по покрытию В-1 показано на рис. 11.

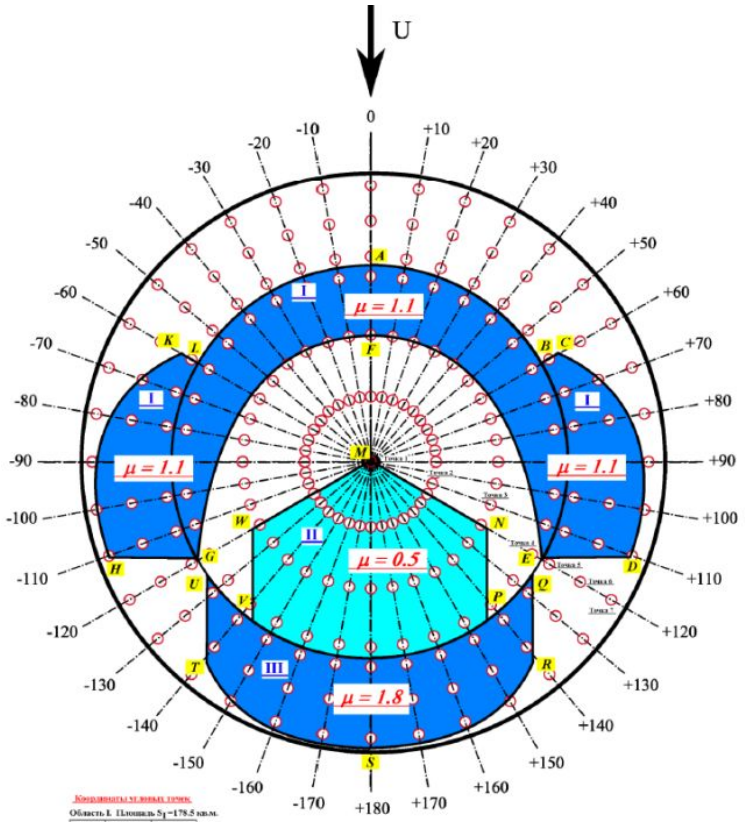


Рисунок 11. Коэффициенты перехода *μ* на покрытии В-1

На покрытии В-1 снеговые массы распределены симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через вертикальную ось резервуара и параллельную направлению ветрового потока. Выделены области с разным по величине уровнем снегового покрова. Максимальная величина коэффициента перехода *μ=1,8*, наименьшее значение этого коэффициента *μ=0,50*.

Распределение коэффициентов перехода *μ* по покрытиям В-2 и В-3 показано на рис. 12, 13.

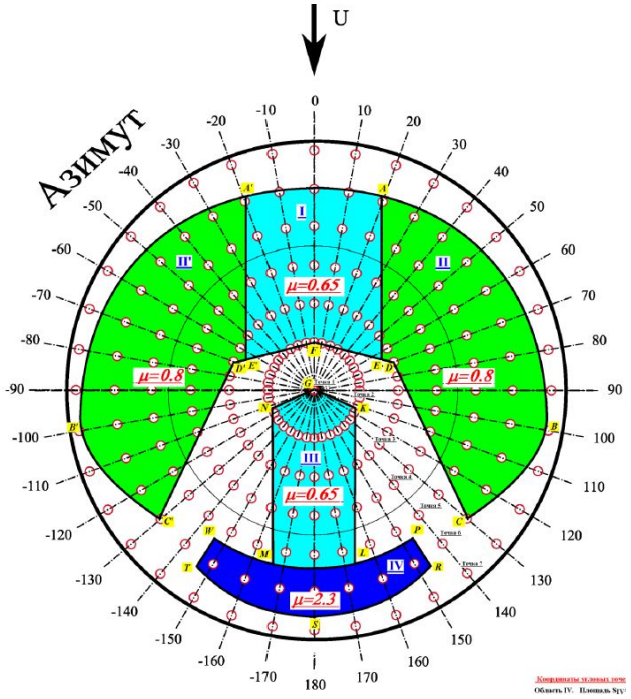


Рисунок 12. Коэффициенты перехода μ на покрытии В-2

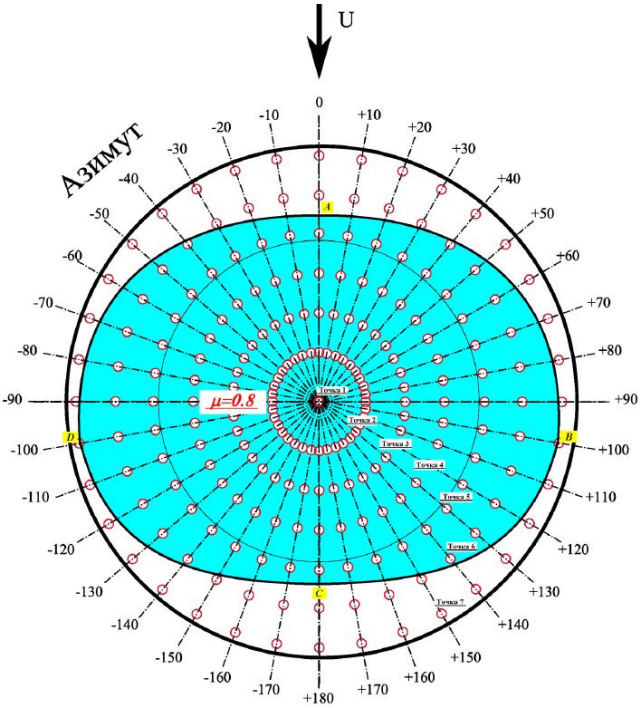


Рисунок 13. Коэффициенты перехода μ на покрытии В-3

На покрытии В-2 снеговые массы распределены симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через вертикальную ось резервуара и параллельную направлению ветрового потока. Максимальная величина коэффициента *μ=2,3*, наименьшее значение этого коэффициента *μ=0,65.*

Для покрытия В-3 характерно равномерное распределение снеговых масс по поверхности, величина коэффициента *μ=0,8*.

Для покрытий В-1, В-2 характерно асимметричное распределение снеговых масс относительно вертикальной плоскости, проходящей через вертикальную ось резервуара перпендикулярно направлению ветрового потока. Для покрытия В-3 асимметрия менее выражена.

Для покрытий предложенных форм характерно более равномерное распределение снеговых масс по сравнению со схемой Г.13 [11], согласно которой определяется характер распределения снеговой нагрузки.

С учетом полученных экспериментальных данных были выполнены численные исследования упрощенных стержневых моделей куполов предложенных форм, а также сферического покрытия со значением стрелы подъема $f_1 = 7$ *м.* Расчеты производились с использованием программного комплекса SCAD [31]. Моделировались покрытия, выполненные по ребристой конструктивной схеме. Крыша моделировалось совместно со стенкой. Элементы покрытия моделировались стержневыми конечными элементами, стенка – оболочечными. Закрепление стенки в основании принято жестким. Фрагменты расчетных моделей показаны на рис. 14.

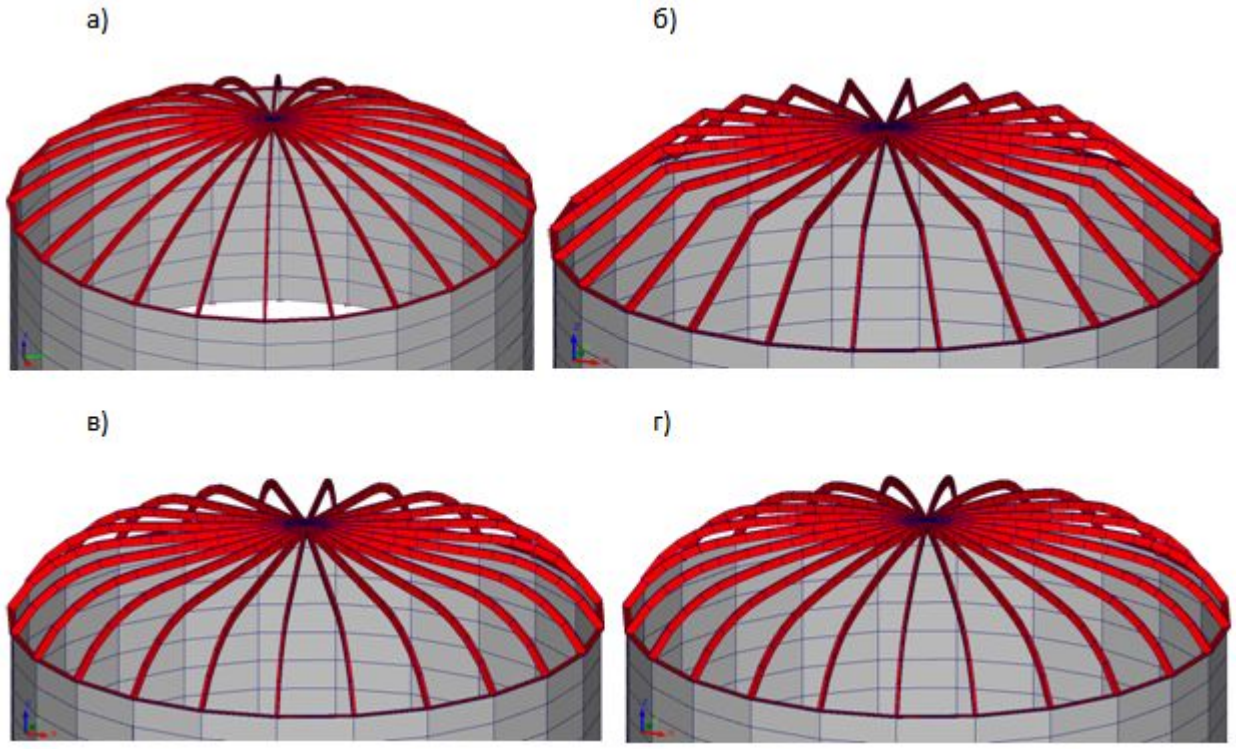


Рисунок 14. Расчетные модели покрытий: а) сферический купол; б) покрытие В – 1; в) покрытие В – 2; г) покрытие В – 3

Учитывались два взаимоисключающих загружения:

- симметричная снеговая нагрузка (снег 1);
- несимметричная снеговая нагрузка (снег 2).

При этом несимметричное снеговое загружение на сферическое покрытие задавалось в соответствии с [11]. По результатам расчетов проведено сравнение величины максимальных нормальных напряжений, возникающих в сечениях ребер куполов. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчетов

Геометрическая схема	Снеговое загружение						σ_{max}, МПа
	Симметричное			Несимметричное			
	M, кНм	***N***, кН	***σ, МПа***	***M***, кНм	***N***, кН	***σ, МПа***	
Сферическое *f=7м*	83,2	186,4	34,0	402,0	136,3	123,8	123,8
В – 1	115,7	170,7	42,6	164,8	176,6	57,1	57,1
В – 2	153,6	215,8	56,0	106,9	63,2	34,3	56,0
В – 3	135,4	210,9	50,4	137,3	134,8	46,9	50,4

Наиболее неблагоприятным загружением для сферического покрытия со стрелой подъема *f = 7 м* является несимметричная снеговая нагрузка, напряжения от которой более чем в 3,5 раза превышают напряжения от симметричной снеговой нагрузки. Для покрытия В-1 неблагоприятной является несимметричная снеговая нагрузка, значения напряжений от которой превышают значения напряжения от симметричной на 34%. Для покрытия В-2 напряжения от симметричной нагрузки превышают напряжения от несимметричной на 63%. Для покрытия В-3 отличие составляет 7% при более неблагоприятном влиянии симметричной нагрузки.

Проведенные расчеты показывают, что покрытия предложенных форм являются более эффективными при восприятии несимметричной снеговой нагрузки, чем традиционные купольные крыши резервуаров.

Выводы

В результате выполненных модельных и численных исследований покрытий РВС 20000 можно сделать следующие основные выводы.

1. Предложено несколько нетрадиционных геометрических форм покрытий вертикальных цилиндрических резервуаров.
2. Установлены значения аэродинамических коэффициентов внешнего давления на поверхности стен и покрытия резервуара.
3. Определены характер распределения и величина снеговой нагрузки на покрытиях предложенных форм.
4. Снеговая нагрузка должна рассматриваться как параметр оптимизации при определении рациональных геометрических форм покрытий зданий и сооружений.
5. Проведенные предварительные расчеты показали, что покрытия предложенных форм более эффективны по показателю материалоемкости, чем традиционные сферические покрытия резервуаров в условиях, когда наибольший вклад в напряженно-деформированное состояние несущих элементов вносит снеговая нагрузка.
6. Полученные значения ветровых нагрузок можно использовать при расчете опорного кольца купола резервуара, крепления ограждающих конструкций покрытия.
7. Полученные результаты могут быть использованы при разработке рациональных конструктивных решений купольных покрытий вертикальных цилиндрических резервуаров.

Литература

1. Ковельман Г. М. Творчество инженера В. Г. Шухова. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961. 362 с.
2. Арзунян А. С. Резервуары с безмоментной кровлей для хранения нефти и нефтепродуктов / ЦНИИИТЭнефть. М., 1956. 180 с.
3. Ашкинази М. И. Резервуары со сфероцилиндрической крышей (опыт строительства и эксплуатации). М.: ГОСТОПТЕХИЗДАТ, 1960. 42 с.
4. Ханухов Х. М. Развитие системы обеспечения циклической прочности и промышленной безопасности строительных сварных металлоконструкций. Автореферат дисс…. докт. техн. наук. М.: УГТУ-УПИ, 2011. 68 с.
5. ГОСТ Р 31385-2008. Резервуары вертикальные цилиндрические стальные для нефти и нефтепродуктов. Общие технические условия / ФГУП «Стандартинформ». М., 2010. 53 с.

6. ПБ 03-605-03. Правила устройства вертикальных цилиндрических стальных резервуаров для нефти и нефтепродуктов / Госгортехнадзор России. М., 2004. 83 с.
7. EN 1993-4-2-2007. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 4-2: Tanks, 2009. 48 p.
8. API Standart 650. Welded steel tanks of oil storage. American petroleum institute. 2006. 240 p.
9. Нехаев Г. А. Проектирование и расчет стальных цилиндрических резервуаров и газгольдеров низкого давления: Учебное пособие. М.: АСВ, 2005. 216 с.
10. Гордеев В. Н., Лантух-Лященко А. И. и др. Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. 3-е изд., перераб. / Под общей ред. А. В. Перельмутера. М.: СКАД СОФТ, 2009. 514 с.
11. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия / Минрегион России. М., 2010. 80 с.
12. СТО СА 03-002-2009. Правила проектирования, изготовления и монтажа вертикальных цилиндрических стальных резервуаров для нефти и нефтепродуктов / Ассоциация «Ростехэкспертиза». М., 2009. 212 с.
13. Порываев И. А., Сафиуллин М. Н., Семенов А. А.. Определение зависимостей между параметрами напряженно-деформированного состояния несущих конструкций и геометрической схемой купольных покрытий резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов [Электронный ресурс] // Нефтегазовое дело. 2011. №4. С. 158-168. Систем. требования: AdobeAcrobatReader. URL: http://www.ogbus.ru/authors/Poryvaev/Poryvaev_1.pdf (дата обращения 02.02.2012).
14. Ледовский И. В. Проблемы теории снеговых нагрузок на сооружения. Автореферат дисс…. докт. техн. наук. Санкт Петербург: СпбГАСУ, 2008. 70 с.
15. O'Rourke M., Wrenn P. D. Snow Loads. A guide to the use and Understanding of the snow load provisions of ASCE 7-02 / American Society of Civil Engineers. 2004. 150 p.
16. Snow Engineering V / Ed. P. Bartelt, E. Adams, M. Christen, R. Sack, A. Sato. Davos: A.A. Balkema, 2004. 387 p.
17. Грудев И. Д., Филиппов В. В., Рыков А. В. Определение нормативных и расчетных значений снеговых нагрузок // Промышленное и гражданское строительство. 2007 №4. С. 10-12.
18. Ellingwood B., O'Rourke M. Probabilistic models of snow loads on structures // Structural safety. Vol. 2. Issue 4. 1985. Pp. 291-299.
19. Giever P. M., Sack R. L. Similitude considerations for roof snow loads // Cold Regions Science and Technology. Vol. 19. Issue 1. December, 1990. Pp. 59 – 71.
20. Popov N. A,. Otstavnov V. A,. Berezin M. A. Wind tunnel investigations of wind and snow loads acting on long-span roofs // Proceedings of Third European and African conference on wind engineering. Eindhoven, Netherlands, July 2-6, 2001 (J Wisse, editor). Pp. 115-118.
21. Delpech Ph., Pailer P., Gandemer J. Snowdrifting simulation around Antarctic buildings // Proceedings of the 2nd European and African Conference on Wind Engineering. Genoa, Italy, June 22-26, 1997 (J. Solari, editor). Vol. 1. Pp. 903-910.
22. Scarascia G., J. Castellano. Snow distributions on greenhouses // In Snow Engineering. Recent advances and developments. Rotterdam, 2000. Pp. 265-274.
23. Bang B., Nielsen A., Sunsbo P., Wiik T. Computer simulation of wind speed, wind pressure and snow accumulation around buildings (SNOW-SIM) // Energy and Buildings. Vol. 21. Issue 3. 1994. Pp. 235-243.
24. Meloysund V., Liso K. R., Hygen H. O., Hoiseth K. V., Leira B. Effects of wind exposure on roof snow loads // Building and Environment. Vol. 42. issue 10. October, 2007. Pp. 3726-3736.
25. Ружанский И. Л. Алюминиевый купол для резервуара диаметром 40 м // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2002. № 7. С. 25-30.
26. Ильин Е. Г., Востров В. К. Снеговые нагрузки и конструктивные параметры сферических алюминиевых крыш для вертикальных цилиндрических стальных и железобетонных резервуаров // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2011. №1. С. 27-31.
27. Востров В. К., Павлов А. Б. Вопросы расчета экстремальных снеговых нагрузок на купольные покрытия // Промышленное и гражданское строительство. 2005. №7. С. 39-42.
28. Мондрус В. Л., Павлов С. А. Определение расчетных значений снеговых нагрузок для купола резервуара // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №11. С. 50-51.
29. Реттер Э. И. Архитектурно-строительная аэродинамика. М.: Стройиздат, 1984. 294 с.
30. Дюнин А. К. Механика метелей (Вопросы теории проектирования снегорегулирующих средств). Новосибирск: изд. СО АН СССР, 1963. 380 с.
31. Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Маляренко А. А., Микитаренко М. А., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. Вычислительный комплекс SCAD. М.: СКАД СОФТ, 2009. 656 с.

** Илья Аркадьевич Порываев, г. Уфа, Россия*
Тел. моб.: +7(917)4011118; эл. почта: ilyaporivaev@rambler.ru

© Порываев И.А., Сафиуллин М.Н., Семенов А.А., 2012

Исследование эффективности одно- и двухмассового динамического гасителя колебаний на модели каркасного здания при вибрационных испытаниях

Д.т.н., профессор М.Г. Мелкумян*,
"Центр новых строительных технологий", АООТ "Армпроект"

Ключевые слова: динамический гаситель колебаний; сейсмические воздействия; гармонические колебания; модель здания; вибрационные испытания; настройка гасителя; эффективность гасителя

Теоретическому изучению поведения зданий с динамическими гасителями колебаний при различных воздействиях посвящено достаточно большое количество исследований [1, 2, 3, 4]. Однако экспериментальные работы в этом направлении весьма ограничены. Две работы, выполненные путем натурных вибрационных испытаний 9-этажных жилых зданий серии 111, оснащенных динамическими гасителями колебаний в виде гибкого верхнего этажа (ГВЭ) и изолированного верхнего этажа (ИВЭ), в г. Ванадзоре (бывший Кировакан) в Армении, описаны автором данной статьи в [5, 6, 7, 8].

Настоящая работа в определенной степени восполняет недостаток экспериментальных исследований, направленных на изучение поведения зданий с динамическими гасителями колебаний. Исследования проведены на модели 9-этажного каркасного здания той же серии 111. Модель была спроектирована и сооружена автором в масштабе 1:5 из железобетона [9] с использованием принципа простого подобия, разработанного в [10]. Она имела в плане девять колонн, образующих по два пролета (120 см) во взаимоперпендикулярных направлениях, с общими осевыми размерами 240x240 см. В одном направлении пространственная жесткость модели обеспечивалась работой трех рам с несущими ригелями (по рамной схеме), а в другом – работой трех рам со связевыми ригелями и одной вертикальной диафрагмой жесткости, расположенной в одном из пролетов в плоскости средней рамы (по связевой схеме). Сечения колонн были 8x8 см, несущих ригелей – 8x10.4(h) см и связевых ригелей – 8x5(h) см. Толщина перекрытий, состоящих из сборных круглопустотных модельных панелей, была равна 4.4 см, а сборных панелей диафрагмы жесткости – 2.8 см. В соответствии с конструктивным решением зданий серии 111, панели диафрагмы крепились к колоннам путем сварки закладных деталей, а их связь с ригелями осуществлялась замоноличиванием арматурных выпусков, выведенных из тела сборных панелей диафрагмы. Общая высота модели, при высоте каждого этажа 0.6 м, высоте фундаментных балок 0.4 м, а также стальных оголовников колонн, выступающих над перекрытием 9-го этажа на 0.1 м, была равна 5.9 м.

Внешний вид модели до устройства над ней динамических гасителей колебаний показан на рис. 1, откуда видно, что для создания необходимого уровня напряженно-деформированного состояния в конструктивных элементах модели последняя нагружалась вертикальными силами путем подвески чугунных грузов к ее перекрытиям. Более детальная информация о проектировании, сооружении и испытаниях данной модели без динамических гасителей колебаний может быть найдена в многочисленных работах автора настоящей статьи, которые здесь для краткости не приводятся.

Колебания модели до устройства гасителей возбуждались в обоих направлениях с помощью специально разработанных и изготовленных автором для модельных испытаний лабораторных вибромашин, установленных на перекрытии девятого этажа. Вибромашины жестко крепились к стальной раме, которая в свою очередь была приварена к стальным оголовникам всех девяти колонн модели (рис. 2). Вибромашины устанавливались так, чтобы возмущающие силы, возникающие при вращении эксцентрично расположенных грузов на валах вибраторов, действовали в вертикальных плоскостях, проходящих по средним осям (рамам) модели во взаимоперпендикулярных направлениях. Специальным устройством обороты двигателей постоянного тока вибромашин плавно регулировались, чем и обеспечивалось получение гармонических воздействий в диапазоне частот от 0 до 10Гц. Для измерения параметров виброколебаний использовались сейсмографы больших перемещений и акселерографы, установленные на уровне всех перекрытий вдоль центральной вертикальной оси модели, за исключением приборов на перекрытии девятого этажа. Здесь, из-за наличия вибромашин, сейсмоприборы были установлены вне центральной зоны плана модели.

а б

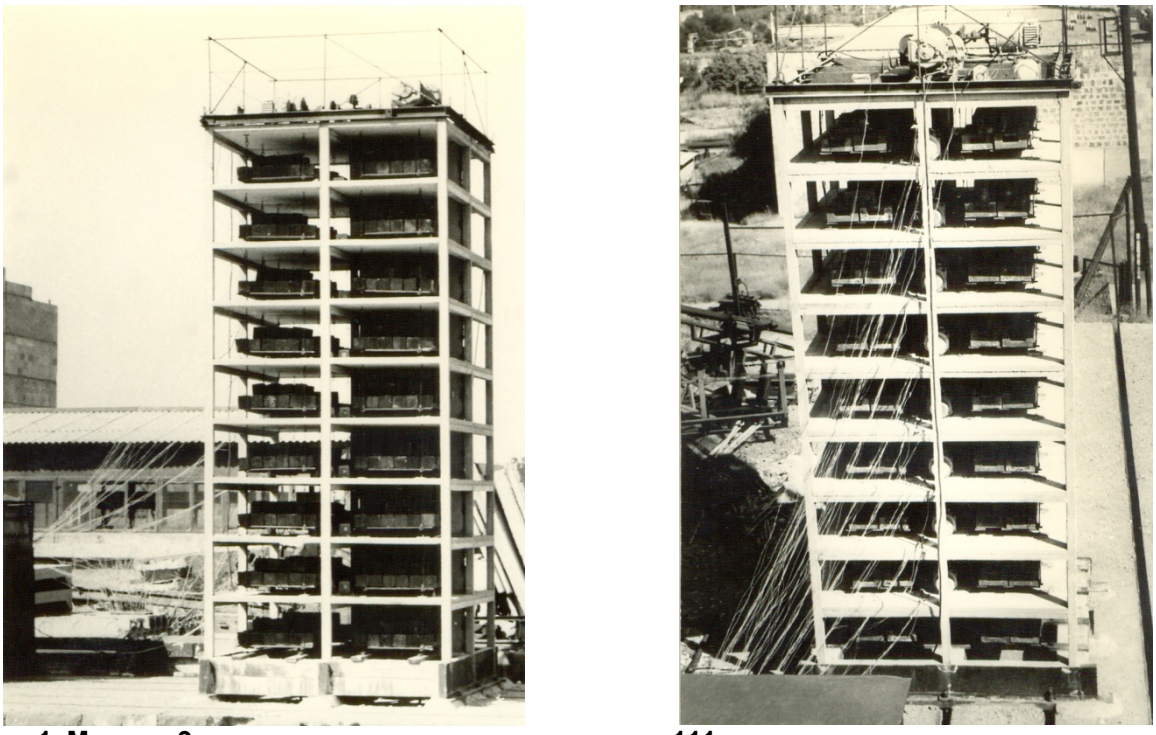


Рисунок 1. Модель 9-этажного каркасного здания серии 111, спроектированная и сооруженная из железобетона в масштабе 1:5: а – вид спереди, б – вид сбоку

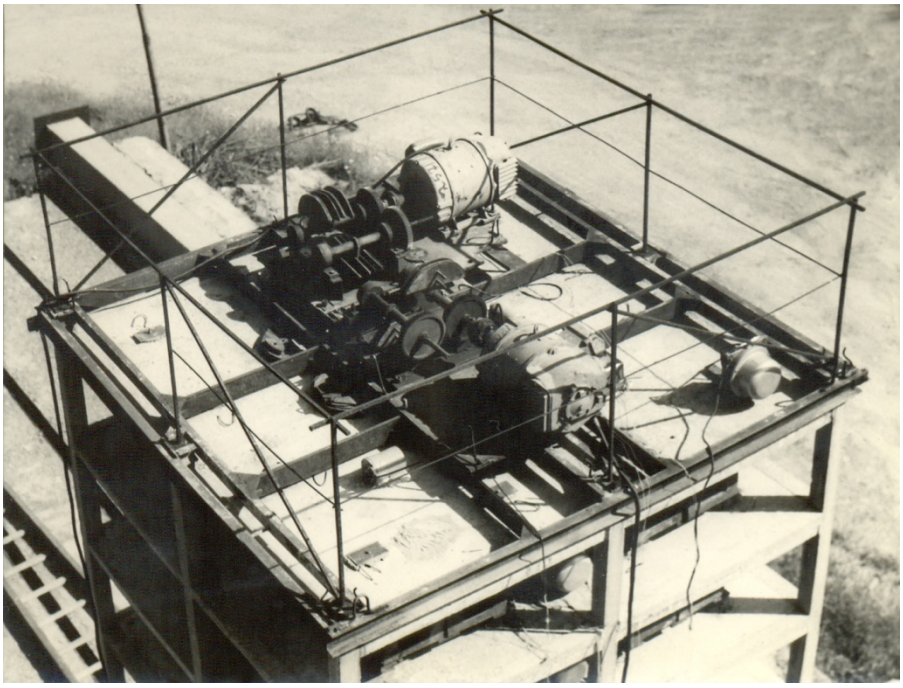


Рисунок 2. Лабораторные вибромашины для испытаний крупных моделей, установленные на перекрытии девятого этажа (до устройства гасителей) посредством стальной рамы, жестко закрепленной к стальным оголовникам колонн модели 9-этажного каркасного здания

Выше упоминалось о проведенных натурных вибрационных испытаниях 9-этажных жилых зданий серии 111, оснащенных динамическими гасителями колебаний в виде ГВЭ или ИВЭ. Эти системы представляли собой одномассовые гасители колебаний. В данной же экспериментальной работе предметом исследований является двухмассовый динамический гаситель колебаний. До устройства такого гасителя в виде дополнительного десятого этажа предварительно определялись динамические характеристики модели (периоды и коэффициенты затухания). С

помощью вибромашины возбуждались вынужденные резонансные колебания модели по первой, второй и третьей формам. Вычисленные по записям этих колебаний значения периодов и коэффициентов затухания даны в Таблице 1.

Таблица 1. Периоды колебаний и коэффициенты затухания модели 9-этажного каркасного здания в стадии упругой работы при возбуждении резонансных колебаний по первым трем формам до устройства двухмассового динамического гасителя колебаний

Направление испытаний	Периоды колебаний, сек			Коэффициент затухания ξ, %
	по первой форме – T_1	по второй форме – T_2	по третьей форме – T_3	
Вдоль рам с несущими ригелями (рамная схема)	0.326	0.133	0.075	4.3
Вдоль рам со связевыми ригелями (связевая схема)	0.280	0.088	0.049	4.0

Экспериментальные исследования модели 9-этажного каркасного здания с двухмассовым динамическим гасителем колебаний предполагалось проводить при ее нагружении только в направлении рам со связевыми ригелями и с диафрагмой жесткости, расположенной в одном из пролетов в плоскости средней рамы. В связи с этим одна из вибромашин была демонтирована. В данном направлении, с целью достижения стадии трещинообразования, модель подверглась нескольким этапам динамического нагружения с постепенным увеличением веса внецентренных грузов на валах вибратора. При этом в панелях вертикальной диафрагмы жесткости появились легкие повреждения в виде наклонных волосяных взаимнопересекающихся трещин, а период колебаний основного тона модели увеличился по отношению к первоначальному в 1.25 раз и оказался равным 0.35 сек (ω_1=2.86 Гц). Коэффициент затухания практически не изменился (ξ=4%), а амплитуда перемещения перекрытия 9-го этажа была равна A=3.1 см.

Полученные величины легли в основу подбора параметров, а именно массы и жесткости первого гасителя, названного автором основным. Оказалось, что для обеспечения требуемой горизонтальной жесткости упомянутого выше дополнительного десятого этажа – основного гасителя – его стойки могут быть металлическими, выполненными из квадратного железа сечением 14x14 мм, приваренными к торцам стальных оголовников колонн 9-этажной модели. При этом жесткость перекрытия модельного основного гасителя может быть обеспечена уголковыми профилями из прокатной стали размером 45x45x4 мм, а его масса может набираться посредством железобетонных плит, укладываемых на эти уголковые профили (рис. 3). Таким образом, созданная над 9-этажной моделью конструкция основного гасителя аналогична ГВЭ, проект которого был разработан автором данной статьи, а затем реализован и испытан при его непосредственном участии [6, 11].

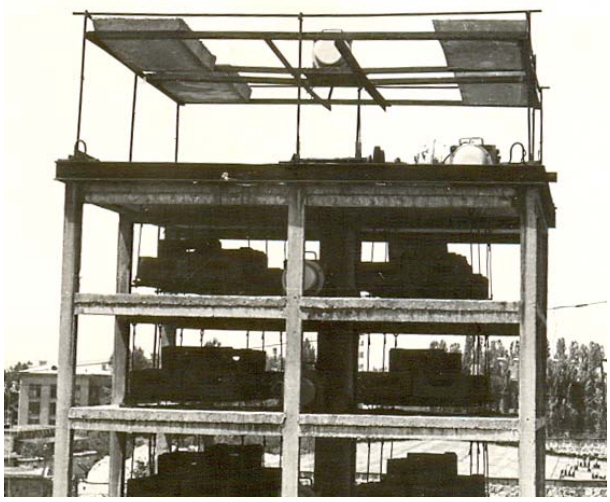


Рисунок 3. Фрагмент верхней части 9-этажной модели с видом дополнительного десятого этажа – основного гасителя с уложенными железобетонными плитами, образующими его массу

В процессе исследований преследовалась цель выявить эффективность и демпфирующие свойства двухмассового гасителя и сравнить их с эффективностью одномассового гасителя. Вопрос о выборе оптимального затухания в гасителе не ставился. Настройка основного гасителя $f^2_1=f^2_{ОГ}:\omega^2_1$ (без учета демпфирования [12]) производилась непосредственно на модели. Первоначально основной гаситель настраивался на частоту $f_{ОГ}$, очень близкую к резонансной частоте первой формы колебаний модели ω_1. Потом с помощью дискретного изменения массы гасителя определялась оптимальная настройка [13], при которой достигается максимальная эффективность гашения. Оказалось, что оптимальная настройка предполагает набор массы основного гасителя до величины, равной $m_{ОГ}$=360 кг, что составило половину массы этажа модели (без пригрузов) $m_Э$=720 кг. Следовательно, учитывая, что общая масса девяти этажей модели

равна $M_м$=720x9=6480 кг, относительная масса $\nu=m_{ОГ}:M_м$=360:6480=0.056 (или 5.6%), а настройка f^2_1=1.0.

С учетом демпфирования подход к оптимизации параметров динамических гасителей отличается от случая гасителей без демпфирования, так как определяются оптимальные значения настройки и относительного коэффициента вязкого (или неупругого) сопротивления при заданном значении ν. Оптимальные значения настройки по гипотезам вязкого сопротивления или внутреннего неупругого сопротивления определяются одним и тем же путем [12, 14]. В нашем случае оптимальная настройка с учетом демпфирования отличается от величины f^2_1 и определяется по формуле:

$$f_{on}^2 = \frac{1}{1+\upsilon} = \frac{1}{1.056} = 0.95.$$

После настройки основного гасителя модель подверглась динамическому нагружению с переменной частотой. Фрагменты записей колебаний, полученных при вибрационных резонансных испытаниях сейсмоприборами, установленными на перекрытии девятого этажа модели и на уровне верха основного гасителя, приведены на рис. 4а. Из зарегистрированных записей видно, что максимальная амплитуда колебаний верха модели с основным гасителем составляет 1.05 см, что почти в 3 раза меньше [15, 16], чем ее амплитуда без гасителя (3.1 см). При этом максимальные амплитуды верха модели с гасителем, которые до и после прохождения через резонанс были примерно равны по величине, соответствовали частотам 2.5 Гц и 3.3 Гц, почти симметрично расположенным отностительно резонансной частоты модели без гасителя (2.86 Гц). Следует отметить, что до прохождения через резонанс гаситель работал софазно с моделью, а после прохождения через резонанс – в противофазе. При этом амплитуда колебаний основного гасителя была примерно в 3÷4 раза больше амплитуды колебаний верха модели. Записывались также и свободные колебания основного гасителя, имеющего оптимальную настройку (рис. 4б). Определенный по этой записи коэффициент затухания основного гасителя был равен ξ=0.7%.

По окончании испытания модели с основным гасителем к перекрытию последнего была подвешена вторая масса, и, тем самым, гаситель из одномассового был преобразован в двухмассовый. Вторая масса гасителя могла набираться грузами, укладываемыми в металлический ящик, имеющий размеры 30x40x10 см и массу 10 кг. Металлический ящик был подвешен к перекрытию основного гасителя посредством стержней из круглой стали диаметром 8 мм и длиною 30 см. Внешний вид подвешенной второй массы показан на рис. 5. Настройка, или иными словами подбор оптимальной величины второй массы, производилась аналогично настройке основного гасителя. При оптимальной настройке подвешенная вторая масса гасителя оказалась равной 40 кг, а парциальная частота собственных колебаний 2.65 Гц. Относительные массы и настройки двухмассового гасителя соответственно были равны:

$$\upsilon_Г = \frac{m_{Г1}+m_{Г2}}{M_м} = \frac{360+40}{9x720} = 0.0617;$$

$$f_1^2 = 1.0;\ f_2^2 = 0.93;\ \ \upsilon_2 = \frac{m_{Г2}}{m_{Г1}} = \frac{40}{360} = 0.11.$$

При этом общая масса двухмассового гасителя получилась на 11% больше одномассового.

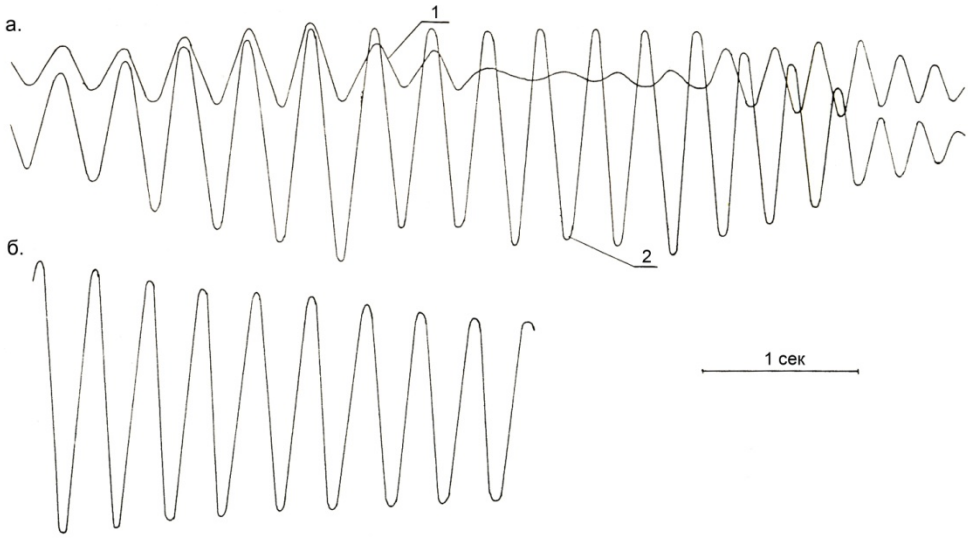


Рисунок 4. Фрагменты записей колебаний на уровне верха 9-этажной модели с одномассовым гасителем (1) и колебаний на уровне верха гасителя (2) при динамическом нагружении, создаваемом вибромашиной (а), а также фрагмент записи свободных колебаний одномассового гасителя (б)

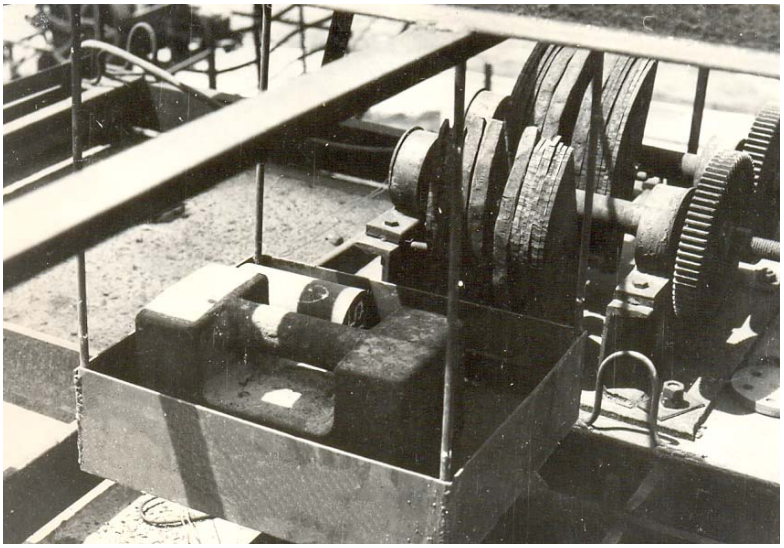


Рисунок 5. Фрагмент верхней части 9-этажной модели с видом подвешенной к основному гасителю второй массы, создаваемой грузами, уложенными в металлический ящик

После настройки полученной системы гасителя были сделаны контрольные записи колебаний модели с двухмассовым гасителем, опять же, при гармоническом воздействии с переменной частотой. Записи этих колебаний приведены на рис. 6. По этим записям, а также по записям, показанным на рис. 4, были построены амплитудно-частотные характеристики модели (рис. 7). Из полученных результатов видно, что двухмассовый гаситель эффективнее одномассового, так как коэффициент гашения при двухмассовом гасителе достигает примерно 4.4, что на 46.7% больше по сравнению с одномассовым. Кроме того, примерно на 50% расширяется зона гасимых частот. Эти результаты получились даже несколько большими, чем ожидаемые.

Из сравнения рис. 4 и 6 видно, что амплитуды колебаний одномассового основного гасителя значительно уменьшились. Если до подвески к нему второй массы максимальная амплитуда одномассового гасителя составляла примерно 3.5 см, то после подвески второй массы она оказалась равной 1.4 см. Запись свободных колебаний двухмассового гасителя показала, что его коэффициент затухания ξ=1,75%, что в 2.5 раза больше по сравнению с одномассовым. Увеличение коэффициента затухания двухмассового гасителя объясняется, по-видимому, взаимовлиянием основного и подвешенного к нему второго гасителей, обусловленным перераспределением энергии при колебаниях. Таким образом, при гармонических колебаниях, возбуждаемых вибрационной машиной, была выявлена более высокая эффективность двухмассового гасителя по сравнению с одномассовым.

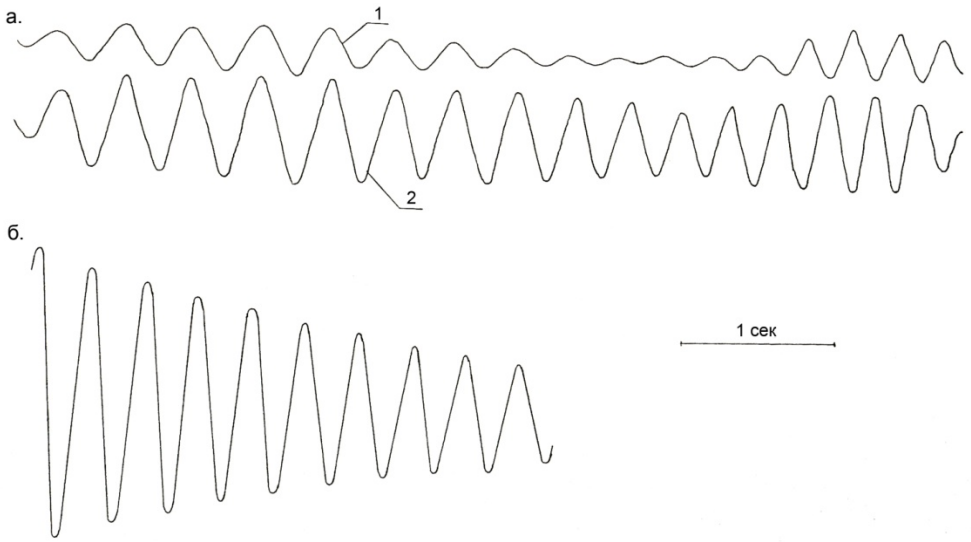


Рисунок 6. Фрагменты записей колебаний на уровне верха 9-этажной модели с двухмассовым гасителем (1) и колебаний на уровне верха гасителя (2) при динамическом нагружении, создаваемом вибромашиной (а), а также фрагмент записи свободных колебаний двухмассового гасителя (б)

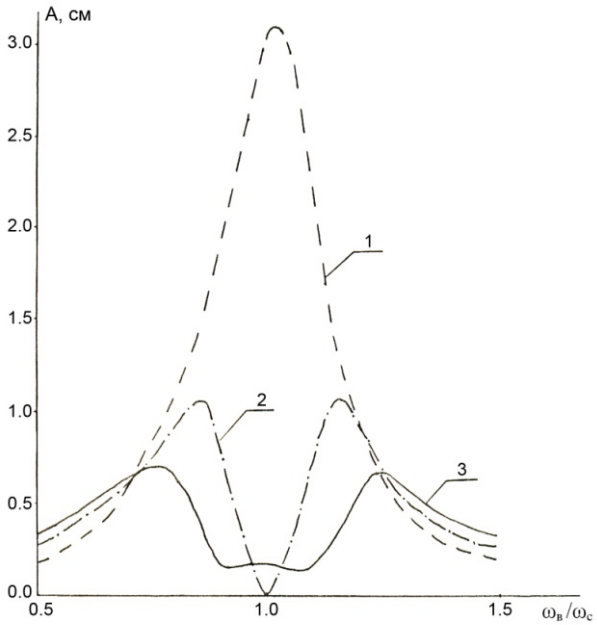


Рисунок 7. Амплитудно-частотные характеристики 9-этажной модели без гасителя (1), с одномассовым гасителем (2) и с двухмассовым гасителем колебаний (3)

Резюмируя изложенное выше, можно констатировать, что проведенные экспериментальные исследования подтверждают достаточно высокую эффективность динамических гасителей колебаний и бесспорную целесообразность их применения для повышения сейсмостойкости зданий и сооружений [17, 18]. Решение вопроса о применении того или иного типа гасителя в зависимости от количества масс (одно-, двух- или многомассового) или в зависимости от конструктивной схемы (ГВЭ или ИВЭ и др.) в верхней части реальных зданий зависит от многих факторов. К ним можно отнести:

- этажность;
- конструктивное решение и техническое состояние зданий;
- обстоятельства, ограничивающие перемещения гасителя;
- необходимость устройства гасителя при продолжении эксплуатации зданий;
- необходимость эксплуатации пространства, образуемого внутри самого гасителя;
- экономичность гасителя и много других факторов.

Литература

1. Nawrotzki P. Strategies for the Seismic Protection of Structures // Proceedings of the 8th World Seminar on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Active Vibration Control of Structures. Yerevan, Armenia, 2003. Pp. 48-58.
2. Palazzo B., Petti L., De Luliis M. A Passive Robust Control Strategy: Base Isolation and Tuned Mass Damping // Proceedings of the 3rd European Conference on Structural Control. Vienna, Austria, 2004. Pp. 51-210.
3. Taniguchi T., Der Kiureghian A., Melkumyan M. Effect of Tuned Mass Damper on Displacement Demand of Base-Isolated Structures // Engineering Structures. 2008. No. 12, Vol. 30. Pp. 3478-3488.
4. Fujitani H., Saito T. Devices for Seismic Isolation and Response Control // Response Control and Seismic Isolation of Buildings. Taylor & Francis, 2006. Pp. 193-248.
5. Melkumyan M. G. Dynamic Tests of the 9-story R/C Full-scale Building with an Additional Isolated Upper Floor Acting as Vibration Damper // Proceedings of the 3rd European Conference on Structural Dynamics: EURODYN'96, Florence, Italy, 1996. Vol. 1. Pp. 557-560.
6. Мелкумян М. Г. Опыт применения современных систем сейсмозащиты // Трагедия Спитака не должна повториться. Ереван: Воскан Ереванци, 1998. С. 193-205.
7. Melkumyan M. G. Base and Roof Isolation for Earthquake Retrofitting and Protection of Existing Buildings in Armenia // Proceedings of the International Symposium on Seismic Risk Reduction (the JICA Cooperation Project in Romania). Bucharest, Romania, 2007. Pp. 593-600.
8. Melkumyan M. G. New Solutions in Seismic Isolation. Yerevan: LUSABATS, 2011. 264 p.
9. Мелкумян М. Г. Формирование динамических расчетных моделей при анализе сейсмической реакции железобетонных зданий и их новые конструктивные решения. Ереван: Ереван, 1993. 100 с.
10. Назаров А. Г. О механическом подобии твердых деформируемых тел. Ереван: Изд-во Академии Наук Арм. ССР, 1965. 218 с.
11. Minassian A. Ts., Melkumyan M. G., Khachian E. E. Testing of 9-storey Frame-panel Building (series 111) Having a Seismic Protection System in the Form of an Additional Flexible Upper Floor Acting as Vibration Damper // Abstracts of the International Conference "Continental Collision Zone Earthquakes and Seismic Hazard Reduction". Yerevan-Sevan, Armenia, 1993. Pp. 60-61.
12. Коренев Б. Г., Резников Л. М. Расчет сооружений, оборудованных динамическими гасителями колебаний // Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика. М.: Стройиздат, 1981. С. 149-175.
13. Yoshizumi F., Sano K-i., Inoue H. Optimum Robust Design for Multi-TMD Systems Composed of a Few Dampers // Proceedings of the 3rd World Conference on Structural Control. Como, Italy, 2003. Vol. 3. Pp. 735-740.
14. Warburton G. Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1982. No. 10. Pp. 381-401.
15. Makino A., Imamiya J., Sahashi N. High-rise Building Seismic Vibration Control Using Large Tuned Top-floor Mass Damper // Proceedings of the JSSI 15th Anniversary International Symposium on Seismic Response Controlled Buildings for Sustainable Society. Tokyo, Japan, 2009. Paper RC-15. Pp. 42-51.
16. Shooshtari A., Afzali H. Effects of TMD System on 15-story R/C Frame Response under Ground Excitation // Proceedings of the 14th European Conference on Earthquake Engineering. Ohrid, Republic of Macedonia, 2010. Paper No. 797.
17. Chang K-Ch., Hwang J-Sh., Wang Sh-J. Applications of Seismic Isolation and Energy Dissipation Systems to Buildings in Taiwan // Proceedings of the JSSI 15th Anniversary International Symposium on Seismic Response Controlled Buildings for Sustainable Society. Tokyo, Japan, 2009. Paper OS-7. Pp. 42-51.
18. Dorka U. E. Towards a Safety Concept for Buildings with Structural Control // Proceedings of the 3rd International Workshop on Structural Control. Paris, France, 2000. Pp. 127-140.

** Микаел Григорьевич Мелкумян, Ереван, Армения*

Тел. моб.: (37491)94-54-02; эл. почта: mmelkumi@yahoo.com

© Мелкумян М.Г., 2012

Обоснование надежности гидроагрегатных блоков высоконапорных ГЭС

К.т.н., начальник отдела расчетных обоснований сооружений Г.Л. Козинец*,
ОАО «Ленгидропроект»

Ключевые слова: гидроагрегатный блок; пространственная математическая модель; конечно-элементный анализ; многослойная модель; стальная оболочка; рабочая арматура; надежность

История вопроса

На протяжении всего развития гидроэнергетики особое место отводилось формированию теоретической базы и методов обоснования параметров и режимов работы гидроагрегатных блоков. В этой связи следует отметить труды Н.В. Арефьева, В.Г. Айвазьяна, В.В. Болотова, Ю.С. Васильева, В.И. Виссарионова, А.А. Морозова, М.П. Федорова, Д.С. Щавелева и других гидроэлектроэнергетиков [1]-[8]. На кафедре Использования водной энергии под руководством Ю.С. Васильева в Политехническом институте еще с конца 70-х годов прошлого века успешно решались задачи по обоснованию параметров объектов гидроэнергетики на ЭВМ ЕС1022. Именно тогда была заложена основа математического моделирования уникальных гидроэнергетических объектов с использованием компьютерной техники.

В России в настоящее время для расчета высоконапорных гидроагрегатных блоков используется ряд документов. В 1984 г. принято «Пособие по проектированию сталежелезобетонных конструкций гидротехнических сооружений» П-780-83/Гидропроект, в котором приводится методика расчета высоконапорных водоводов и спиральных камер, примеры расчета, принципиальные схемы армирования. В 1988 г. введены в действие СНиП 2.06.08-87 и «Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций гидротехнических сооружений (без предварительного напряжения)» П-46-89/ВНИИГ, разработан стандарт РАО «ЕЭС России» (СТО РАО «ЕЭС России» 1733282.27.14.02-2008).

Гидротехнические сооружения ГЭС и ГАЭС. Условия создания. Нормы и требования

По действующим нормам проектирования математическое моделирование гидроагрегатных блоков осуществляется в плоской постановке для осесимметричной задачи. Этот способ моделирования получил распространение в конце 70-х годов прошлого столетия, когда в практику расчетов вошел метод конечных элементов, реализованный в программных продуктах для ЭВМ. До сих пор этот способ моделирования в России является определяющим, хотя он уже давно отстал от возможностей современных универсальных программных комплексов конечно-элементного анализа.

Вместе с тем использование конечно-элементного анализа делает возможным исследование объектов без создания их макета, путем построения и решения задачи для математической модели, адекватной реальному сооружению. Это позволяет уменьшить период проектирования, материальные расходы и оптимизировать геометрические параметры конструкции в соответствии с основными критериями прочности [9]. Сегодня в России, так же как в Европе и Америке, есть все возможности для выполнения уникальных пространственных расчетных моделей [10]-[22]. Эти возможности реализуются в ведущих проектных организациях, таких как Мосгидропроект, ВНИИГ, канадская фирма Лавалин, где численный анализ выполняется на основе объемной параметрической геометрической модели, и на основе общего напряженного состояния модели подбираются площади расчетного армирования. Такой подход дает картину трещинообразования, но при этом не моделируется стальная оболочка и арматура водопроводящего тракта. Следует заметить, что российские нормативные документы не регламентируют детальное моделирование водопроводящих трактов высоконапорных ГЭС, работающих в условиях нелинейного поведения материала. Согласно российским нормам, расчет сталежелезобетонного элемента сводится к определению суммарного нормального усилия в данном элементе из условия разделения усилия между стальной оболочкой и арматурой: $N_{\Sigma} = N_{cm} + N_a$, N_{Σ}, N_{cm}, N_a – суммарное усилие, усилие в стальной оболочке, усилие в арматуре соответственно.

Суммарное усилие в элементе определяется по котельной формуле:

$$N_{\Sigma} = q \cdot r \,, \tag{1}$$

где q, r – давление воды, радиус трубы соответственно.

Котельную формулу для нормальных напряжений растяжения, испытывающих давление изнутри при наступлении предельного состояния в оболочке, можно представить в виде:

$$\sigma = q \cdot r / \delta \,, \tag{2}$$

где σ – суммарные нормальные напряжения растяжения, δ – суммарная толщина стальной оболочки и арматуры.

Площадь расчетной кольцевой арматуры сталежелезобетонных водоводов вычисляется по формуле:

$$A_s \geq \frac{N_{\Sigma} \cdot \gamma_{lc} \cdot \gamma_n - \gamma_c \cdot \gamma_s \cdot A_{si} \cdot R_{si}}{\gamma_c \cdot \gamma_s \cdot R_s} \,, \tag{3}$$

где R_{si} , R_s – *расчетные сопротивления стали оболочки и арматуры соответственно;* $\gamma_{lc}, \gamma_n, \gamma_c, \gamma_s$ – коэффициенты сочетаний нагрузок, условий работы, надежности по назначению для класса сооружения, условий работы арматуры соответственно; A_s , A_{si} – *расчетное сечение арматуры и стальной оболочки соответственно;* N_{Σ} – суммарное усилие в элементе.

Расчет арматуры выполняется из условия достижения в стальной оболочке предельного состояния по пределу текучести. Такой расчет целесообразно выполнять на начальной стадии проектирования и только для водоводов.

В нормах компании РусГидро предпринята попытка учета бетонной оболочки при моделировании турбинных водоводов. При этом, чтобы получить напряжения в стальной оболочке, рекомендуется снизить начальный модуль упругости бетона (E_o) в продольном направлении по сравнению с модулем упругости бетона в радиальном направлении (E_r) в 7-8 раз. Таким образом, бетон водовода наделяется ортотропными свойствами. В этом случае условно моделируется наличие продольных (вдоль оси водовода) трещин. Напряжения в бетоне при таком моделировании снижаются, и по уровню пониженных напряжений выполняется расчет усилий в арматуре:

$$N_a = \frac{\left|\sigma_{низ} + \sigma_{верх}\right|}{2} \cdot h \,, \tag{4}$$

где $\sigma_{низ}$ и $\sigma_{верх}$ – напряжения низа и верха сечения бетонной оболочки; h – толщина бетонной оболочки.

Предлагаемая нормами РусГидро схема моделирования является приближенной, так как снижение модуля упругости на фиксированную величину достаточно условно. Кроме того, такая схема применима лишь для турбинных водоводов, а пространственные блоки спиральных камер не входят в условия данной схематизации и остаются не охваченными.

По нормам РусГидро в модель включается бетонная оболочка, и площадь расчетной кольцевой арматуры сталежелезобетонных водоводов вычисляется по формуле:

$$A_s \geq \frac{N_{\Sigma} \cdot \gamma_{lc} \cdot \gamma_n}{\gamma_c \cdot \gamma_s \cdot R_s} \,. \tag{5}$$

При задании ортотропных свойств бетона напряжения в стальной оболочке вычисляются самостоятельно, площадь арматуры напрямую зависит от того, во сколько раз уменьшен модуль упругости бетона. Подобное моделирование выполняется на следующей стадии проектирования и применимо только для водоводов.

В ОАО «Ленгидропроект» реализован принципиально новый подход к построению модели. Суть этого метода заключается в подробном многослойном моделировании всех несущих элементов водопроводящих трактов. Этот способ позволяет еще на этапе проектирования получить расчетные толщины стальной оболочки и площади арматуры из условия одновременного достижения в оболочке и рабочей арматуре предельных состояний стали.

Постановка задачи пространственного моделирования объекта – гидроагрегатного блока

Построение пространственной численной математической модели на основе предварительного изучения объекта исследования (гидроагрегатного блока), уточнение его физических характеристик, расчетный анализ модели, сопоставление результатов расчетов напряжений и деформаций с данными натурных наблюдений объекта, корректировка параметров модели – все это составляет содержание метода пространственного моделирования.

Следует заметить, что математическая расчетная модель – это уменьшенная копия реального объекта, имеющая численную аппроксимацию в виде конечного числа элементов, обладающих реальными физическими свойствами и граничными условиями.

Точная математическая модель полностью замещает объект в ходе исследования. Сущность метода моделирования основывается на принципе аналогии (верификации) или возможности изучения реального объекта не непосредственно, а через рассмотрение подобной ему модели.

Математическое пространственное моделирование позволяет исследовать объект с различных позиций, отображая при этом все несущие элементы гидроагрегатного блока.

Выделим важнейшие из этих позиций:

- целостность объекта как физической системы, т.е. наличие у системы всех физических свойств, присущих каждому из составляющих элементов гидроагрегатного блока;
- задание в модели статических и кинематических граничных условий, которые обеспечивают соответствие модели реальному объекту;
- постоянный контроль реального объекта при учете влияния новых факторов эксплуатации и природных воздействий;
- калибровка или коррекция модели на появляющиеся новые факторы.

Выделенные позиции усложняют процесс моделирования, однако их учет необходим для решения практических задач по определению количественной и качественной оценки прочности и надежности объекта.

Особенностью пространственного численного моделирования является одновременный учет ряда факторов, влияющих на напряженно-деформируемое состояние объекта.

Адекватность модели – условное понятие, так как полного соответствия модели реальному объекту быть не может, что особенно характерно для уникальных гидротехнических объектов. При моделировании имеется в виду не просто копия, а соответствие натурным показателям, которые считаются существенными для исследования. Без такой проверки получение результатов моделирования неэффективно.

Всесторонний анализ выявляемых расхождений между физическим объектом и моделью, сопоставление результатов по модели с результатами натурных наблюдений помогают выработать пути коррекции моделей.

Рассмотрим общую схему процесса моделирования (см. рис.1), состоящую из четырех следующих этапов.

1. Сбор исходных данных об объекте – физической системе. Любая модель замещает оригинал в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, характеризующих его с разной степенью детализации (блок параметрических моделей).

2. На втором этапе следует процесс построения численной математической модели, и модель выступает как самостоятельный объект исследования. Конечным результатом этого этапа является определение напряженно-деформированного состояния модели с учетом всех отраженных в данной модели факторов.

3. Третий этап заключается в соответствии модели оригиналу. При этом результат решения задачи прочности должен соответствовать данным натурных наблюдений или быть адекватным с разумной погрешностью.

4. На четвертом этапе осуществляются практическая проверка полученных результатов и их использование для оценки состояния реального объекта и его целенаправленного преобразования. В итоге мы снова возвращаемся к проблематике объекта-оригинала.

Из этого следует, что моделирование представляет собой циклический процесс, т. е. за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте постоянно расширяются и уточняются, а первоначально построенная модель калибруется и совершенствуется. Другими словами проводится верификация модели.

Перечисленные этапы математического моделирования находятся в тесной взаимосвязи, и могут иметь место возвратные связи этапов. Так, на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи или противоречива, или приводит к слишком сложной математической модели; в этом случае исходная постановка задачи должна быть скорректирована. Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает на этапе подготовки исходной информации при проектировании объекта.

Гидроагрегатные блоки имеют ограниченный срок службы и подлежат модернизации, поэтому их жизненный цикл разделен на два основных этапа.

На этапе проектирования объекта расчетное обоснование выполняется по действующим нормам проектирования, из условия задания проектных нагрузок и начальных физических характеристик материалов. На этапе эксплуатации необходима адаптация математической расчетной модели к фактическим условиям работы, с учетом периода эксплуатации сооружения, с заданием изменившихся физических характеристик материала и возникающих непроектных нагрузок.

При обосновании прочности сооружений в процессе эксплуатации необходимо учитывать ряд новых факторов, таких как:

- трещинообразование в бетоне;
- непроектное воздействие температур;
- пульсационная и вибрационная нагрузки;
- изменение физических характеристик материала;
- коррозионный износ конструкций;
- непроектные режимы эксплуатации ГТС;
- корректировка сейсмической нагрузки.

Следует заметить, что физическая система в процессе эксплуатации претерпевает следующие основные модификации:

1) природные и аварийные воздействия;
2) замену оборудования;
3) ремонт и модернизацию;
4) пересмотр правил и условий эксплуатации.

Рисунок 1. Основные шаги численного моделирования сооружения

Построение модели гидроагрегатного блока

Пространственная численная модель гидроагрегатного блока строится из условия физических особенностей материалов в новой схеме построения модели, основанной на включении в модель многослойных элементов с различными параметрами. При этом численное моделирование основано на совместной работе всех составляющих элементов водопроводящего тракта, с привлечением аппарата общей трехмерной теории напряжений и деформаций. Учет физической нелинейности материалов реализован с помощью математического описания диаграмм деформирования бетона и стали, с применением шагово-итерационного метода Ньютона-Рафсона. Алгоритм пространственного моделирования водопроводящих трактов гидроагрегатных блоков можно представить в следующем виде.

1. Бетонное тело разбивается на объемные конечные элементы. Элементы бетона задаются со свойствами нелинейности.
2. Армокаркас моделируется плоскими многослойными элементами с приведенными слоями, эквивалентными кольцевой и торовой арматуры заданной жесткости.
3. Стальная оболочка моделируется плоскими однослойными элементами.
4. Оборудование моделируется распределенными точечными элементами заданной массы.
5. Моделируется зазор (при наличии мягкой прокладки) между стальной оболочкой и бетоном, исследуется НДС оболочки и бетона, результат сопоставляется с натурными данными.
6. Исследуется НДС оболочки и арматуры в условиях образования трещин в бетоне, результат сопоставляется с натурными данными.

Алгоритм пространственного моделирования справедлив как для турбинных водоводов, так и для блоков спиральных камер.

Модель турбинного водовода изображена на рис. 2.

При послойном моделировании учтены все составляющие водовода:

- стальная оболочка толщиной δ_{cm}, радиусом трубы *r;*
- защитный слой бетона с ортотропными свойствами, заданный из условия трещинообразования;
- приведенный слой внутренней кольцевой арматуры;
- приведенный слой внутренней торовой арматуры;
- внутренний слой бетона с ортотропными свойствами, заданный из условия трещинообразования;
- приведенный слой наружной кольцевой арматуры;
- приведенный слой наружной торовой арматуры;
- защитный слой бетона с ортотропными свойствами, заданный из условия трещинообразования.

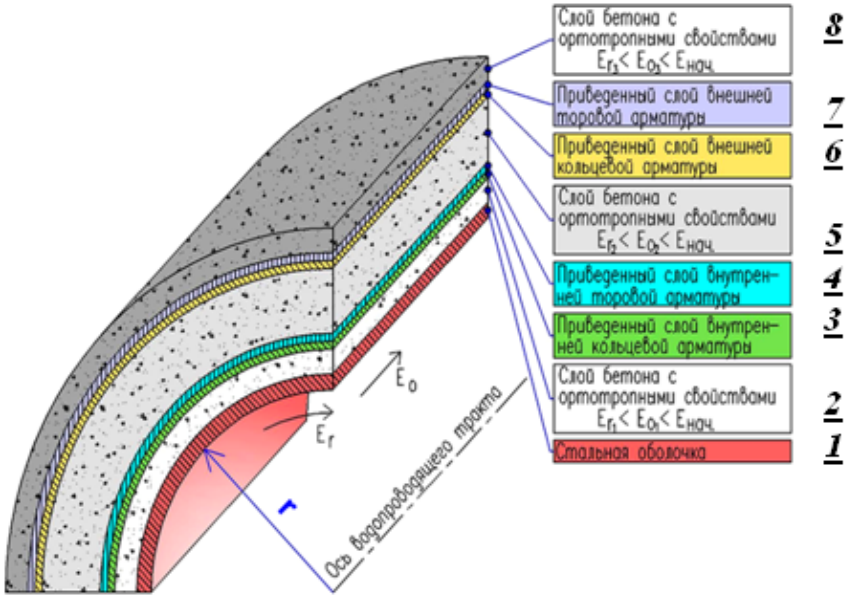


Рисунок 2. Модель турбинного водовода

Модель сегмента спиральной камеры представлена на рис. 3. При послойном моделировании учтены все составляющие блока спиральной камеры:

1) стальная и оболочка толщиной $\delta_{ст}$, радиусом трубы *r;*
2) защитный слой бетона с ортотропными свойствами, заданный из условия трещинообразования;
3) приведенный слой внутренней кольцевой арматуры;
4) приведенный слой внутренней торовой арматуры;
5) защитный слой бетона с ортотропными свойствами, заданный из условия трещинообразования;
6) объемный бетон блока спиральной камеры без трещин.

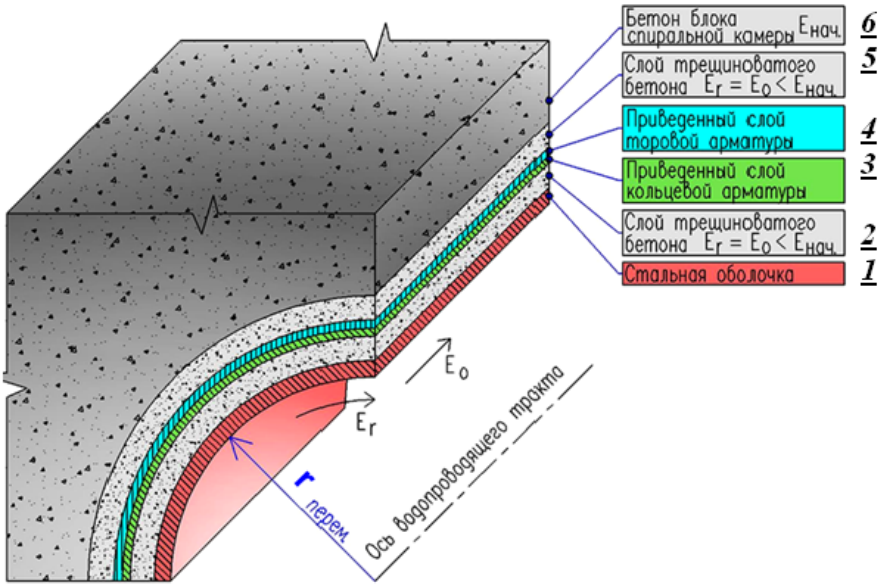


Рисунок 3. Модель сегмента спиральной камеры

Обоснование надежности высоконапорного водопроводящего тракта на примере гидроагрегатного блока Саяно-Шушенской ГЭС

Расчетные исследования представлены на примере гидроагрегатного блока Саяно-Шушенской ГЭС. Построение расчетной математической модели основано на имеющемся проектном материале, действующих нагрузках на сооружение, данных контрольно-измерительной аппаратуры, при учете температурных воздействий.

1. Достигнуто полное геометрическое и физическое соответствие модели реальному сооружению.
2. Конечно-элементная модель гидроагрегатного блока включает стальную оболочку водопроводящего тракта, арматурные слои, гидротурбинное оборудование (см. рис. 4).
3. Статические граничные условия заданы по нижней грани грунтового массива.
4. Бетон агрегатного блока отделен от плотины температурным швом 50 мм.
5. Взаимодействие между плотиной и зданием ГЭС осуществлено через стальную оболочку водовода и общее грунтовое основание.

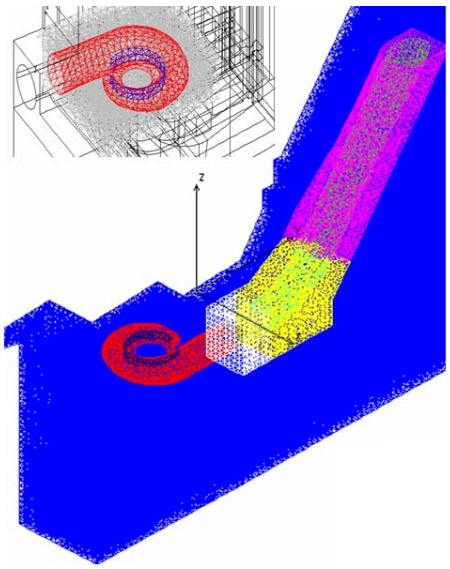


Рисунок 4. Объемная конечно-элементная модель гидроагрегатного блока

Обоснование параметров нижней части турбинного водовода гидроагрегатного блока представлено на рис. 5. Напор при гидроударе задан 298 м.

На базе нового метода моделирования водопроводящего тракта, выполненного на основании проектных и натурных данных, заданы многослойные элементы, соответствующие внешним и внутренним слоям кольцевой арматуры и стальной оболочки. В результате расчета с учетом гидравлического удара получены напряжения в арматуре и стальной оболочке (см. рис. 5). Выполнен анализ прочности конструкции и обоснованы параметры турбинного водовода.

Сравнительный анализ результатов расчета эксплуатируемого объекта – турбинного водовода Саяно-Шушенской ГЭС – показал:

1) площадь кольцевой расчетной арматуры по методике многослойного моделирования в 1,6 раза меньше, чем площадь арматуры по инженерному расчету и по нормам расчета компании РусГидро;
2) напряженное состояние металла оболочки выше, чем в кольцевой арматуре, в 1,1 раза;
3) предельного состояния металл оболочки и металл кольцевой арматуры достигнет одновременно, что указывает на выполнение принципов метода предельных состояний.

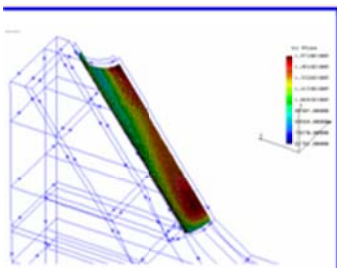
	Инженерный расчет СНИП $A_s \geq \frac{N_\Sigma \cdot \gamma_k \cdot \gamma_n - \gamma_c \cdot \gamma_s \cdot A_{s1} \cdot R_{s1}}{\gamma_c \cdot \gamma_s \cdot R_s}$ $N_\Sigma = q \cdot r$	Модель МКЭ		
		Нормы Рус-Гидро, зарубежные стандарты		Пространственное Моделирование
		$A_s \geq \frac{N_a \cdot \gamma_k \cdot \gamma_n}{\gamma_c \cdot \gamma_s \cdot R_s}$ $N_a = \frac{\lvert \sigma_{min} + \sigma_{max} \rvert}{2} \cdot h$		Многослойные элементы
		Ен	Ен / к	
Внутреннее кольцевое армирование, F см²	184,6	409,79	137,33	153,92
σ во внутр. кольцевой арматуре, МПа	$\sigma_s \geq \frac{\gamma_c \cdot \gamma_s \cdot R_s}{\gamma_k \cdot \gamma_n} = 224 МПа$			144,4
Внешнее кольцевое армирование, F см²	-	196,71	112,67	113,08
σ во внешн. кольцевой арматуре, МПа	-	224,0		102,9
Стальная оболочка, F см²	250			
σ в стальной оболочке, МПа	266,6	71,98	232,21	157,1

Рисунок 5. Обоснование параметров турбинного водовода СШГЭС

Выводы

1. Предложен новый способ моделирования водопроводящих трактов в составе высоконапорных гидроагрегатных блоков.

2. Способ многослойного моделирования предполагает получение расчетных напряжений всех элементов водопроводящего тракта в трехмерной модели.

3. Многослойное моделирование при рациональном подборе параметров модели необходимо для численной оценки распределения напряжений между стальной оболочкой и арматурой.

4. Одновременное достижение предельного состояния металла оболочки и кольцевой арматуры позволит обеспечить выполнение критериев прочностной надежности водопроводящего тракта и гидроагрегатного блока в целом.

Литература

1. Арефьев Н. В., Соколов Б. А. Расчет гидравлического удара явным методом конечных разностей // Труды ЛПИ. Вып. 361, 1978. С. 30-32.
2. Васильев Ю. С., Кубышкин Л. И. Компьютерные технологии проектирования гидроэнергетических объектов // Энергетика, гидротехника. Сб.научных трудов. Труды СПбГТУ №475. Изд-во СПбГТУ, 1998. С. 30-42.
3. Васильев Ю. С. Основы и методы расчетов оптимальных параметров водопроводящих сооружений ГЭС // Автореферат на соискание ученой степени доктора технических наук. Л., 1973. 31 с.
4. Гвоздев А. А., Карпенко Н. И. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 2. С. 20 – 23.
5. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. М.:Стройиздат, 1996. 416 с.
6. Карпенко Н. И., Карпенко С. Н. О построении более совершенной модели деформировании железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // II Всероссийская (Международная) конференция по бетону и железобетону «Бетон и железобетон – пути развития». 5-9 сентября, 2005, Москва. С. 431-444.
7. Балан Т. А., Клованич С. Ф. Определяющие соотношения для бетона при сложном, непропорциональном нагружении и нагреве // Строительная механика и расчет сооружений. 1987. №2. С. 39-44.
8. Клованич С. Ф., Мироненко И. Н. Расчет железобетонных конструкций на основе теории пластичности бетона // Збірник наукових статей «Дороги і мости». Київ: ДерждорНДІ. 2006. Вип. 6. С. 43-54.
9. Козинец Г. Л. Алгоритм расчета сталежелезобетонных водоводов // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6 (24). С. 41-49.
10. Козинец Г. Л. Определение динамических характеристик сооружений, контактирующих с водой на примере арочной плотины Саяно-Шушенской ГЭС // Инженерно-строительный журнал. 2011. №5(23). С. 43-48.
11. Прокопович И. Е., Зедгенидзе В. А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
12. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
13. Мурашев В. И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона. М.: Машстройиздат, 1958. 268 с.
14. Городецкий А. С., Здоренко В. С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1975. Вып. 57. С. 59-66.
15. Бидный Г. Р., Клованич С. Ф., Осадченко К. А. Расчет железобетонных конструкций при сложном нагружении методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. №5. С. 22–26.
16. Кишиневская Е. В., Ватин Н. И., Кузнецов В. Д. Перспективы применения нанобетона в монолитных большепролетных ребристых перекрытиях с постнапряжением // Инженерно-строительный журнал. 2009. №2(4). С. 54-58.
17. Mangold G. D. Entrapped or empowered by technology? The implementation and implications of computer technologies for agriculture // Resource. 1995. Vol. 2. №5. Pp. 9-11.
18. Sasowsky K. C., Gardner T. W. Watershed configuration and geographical information systems parameterization for SPUR model for hydrologic simulations // Water Resour. Bull. 1991. №7(1). Pp. 7-18.
19. Ventura S.J., Chrisman N. R., Connors K., Gurda R. F., and Martin R. W. A land information system for soil érosion control planning // J.Soil Water Conserv. 1988. No. 43. Pp. 230-233.
20. Cervenka V. Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels Under Inplane Loads: Ph.D….dis / Dept. Civ. Eng. Univ. Colorado. Bouder, 1970. 20 p.
21. Cervenka V. Constitutive Models for Cracked Reinforced Concrete // ACI Journal. 1985. Vol. 82. №6. Pp. 877–882.
22. Darwin D., Pecknold D. A. Nonlinear Biaxial Stress-Strain Low for Concrete // J. Eng. Mech. Div. ASCE. 1977. Vol. 103. EM2. Pp. 229–241.

** Галина Леонидовна Козинец, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812)395-23-79; эл. почта: galina4410@yandex.ru

© Козинец Г.Л., 2012

Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы

Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов*,
НИУ Московский энергетический институт

Ключевые слова: ферма; погрешность монтажа; износ узлов; индукция; прогиб; Maple

Ценность точных аналитических решений задач для строительных и инженерных конструкций не вызывает сомнения. Такие решения, существующие еще до широкого распространения численных методов, позволяющих рассчитать напряженное и деформированное состояние достаточно сложных систем, были и остаются важным инструментом для исследователя, расчетчика и проектировщика. К сожалению, таких решений, во-первых, немного, во-вторых, они, как правило, имеют сравнительно узкое применение. В частности, для ферм, входящих во многие конструкции и как основной, и как вспомогательный элемент, существующие точные решения не содержат важный изменяемый параметр – число панелей или стержней, – и записываются для какого-либо конкретного числа, существенно уменьшая общность и, тем самым, ценность решения. Некоторые известные аналитические решения, справедливые для произвольного числа стержней, обычно сильно упрощают модель фермы, грубо оценивая работу решетки, и являются, по сути, приближенными (часто полуэмпирическими). С появлением систем компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, Maxima и др.) появилась возможность на основе индуктивного метода не только найти точные решения для произвольного числа панелей, но и с их помощью оценить более тонкие явления. Например, можно исследовать влияние неточности позиционирования узлов или дефектов жесткости стержней на усилия в стержнях и прогиб всей конструкции в целом. Такая задача все чаще встречается в практическом и теоретическом проектировании [1-10]. В данной работе на иллюстративном примере получены некоторые зависимости, показывающие возможности метода индукции.

Ферма

Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму с треугольной решеткой. Не уменьшая общности, примем четное число панелей (число стержней верхнего пояса) $2n$. Нагрузку приложим в середине пролета. Расчет усилий в стержнях проведем по программе [11-13], написанной для Maple применительно к пространственным фермам и вполне применимой также для плоских ферм. Для расчета в программе необходимо задать координаты шарниров (узлов), описать структуру фермы (задать номера концов стержней) и нагрузку.

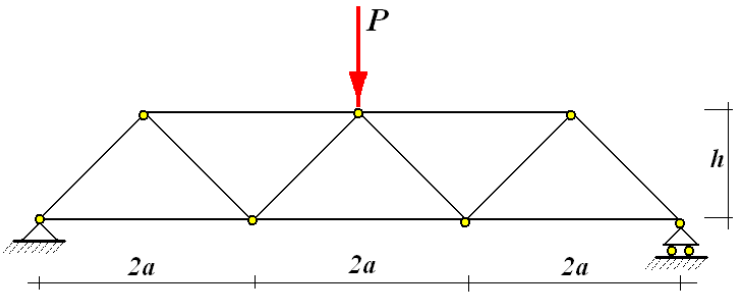


Рисунок 1. Схема фермы, $n=1$

Прогиб

Программа, в которую заложен метод вырезания узлов, определяет усилия S_i, $i=1,...,m$ в $m=8n+3$ стержнях фермы и реакции опор. Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора [14]:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^2 l_i}{EF}=\frac{A_1a^3+A_2(a^2+h^2)^{3/2}}{2h^3EF},$$

где $A_1 = 2n(8n^2 + 12n + 7)/3 + 1,\ A_2 = 2n - 1$. Коэффициенты A_1 и A_2 получены методом индукции. Для этого при вычислении прогиба фермы последовательно при $n = 1, 2, 3....$ выписывалась последовательность коэффициентов при a^3: 19, 85, 231, 489, 891, 1469, 2255, 3281. Затем в пакете **genfunc** системы Maple [8-11] применялась функция **rgf_findrecur,** возвращающая рекуррентное уравнение 4-го порядка:

$$A_1(n) = 4A_1(n-1) - 6A_1(n-2) + 4A_1(n-3) - A_1(n-4).$$

Решение этого уравнения можно найти с помощью оператора **rsolve**. Одновременно выписывались коэффициенты при $(a^2 + h^2)^{3/2}$. Но они устроены проще. Это нечетные числа, и зависимость $A_2 = 2n - 1$ определяется сразу без использования Maple.

Рассмотрим случай, когда один из шарниров имеет некоторое отклонение координат от расчетных значений. Это может произойти в результате погрешности монтажа или неточности изготовления стержней. Пронумеруем узлы фермы, принимая номера узлов нижнего пояса $1, \ldots, 2(n+1)$, верхнего – $2n+3, \ldots, 4n+3$. Изучим вариант, когда такое отклонение имеет только один узел (рис. 2):

$$x_j = x_{j0} + \varepsilon\cos\varphi, \quad y_j = y_{j0} + \varepsilon\sin\varphi, \tag{1}$$

где x_{j0}, y_{j0} – проектные значения координат узла *j*; ε, φ – величина и направление смещения.

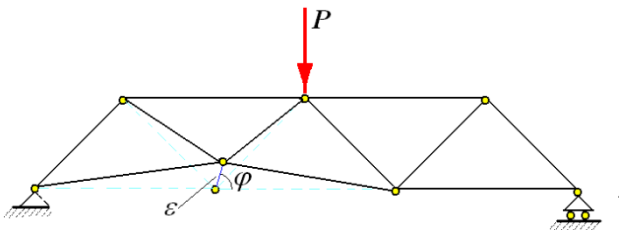


Рисунок 2. Ферма, $n = 1,\ j = 2$

Находим прогиб фермы как функцию дефекта ε и отбрасываем в разложении этого выражения в ряд величины ε второго и более порядка малости. Получаем следующий результат: $\Delta_\varepsilon = \Delta + \varepsilon c_n$. Коэффициент c_n зависит от числа панелей. Рассмотрим случай дефекта узла, соседнего с левой опорой ($j = 2$). При $n = 1,\ 2$ имеем, соответственно:

$$c_1 = 3a^2\sin\varphi\left(6a + \sqrt{a^2 + h^2}\right)/(2h^3EF),$$

$$c_2 = 3\sin\varphi\left(6a^3 - h^2\sqrt{a^2 + h^2}\right)/(2h^3EF).$$

Для ферм с большим числом пролетов коэффициент c_n не меняется, $c_n = c_2,\ n > 2$. Такой же эффект наблюдается и при дефекте других узлов как нижнего, так и верхнего пояса (рис. 3). При вычислениях берем $P = 1$, а прогиб относим к жесткости, или, что то же, $EF = 1$. Наибольшие отклонения прогиба от расчетного значения получаются при смещении узла по вертикали: $\varphi = \pi/2,\ \varphi = 3\pi/2$.

При некоторых значениях коэффициент c_2 равен нулю (рис. 4, размеры даны в метрах). Из равенства $c_2 = 0$ получаем $a = h\sqrt{3}/3$ при $\sin\varphi \neq 0$. При таких размерах конструкции или близким к ним соотношениям высоты и длины панели отсутствует влияние дефекта или оно минимально.

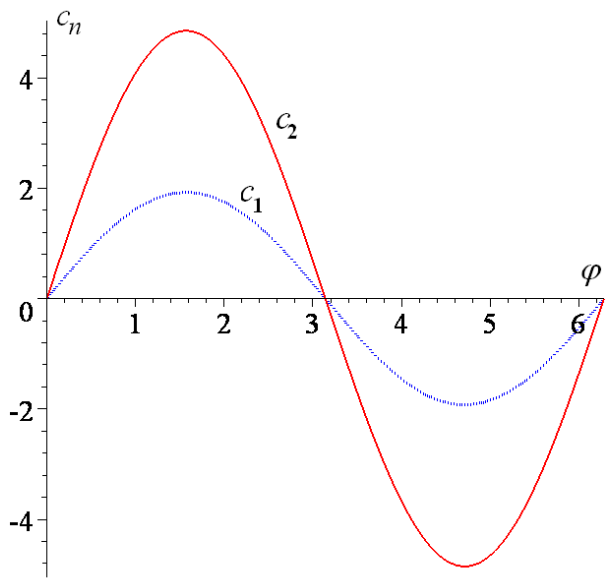


Рисунок 3. Зависимости дополнительных слагаемых от направления смещения узла

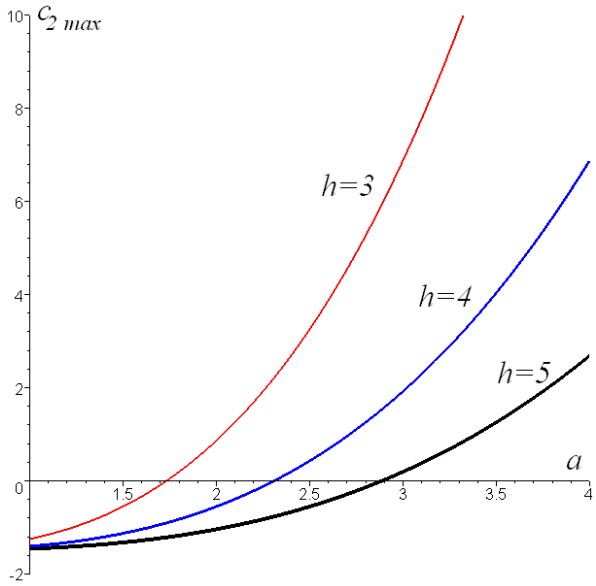


Рисунок 4. Обращение в нуль коэффициента $c_{2\max}$

Аналитическое выражение для прогиба позволяет провести исследование и по отношению к дефектам стержней фермы, влияющих на их жесткость. Пусть жесткость всех стержней одинакова и равна EF, а жесткость *j*-го стержня (отсчет ведется от левой опоры) нижнего пояса равна $EF(1+\varepsilon)$, где ε – малая безразмерная величина. Раскладываем прогиб фермы в ряд и, удерживая только линейный член, получаем $\Delta_{\varepsilon j} = \Delta + \varepsilon d_j$, где $d_j = -(2j-1)^2 a^3/(2h^2)$, $j \le n+1$. Аналогично, для стержней верхнего пояса поправочный коэффициент имеет вид: $d_j = -2j^2 a^3/h^2$, $j \le n+1$.

В обоих случаях погрешность растет в квадратичной зависимости от номера стержня, имея минимальное значение для крайних стержней и максимальное – в середине пролета. Качественный характер этого эффекта можно было предположить заранее, зная, что усилия в стержнях в середине пролета больше, чем с краю. Однако квадратичную зависимость выявляет лишь аналитический метод. Практический вывод очевиден: дефектный стержень с уменьшенной жесткостью выгоднее ставить с края пролета.

Экстремальные усилия

Определим влияние неточности монтажа на усилия сжатия стержней. Принимая прежнюю схему нагружения (сосредоточенная вертикальная сила в середине пролета, рис. 1), находим усилия в стержнях. Очевидно, максимально растянутый стержень будет в середине пролета в нижнем поясе и усилие его равно $S_{\max} = P(a/h)(k+1/2)$. Максимально сжатых стержней два. Они симметричны и находятся в верхнем поясе в середине пролета: $S_{\min} = -nPa/h$. На усилия в этих стержнях влияет только неточность установки узлов с номерами $3n+3$, $3n+2$ и $n+1$ и опорные узлы 1 и $2n+2$ (рис. 5). Усилия в стержнях решетки при заданной схеме нагружения не зависят от числа панелей. Для восходящих раскосов $S = -P\sqrt{a^2+h^2}/(2h)$, нисходящих – $S = P\sqrt{a^2+h^2}/(2h)$.

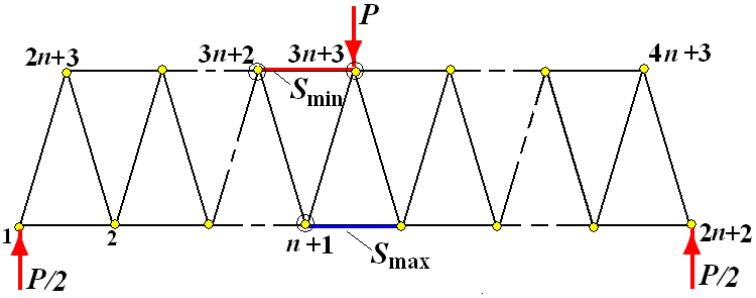


Рисунок 5. Номера возмущаемых узлов и стержни с экстремальными усилиями

Используя определение (1), где $j = 3n+3,\ 3n+2,\ n+1,$ представим усилия в отмеченных стержнях в виде $S^{j}_{\max,\varepsilon} = S_{\max} + (P\varepsilon / a)\tilde{S}^{j}_{\max}$, где верхний индекс означает номер узла, неточность установки которого исследуется. Имеем следующие выражения:

$$\tilde{S}^{3n+3}_{\min} = \frac{na}{2(2n+1)h^2}(2h\cos\varphi + (2n+1)a\sin\varphi), \quad \tilde{S}^{3n+3}_{\max} = -\frac{(2n+1)a^2}{2h^2}\sin\varphi,$$

$$\tilde{S}^{3n+2}_{\min} = \frac{na^2}{2h^2}\sin\varphi, \quad \tilde{S}^{3n+2}_{\max} = 0,$$

$$\tilde{S}^{n+1}_{\min} = -\frac{a}{2h^2}(h\cos\varphi + 2na\sin\varphi), \quad \tilde{S}^{n+1}_{\max} = \frac{(2n+1)a^2}{4h^2}\sin\varphi.$$

Зависимости добавочных слагаемых к усилию максимально сжатого стержня от направления смещения при возмущении положения трех отмеченных узлов для $n = 3,\ \ a = 3м,\ \ h = 4м$ отображены на рисунке 6. Очевидно, что наибольшее влияние на усилия оказывает положение среднего узла нижнего пояса, и это влияние возрастает с увеличением числа пролетов. В некоторых случаях при определенном сочетании размеров фермы числа пролетов и направления смещения узла величина ε не влияет на усилие. На рис. 7 представлены зависимости $\tilde{S}^{3n+3}_{\min}$ от длины a при $h = 6м,\ \ \varphi = 3\pi/4$. Пересечение кривой с координатной осью a как раз соответствует этому эффекту. Точное значение координаты определяется из равенства $\tilde{S}^{3n+3}_{\min} = 0$ и имеет вид $\operatorname{tg}\varphi = -nh/(a(2n+1))$. Аналогично можно проанализировать влияние других узлов на напряженное и деформированное состояние фермы.

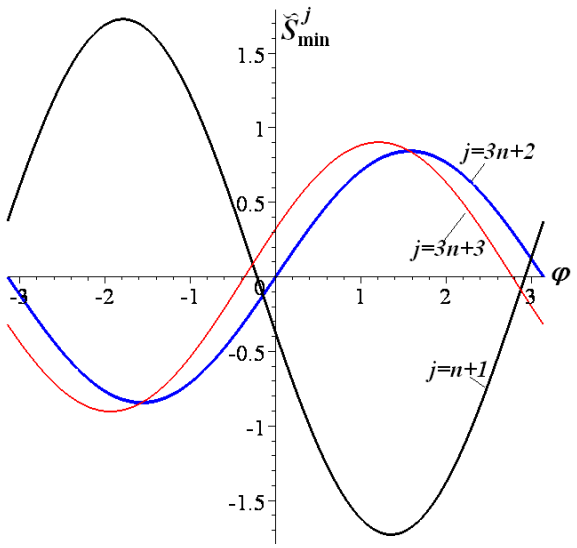


Рисунок 6. Добавочные слагаемые для сжатого стержня в зависимости от направления смещения

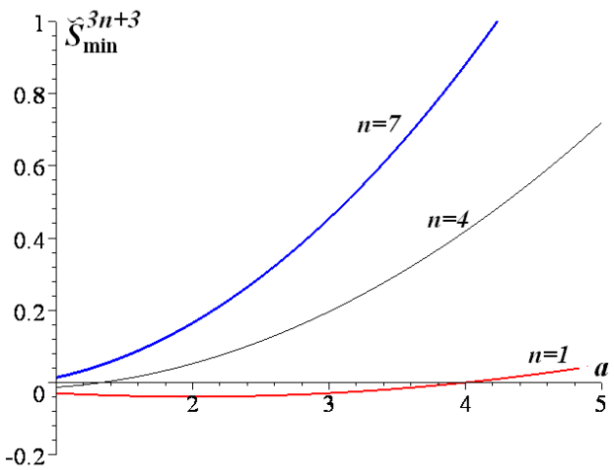


Рисунок 7. Обращение в нуль $\tilde{S}^{3n+3}_{\min}$ при некоторых a и n

Таким образом, на ряде примеров с модельной схемой фермы показаны возможности аналитического исследования напряженного состояния конструкции. Численные расчеты, пусть даже с применением совершенных пакетов, учитывающих многие факторы и обладающие высокой точностью счета, не могут дать ясную картину работы фермы [1-3]. Аналитические же исследования, опирающиеся на современные математические пакеты символьной математики (без которых некоторые закономерности найти невозможно), могут найти некоторые неочевидные особенности, как, например, найденное здесь свойство независимости погрешности определенного рода от числа панелей фермы: $c_n = c_2,\ n > 2$.

Литература

1. Ватин Н. И., Кузнецов В. Д., Недвига Е. С. Учет погрешности монтажа при расчете крупнопанельных зданий // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 35-40.
2. Куражова В. Г., Назмеева Т. В. Виды узловых соединений в легких стальных тонкостенных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 47-52.
3. Покровский А. А. Об учете жесткостей узлов в расчетах ферм с элементами малой гибкости // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. Т. 3. С. 31-33.
4. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitectured cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Vol. 85, №9. Pp. 607–617.
5. Fleck N. A. An overview of the mechanical properties of foams and periodic lattice materials // Symposium on Cellular Metals and Polymers. Fuerth. 12-14 October, 2004. Ed. R. F. Singer, Neue Materialien, Fuerth, Germany. Pp. 1-4.
6. Sofla A. Y. N., Elzey D. M., Wadley H. N. G. Shape morphing hinged truss structures // Smart Mater. Struct. 2009. Vol. 18. Pp. 1-8.
7. Sofla A. Y. N., Elzey D. M., Wadley H. N. G. A rotational joint for shape morphing space trusses // Smart Mater. Struct. 2007. Vol. 16. Pp. 77–84.
8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // J.Mech. Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Pp. 756-782.
9. Deshpande V. S., Fleck N. A., Ashby M. F. Effective properties of the octet-truss lattice material // J. Mech. Physics of Solids. 2001. Vol. 49. Pp. 1747 – 1769.
10. Лихтарников Я. М. Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
11. Кирсанов М. Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М. Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 28-34.
13. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53.
14. Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б. Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем / Под ред. В. Д. Потапова. М.: Высш. шк., 2007. 511 с.
15. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК-Пресс, 2011. 800 с.
16. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: ПаркКом, 2010. 644 с.
17. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 526 с.
18. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.
19. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

** Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия,*

Тел. раб.: +7(495)503-27-93; эл. почта: mpei2004@yandex.ru

© Кирсанов М.Н., 2012

Геометрически нелинейные математические модели термоползучести оболочек переменной толщины

К.т.н., доцент В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Ключевые слова: оболочки переменной толщины; ребристые оболочки; термоупругость; геометрическая нелинейность; поперечные сдвиги; ползучесть

Оболочки как элементы разного рода конструкций широко применяются в различных областях техники и строительства.

Тонкостенные элементы современных конструкций в виде оболочек предназначены для работы под воздействием механических нагрузок (как статических, так и динамических) и нередко температурного поля, обуславливающего появление чисто температурных деформаций.

Для придания в нужных местах большей жёсткости профиль тонких оболочек может иметь плавные утолщения. С целью повышения жёсткости тонкостенная часть оболочки может быть подкреплена дискретно расположенными рёбрами. В обоих случаях существенно повышается несущая способность конструкции при незначительном увеличении её массы.

Таким образом, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной толщины. В зависимости от характера изменения толщины будем различать оболочки гладко-переменной и, соответственно, ступенчато-переменной толщины (ребристые оболочки).

Известно, что тонкие оболочки могут допускать прогибы, соизмеримые с их толщиной (даже под воздействием нагрузок, далёких от критических значений).

Расчёты на прочность, устойчивость и колебания оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций переменной толщины, при котором проявляются геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, вязкоупругость (ползучесть) материала, переменность профиля и возникают чисто температурные деформации, исследовано недостаточно. Причины тому – сложность совместного учёта упомянутых факторов и необходимость решения громоздких нелинейных краевых задач.

Физические основы теплопроводности и термоупругости изложены в энциклопедическом курсе Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1]. Прикладные аспекты теории упругости и ползучести обстоятельно освещены в трудах Н.И. Безухова [2] и Н.Н. Малинина [3]. Вопросам расчётов различного рода конструкций на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур посвящена монография Н.И. Безухова и др. [4]. Анализ современного состояния теории оболочек, формулировка основополагающих принципов и построение модели термоупругих оболочек постоянной толщины приводится в весьма содержательной работе П.А. Жилина [5]. Современное состояние теории ребристых оболочек отражено в работах В.В. Карпова [6], а также зарубежных учёных И. Бискова, Дж. Хансена, Б. Чробота, С. Фишера, С. Берта, В. Койтера, Ю. Джиунченга, Р. Лижо, Дж. Маковски, В. Петрашкевича, Х. Стампфа и др. [7 -12].

Разработке математических моделей термоупругости оболочек переменной толщины для задач статики посвящены публикации В.В. Карпова и др. [6, 13]. Однако в статье [13] не учитываются поперечные сдвиги (используется модель Кирхгофа-Лява) и геометрическая нелинейность, а также не рассматриваются ребристые оболочки. В монографии [6] в задачах термоупругости (приведенных исключительно для ребристых оболочек) используется модель Кирхгофа-Лява при учёте геометрической нелинейности. В работе В.М. Жгутова [14] построена математическая модель термоупругости оболочек (как гладко-переменной, так и ступенчато-переменной толщины) для задач статики и динамики при учёте поперечных сдвигов (модель типа Тимошенко-Рейсснера) и геометрической нелинейности. Тем не менее, в работе [14] не учитывается возможность проявления ползучести материала при достаточно длительных нагрузках.

Математическому моделированию деформирования ребристых оболочек и оболочек гладко-переменной толщины при учёте различных свойств материала (нелинейная упругость, ползучесть и т.д.) посвящены работы В.М. Жгутова [15 – 18] и др., а также Р.А. Абдикаримова и В.М. Жгутова [19, 20]. Но в указанных работах не учитывается возможное влияние температурного поля на напряжённо-деформированное состояние и устойчивость исследуемых оболочек.

Проектирование и последующее создание лёгких, но вместе с тем прочных и надёжных, конструкций требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел, а также разработки новых интегральных методов их расчёта.

В связи с этим разработка более совершенной математической модели термоползучести оболочек является актуальной и важной задачей.

В настоящей статье предложены математические модели термоползучести оболочек переменной толщины (для задач статики и динамики), основанные на модели типа Тимошенко-Рейсснера (учитывающей поперечные сдвиги).

В случае ребристых оболочек учитывается также дискретность расположения рёбер, их ширина, сдвиговая и крутильная жёсткости.

Постановка задачи

Рассмотрим *тонкие* оболочки общего вида с краем (пологие на прямоугольном плане и вращения, в частности, цилиндрические, конические, сферические, торообразные, а также многие другие оболочки) [15].

Некоторую внутреннюю поверхность оболочки принимаем за отсчётную поверхность $x_3 = 0$. Координатные линии x_1 и x_2 криволинейной ортогональной системы координат ($-a/2 \le x_1 \le a/2$ и $-b/2 \le x_2 \le b/2$) направляем по линиям кривизны (параллелям и меридианам в случае поверхности вращения), а ось x_3 – по внутренней нормали отсчётной поверхности так, чтобы система координат x_1, x_2, x_3 была правой. (Полагаем, что определённая таким образом сеть координатных линий на отсчётной поверхности оболочки обеспечивает гладкость и регулярность её параметризации).

Дифференциалы длин дуг координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 определяем по формулам [15]:

$$dl_1 = H_1 \cdot dx_1,\ dl_2 = H_2 \cdot dx_2,\ dl_3 = H_3 \cdot dx_3 = dx_3,$$

где $H_1 = H_1(x_1, x_2)$, $H_2 = H_2(x_1, x_2)$, $H_3 \equiv 1$ – метрические коэффициенты Лямэ. При этом H_1 и H_2 зависят от вида оболочки. Например: $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ для пологих оболочек и пластин; $H_1 = const$ и $H_2 = H_2(x_1)$ в случае оболочек вращения.

Переменную толщину оболочки $\tilde{h} = \tilde{h}(x_1, x_2) \in C^k$ задаем ограничивающими её (в направлениях нормалей к отсчётной поверхности) гладкими (или ступенчато-гладкими) поверхностями $z_B = z_B(x_1, x_2)$ и $z_H = z_H(x_2, x_2)$ так, что $\tilde{h} = z_H - z_B$ и $z_B \le x_3 \le z_H$. (Принадлежность функции $f(x_1, x_2)$ классу гладкости C^k означает, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка $k \ge 1$ включительно; запись $f(x_1, x_2) \in C^0$ требует только непрерывности по совокупности аргументов). Полагаем, что векторы (ковекторы) градиентов $\overrightarrow{\nabla z_B}$ и $\overrightarrow{\nabla z_H}$ отличны от нуля и коллинеарны $\left(rang \begin{bmatrix} \partial z_B / \partial x_1 & \partial z_B / \partial x_2 \\ \partial z_H / \partial x_1 & \partial z_H / \partial x_2 \end{bmatrix} = 1 \right)$ в любой точке поверхности $x_3 = 0$.

Пусть $K_1 = K_1(x_1, x_2)$ и $K_2 = K_2(x_1, x_2)$ – главные кривизны отсчётной поверхности $x_3 = 0$ оболочки в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Отметим, в частности, что для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$; $0 \ne K_1 \equiv K_2 \equiv const$ для сферических и $K_1 \equiv 0 \ne K_2 \equiv const$ в случае цилиндрических оболочек вращения.

В случае ребристой оболочки за отсчётную поверхность $x_3 = 0$ принимаем срединную поверхность обшивки толщиной h. Рёбра задаем с помощью ступенчато-гладкой функции

$H = H(x_1, x_2) \in C^0$, характеризующей распределение рёбер по оболочке (как правило, с внутренней стороны обшивки вдоль координатных линий), их ширину и высоту (возможно переменные) [21, 22]. Таким образом, толщина ребристой оболочки равна $\widetilde{h} = h + H$, причем $z_B = -h/2$ и $z_H = h/2 + H$.

Считаем, что оболочка находится в стационарном температурном поле $T = T(x_1, x_2, x_3)$ $[K]$ и под действием механической нагрузки (статической или динамической) при определённом закреплении её края (контура).

Будем совместно учитывать геометрическую нелинейность, влияние температуры, нелинейную упругость (упругопластичность), поперечные сдвиги. В случае ребристых оболочек учитываем также дискретное расположение рёбер, их ширину, сдвиговую и крутильную жёсткости.

Математические модели термоползучести рассматриваемых оболочек

Как известно, математическая модель деформирования оболочки состоит из геометрических соотношений, физических соотношений и функционала полной энергии её деформации (из условия минимума которого следуют уравнения равновесия или движения).

Геометрические соотношения

Геометрические соотношения (зависимости деформаций от перемещений) в отсчётной поверхности $x_3 = 0$ с учётом геометрической нелинейности и влияния температуры имеют вид:

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} - \widetilde{\varepsilon}_0;\ \widetilde{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} - \widetilde{\varepsilon}_0;\ \widetilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \widetilde{\gamma}_{21}, \tag{1}$$

где ε_{11}, ε_{22} и $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ – деформации растяжения или сжатия вдоль линий x_1, x_2 и сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2) – составляющие геометрических соотношений (1), обусловленные исключительно механической нагрузкой; $\widetilde{\varepsilon}_0$ – чисто температурные деформации («температурные» составляющие).

Здесь:

$$\varepsilon_{11} = \frac{Du_1}{\partial l_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_1}\right)^2;\ \varepsilon_{22} = \frac{Du_2}{\partial l_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_2}\right)^2;\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{Du_2}{\partial l_1} + \frac{Du_1}{\partial l_2} + \frac{Du_3}{\partial l_1}\cdot\frac{Du_3}{\partial l_2}, \tag{2}$$

где $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ и $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ – компоненты вектора перемещений точек отсчётной поверхности вдоль координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 соответственно; $\dfrac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$ – операторы ковариантного дифференцирования по направлениям l_α произвольных полей (в частности, скалярного поля $a = a(x_1, x_2, x_3)$, векторного поля $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i \le 3$, поля тензора второго ранга $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i, k \le 3$ и т.д.).

Напомним, что операторы ковариантного (абсолютного) дифференцирования $\dfrac{D}{\partial l_\alpha}$ действуют по правилам [23, 24]:

$$a \mapsto \frac{Da}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_\alpha},$$

$$a_i \mapsto \frac{Da_i}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha} - \sum_{k=1}^{3} a_k \Gamma_{ik\alpha}$$

и, соответственно,

$$a_{ik} \mapsto \frac{Da_{ik}}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\alpha} - \sum_{l=1}^{3} (a_{lk}\Gamma_{il\alpha} + a_{il}\Gamma_{kl\alpha}),$$

где $\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{ik\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ – символы Кристоффеля (1-го рода), $1 \le i,k,\alpha \le 3$.

Как известно, символы Кристоффеля симметричны по крайним индексам при $k \ne i, k \ne \alpha$ ($\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{\alpha ki}$) и антисимметричны по первым двум индексам ($\Gamma_{ik\alpha} = -\Gamma_{ki\alpha}$), а потому величины $\Gamma_{ik\alpha}$ с разными значениями индексов равны нулю ($\Gamma_{ik\alpha} = 0$ при $i \ne k, i \ne \alpha, k \ne \alpha$). Это значит, что в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$ ненулевыми могут быть не более 12: $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik}$.

При этом $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik} = \frac{1}{H_i H_k} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \ln H_k}{\partial x_i}$, а те 12 из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$, которые в ортогональной криволинейной системе координат могут быть отличными от нуля, имеют вид:

$$\Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1};\ \Gamma_{133} = -\Gamma_{313} = 0;\ \Gamma_{211} = -\Gamma_{121} = \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2};\ \Gamma_{233} = -\Gamma_{323} = 0;$$

$$\Gamma_{311} = -\Gamma_{131} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = -K_1;\ \Gamma_{322} = -\Gamma_{232} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_2} = -K_2.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{Du_1}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_2 - K_1 \cdot u_3; & \frac{Du_1}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_2; \\ \frac{Du_2}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_1; & \frac{Du_2}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_1 - K_2 \cdot u_3; \\ \frac{Du_3}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_1 \cdot u_1; & \frac{Du_3}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2 \cdot u_2. \end{cases} \quad (3)$$

Введём обозначения:

$$\Theta_1 = \Theta_1(x_1, x_2) \equiv \frac{Du_3}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_1 \cdot u_1;\ \Theta_2 = \Theta_2(x_1, x_2) \equiv \frac{Du_3}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2 \cdot u_2. \quad (4)$$

Тогда с учётом выражений (3) и (4) составляющие от механической нагрузки (2) геометрических соотношений (1) принимают вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_2 - K_1 \cdot u_3 + \frac{1}{2}\Theta_1^2; \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_1 - K_2 \cdot u_3 + \frac{1}{2}\Theta_2^2; \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_2 + \Theta_1 \cdot \Theta_2. \end{cases} \quad (5)$$

В ряде случаев можно полагать, что в процессе деформирования

$$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} >> K_1 \cdot u_1;\ \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} >> K_2 \cdot u_2,$$

а значит,

$$\Theta_1 \approx \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1};\ \ \Theta_2 \approx \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$ и $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ (как было отмечено выше), а потому операторы ковариантного дифференцирования $\frac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$ совпадают с операторами обычного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ и составляющие (2), (5) от механической нагрузки геометрических соотношений (1) максимально упрощаются:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2;\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2;\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (6)$$

В соотношениях (2), (5) и (6) квадратичные члены характеризуют геометрическую нелинейность, которую следует учитывать в случаях, когда поперечные перемещения u_3 (прогибы) соизмеримы с толщиной оболочки $\tilde{h}$.

Деформации поперечных (также как и продольных) сдвигов не зависят от температуры [1, 14] и могут быть определены по формулам:

$$\gamma_{13} = c f(x_3)\Phi_1;\ \ \gamma_{23} = c f(x_3)\Phi_2.$$

Здесь $f(x_3)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{13} и τ_{23} в главных нормальных сечениях (dx_1, dx_3) и (dx_2, dx_3) оболочки, такая, что $f(z_B) = f(z_H) = 0$, $\frac{1}{\tilde{h}}\int_{z_B}^{z_H} f(x_3)dx_3 = 1$, $\frac{1}{\tilde{h}}\int_{z_B}^{z_H} f^2(x_3)dx_3 = 1/c$ (c – константа); $\Phi_1 = \Psi_1 + \frac{Du_3}{\partial l_1}$ и $\Phi_2 = \Psi_2 + \frac{Du_3}{\partial l_2}$ – полные углы сдвигов, где $\Psi_1 = tg\psi_1$ и $\Psi_2 = tg\psi_2$, причём $\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2)$ и $\psi_2 = \psi_2(x_1, x_2)$ – углы поворота отрезка нормали к отсчётной поверхности в соответствующих главных нормальных сечениях оболочки [14, 15].

В качестве $f(x_3)$ используем квадратичную зависимость [14, 15]:

$$f(x_3) = -\frac{6}{\tilde{h}^2}(x_3 - z_H)(x_3 - z_B) = f_0 + f_1 x_3 + f_2 x_3^2,$$

где $f_0 = -\frac{6 z_H z_B}{\tilde{h}^2}$; $f_1 = \frac{6(z_H + z_B)}{\tilde{h}^2}$ и $f_2 = -\frac{6}{\tilde{h}^2}$, и тогда $c = 5/6$.

Перемещения в слоях $x_3 = const$ вычисляем по формулам [14, 15]:

$$u_1^{(x3)} = u_1 + x_3\cdot\Phi_1,\ u_2^{(x3)} = u_2 + x_3\cdot\Phi_2,\ u_3^{(x3)} = u_3. \quad (7)$$

Отсюда для деформаций в слоях $x_3 = const$ получаем выражения:

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} = \tilde{\varepsilon}_{11} + x_3\cdot \mathrm{X}_1 = \varepsilon_{11}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon};\ \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} = \tilde{\varepsilon}_{22} + x_3\cdot \mathrm{X}_2 = \varepsilon_{22}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon};\ \gamma_{12}^{(x3)} = \gamma_{12} + x_3\cdot 2\mathrm{X}_{12}, \quad (8)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \alpha T$, $\varepsilon_{11}^{(x3)} = \varepsilon_{11} + x_3\cdot \mathrm{X}_1$ и $\varepsilon_{22}^{(x3)} = \varepsilon_{22} + x_3\cdot \mathrm{X}_2$.

Здесь α – коэффициент линейного теплового расширения материала $[K^{-1}]$;

T – температура оболочки в данной точке;

$$\mathrm{X}_1 \equiv \frac{D\Phi_1}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_2;$$

$$\mathrm{X}_2 \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_1;$$

$$2X_{12} \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_1} + \frac{D\Phi_1}{\partial l_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_2\right).$$

Считаем, что температурное поле $T(x_1, x_2, x_3)$ (определяемое из решения уравнения теплопроводности) задано и соответствует установившемуся тепловому режиму. Вдоль оси x_3 оно может быть представлено с помощью квадратичного закона распределения [14]:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + T_1(x_1, x_2)\cdot x_3 + T_2(x_1, x_2)\cdot x_3^2 = \sum_{i=1}^{3} T_{i-1.}\cdot x_3^{\,i-1} \tag{9}$$

или линейной зависимости, применимой для тонких оболочек:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + T_1(x_1, x_2)\cdot x_3 = \sum_{i=1}^{2} T_{i-1.}\cdot x_3^{\,i-1},$$

где $T_0 = T_0(x_1, x_2)$, $T_1 = T_1(x_1, x_2)$ и $T_2 = T_2(x_1, x_2)$ – известные функции.

В ряде случаев можно предполагать (равномерное температурное поле):

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2).$$

Известно, что для многих материалов при достаточно высоких или низких температурах модуль упругости E и коэффициент α заметно изменяются. В этом случае для вычисления их значений могут быть использованы аппроксимации [14]:

$$E = E(T) = E_0 + E_1 T + E_2 T^2 = \sum_{i=1}^{3} E_{i-1} T^{i-1}; \tag{10}$$

$$\alpha = \alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{j-1} T^{j-1}, \tag{11}$$

где E_0 и α_0 – некоторые «начальные» значения E и α; E_1, E_2 и α_1 – экспериментальные параметры.

Как правило, E_0 и α_0 (и, соответственно, коэффициенты E_1, E_2 и α_1) отвечают значению $T = 20^0 C$.

В большинстве случаев коэффициент Пуассона μ материала не зависит от изменений температуры в достаточно обширной температурной области.

С учётом представления (9) аппроксимации (10) и (11) могут быть записаны для каждой точки $P = P(x_1, x_2, x_3)$ оболочки в виде [14]:

$$E = E(P) = E(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{E}_0 + \widetilde{E}_1\cdot x_3 + \widetilde{E}_2\cdot x_3^{\,2} + \widetilde{E}_3\cdot x_3^{\,3} + \widetilde{E}_4\cdot x_3^{\,4} = \sum_{i=1}^{5} \widetilde{E}_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1}; \tag{12}$$

$$\alpha = \alpha(P) = \alpha(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{\alpha}_0 + \widetilde{\alpha}_1\cdot x_3 + \widetilde{\alpha}_2\cdot x_3^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{\alpha}_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1}. \tag{13}$$

Здесь $\widetilde{E}_0$, $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_3$, $\widetilde{E}_4$ и $\widetilde{\alpha}_0$, $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$ – суть функции точки $P_0 = P_0(x_1, x_2)$ отсчётной поверхности $x_3 = 0$ оболочки, подробные выражения для которых приведены в основном тексте работы [14].

Для чисто температурных деформаций $\widetilde{\varepsilon} = \alpha T$ с учётом выражений (12) и (13) будем иметь:

$$\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(P) = \alpha(P)T(P) = \widetilde{\varepsilon}_0 + \widetilde{\varepsilon}_1\cdot x_3 + \widetilde{\varepsilon}_2\cdot x_3^{\,2} + \widetilde{\varepsilon}_3\cdot x_3^{\,3} + \widetilde{\varepsilon}_4\cdot x_3^{\,4} = \sum_{i=0}^{5} \widetilde{\varepsilon}_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1}, \tag{14}$$

где

$$\widetilde{\varepsilon}_k = \widetilde{\varepsilon}_k(P_0) = \widetilde{\varepsilon}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\alpha}_i T_{k-i}, \quad 0 \le k \le 4 \tag{15}$$

суть коэффициенты при z^k (функции точки $P_0 = P_0(x_1, x_2)$) в представлении (14) (считаем, что $\widetilde{\alpha}_i = 0$ при $i > 2$ и $T_{k-i} = 0$ при $k - i > 2$).

В развернутом виде выражения (15) для функций $\widetilde{\varepsilon}_k$ в соотношении (14) приведены в приложении 1 работы [14].

Физические соотношения

Как известно, в настоящее время существует несколько теорий ползучести, каждая из которых применима для определённого круга материалов в зависимости от многих факторов.

Для металлов (ползучесть в которых развивается только при высоких температурах) обычно пользуются *теорией течения*, которая хорошо описывает ползучесть при напряжениях, изменяющихся монотонно и медленно, но основана на ярко выраженной нелинейной зависимости $d\varepsilon / dt = f(\sigma, t)$.

Более полное описание ползучести дает *теория упрочения*, согласно которой $d\varepsilon / dt = f(\sigma, d\varepsilon / dt)$. Теория упрочения правильно улавливает особенности ползучести при изменяющихся напряжениях и удобна для анализа кратковременной ползучести при высоком уровне напряжений, однако её применение связано с большими математическими трудностями.

В механике полимеров и для бетона широко используется линейный вариант *теории наследственности*, основанный на принципе суперпозиции деформаций и учитывающий историю напряжённого состояния.

В соответствии с линейной теорией наследственности физические соотношения для изотропного материала могут быть записаны в виде:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{22}^{(x3)} - \int_{t_0}^{t}(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{22}^{(x3)})R1(t,s)ds\right];$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{11}^{(x3)} - \int_{t_0}^{t}(\varepsilon_{22}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{11}^{(x3)})R1(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1-\mu)}\left[\gamma_{12}^{(x3)} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{12}^{(x3)}R2(t,s)ds\right]; \qquad (16)$$

$$\tau_{13} = \frac{E}{2(1-\mu)}\left[\gamma_{13} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{13}R2(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{23} = \frac{E}{2(1-\mu)}\left[\gamma_{23} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{23}R2(t,s)ds\right],$$

где $R1(t,s)$ и $R2(t,s)$ – функции влияния (ядра релаксации) материала при растяжении (или сжатии) и сдвиге соответственно, s – переменная интегрирования (имеющая смысл времени).

Для полимерных материалов и старого бетона функции влияния имеют вид соответственно:

$$R1(t,s) = R_1 \cdot \exp(-\beta_1 t)\cdot(t-s)^{\gamma_1 - 1},\ R2(t,s) = R_2 \cdot \exp(-\beta_2 t)\cdot(t-s)^{\gamma_2 - 1}; \qquad (17)$$

$$R1(t,s) = \eta E C_0 \exp\left[-\eta(1+EC_0)\cdot(t-s)\right],\ R2(t,s) = 2R_1(t,s)\cdot\frac{G}{E}, \qquad (18)$$

где R_1, R_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, η и C_0 – экспериментальные параметры; $G = E/2(1+\mu)$.

Весьма хорошо удовлетворяет опытным данным *теория упругоползучего тела* – линейный вариант наследственной теории, обобщённый на случай учёта процесса старения материала (в частности, бетона).

(Предполагается случай *простого нагружения*, при котором внешние силы возрастают пропорционально некоторому параметру (например, времени) или постоянны; тогда главные оси напряжённого состояния сохраняют свои направления в процессе деформирования в каждой точке).

Опыт показывает, что с ростом температуры вязкоупругие свойства материалов ещё более усиливаются.

В соответствии с теорией упругоползучего тела физические соотношения в случае вязкоупругого изотропного материала оболочки, находящейся в температурном поле, могут быть представлены в следующем виде.

Напряжения растяжения (или сжатия) в направлениях x_1 и x_2:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{11}^{E} - \tilde{\sigma}_{11}^{C} = \left(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MC}\right) - \left(\sigma^{TC} - \sigma^{TC}\right); \tag{19}$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\sigma}_{22}^{E} - \tilde{\sigma}_{22}^{C} = \left(\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{22}^{MC}\right) - \left(\sigma^{TE} - \sigma^{TC}\right). \tag{20}$$

Здесь:

1) $\tilde{\sigma}_{11}^{E}$, $\tilde{\sigma}_{22}^{E}$ – термоупругие составляющие напряжений растяжения или сжатия [14]:

$$\tilde{\sigma}_{11}^{E} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)}\right] = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{11}^{ME} - \sigma^{TE}; \tag{21}$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^{E} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)}\right] = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{22}^{ME} - \sigma^{TE}, \tag{22}$$

где $\sigma_{11}^{ME} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)\right]$, $\sigma_{22}^{ME} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)\right]$ – составляющие термоупругих напряжений растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (с той разницей, что входящий в их выражения модуль упругости $E = E(P)$ является зависящей от температуры в точке P величиной); $\sigma^{TE} = \frac{(1+\mu)\tilde{\sigma}(P)}{1-\mu^2}$ – составляющая термоупругих напряжений растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\tilde{\sigma}(P) = E(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P)$ вычисляем по формуле (25), приведённой ниже);

2) $\tilde{\sigma}_{11}^{C}$, $\tilde{\sigma}_{22}^{C}$ – термовязкоупругие составляющие напряжений растяжения:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{11}^{C} &= \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)}\right] = \\ &= \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{11}^{MC} - \sigma^{TC};\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{22}^{P} &= \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)}\right] = \\ &= \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{22}^{MC} - \sigma^{TC},\end{aligned} \tag{24}$$

где $\sigma_{11}^{MC} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)\right]$, $\sigma_{22}^{MC} = \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)\right]$ – составляющие термовязкоупругих напряжений растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (с той разницей, что входящие в их выражения модуль упругости $E = E(P)$ и функция влияния $R1(t,s,P)$ являются зависящими от температуры в точке P величинами); $\sigma^{TP} = \frac{(1+\mu)\tilde{\sigma}(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}$ – составляющая термопластических напряжений растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями.

В формулах (21) – (24)

$$\tilde{\sigma}(P) = E(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P) =$$
$$= \tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 x_3 + \tilde{\sigma}_2 x_3^{\ 2} + \tilde{\sigma}_3 x_3^{\ 3} + \tilde{\sigma}_4 x_3^{\ 4} + \tilde{\sigma}_5 x_3^{\ 5} + \tilde{\sigma}_6 x_3^{\ 6} + \tilde{\sigma}_7 x_3^{\ 7} + \tilde{\sigma}_8 x_3^{\ 8} = \sum_{i=1}^{9} \tilde{\sigma}_{i-1} x_3^{i-1}, \quad (25)$$

где

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k(P_0) = \tilde{\sigma}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{E}_i \cdot \tilde{\varepsilon}_{k-i} \ , \ 0 \le k \le 8 \quad (26)$$

(считаем, что $\tilde{E}_i = 0$ при $i > 4$, $\tilde{\varepsilon}_{k-i} = 0$ при $k - i > 4$) [8].

В развёрнутом виде выражения (26) для коэффициентов $\tilde{\sigma}_k$ в соотношении (25) представлены в приложении 2 работы [14].

Напряжения сдвигов в плоскостях (dx_1, dx_2) и (dx_1, dx_3), (dx_2, dx_3) имеют тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\tilde{\tau}_{12} = \tilde{\tau}_{12}^E - \tilde{\tau}_{12}^C \ ; \ \tilde{\tau}_{13} = \tilde{\tau}_{13}^E - \tilde{\tau}_{13}^C \ ; \ \tilde{\tau}_{23} = \tilde{\tau}_{23}^E - \tilde{\tau}_{23}^C \ . \quad (27)$$

Здесь:

1) $\tilde{\tau}_{12}^E$ и $\tilde{\tau}_{13}^E$, $\tilde{\tau}_{23}^E$ – термоупругие составляющие напряжений сдвига [14]:

$$\tilde{\tau}_{12}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^{(x3)} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right); \quad (28)$$

$$\tilde{\tau}_{13}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{13} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_1\right] = \frac{c\Phi_1\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \quad (29)$$

$$\tilde{\tau}_{23}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{23} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_2\right] = \frac{c\Phi_2\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \quad (30)$$

2) $\tilde{\tau}_{12}^P$ и $\tilde{\tau}_{13}^P$, $\tilde{\tau}_{23}^P$ – термовязкоупругие составляющие напряжений сдвига:

$$\tilde{\tau}_{12}^P = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^{(x3)} = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right); \quad (31)$$

$$\tilde{\tau}_{13}^E = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\gamma_{13} = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_1\right] = \frac{c\Phi_1 R2(t,s,P)\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \quad (32)$$

$$\tilde{\tau}_{23}^E = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\gamma_{23} = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_2\right] = \frac{c\Phi_2 R2(t,s,P)\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}. \quad (33)$$

В формулах (32) и (33):

$$\tilde{\tau}(P) = E(P)\cdot f(x_3) = \tilde{\tau}_0 + \tilde{\tau}_1 x_3 + \tilde{\tau}_2 x_3^{\ 2} + \tilde{\tau}_3 x_3^{\ 3} + \tilde{\tau}_4 x_3^{\ 4} + \tilde{\tau}_5 x_3^{\ 5} + \tilde{\tau}_6 x_3^{\ 6} = \sum_{i=1}^{7} \tilde{\tau}_{i-1} x_3^{\ i-1}, \quad (34)$$

где

$$\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_k(P_0) = \tilde{\tau}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{E}_i \cdot f_{k-i} \ , \ 0 \le k \le 6 \quad (35)$$

(считаем, что $\tilde{E}_i = 0$ при $i > 4$ и $f_{k-i} = 0$ при $k - i > 2$) [14].

В развёрнутом виде выражения (35) для коэффициентов $\tilde{\tau}_k$ в соотношениях (34) представлены в приложении 3 работы [14].

Проинтегрируем напряжения (19), (20), (27) по переменной x_3, $z_B \le x_3 \le z_H$. Получим следующие выражения для внутренних силовых факторов, приведённых к отсчётной поверхности оболочки (и приходящихся на единицу длины сечения, т.е. погонных).

Усилия растяжения или сжатия в направлениях x_1 и x_2:

$$\widetilde{N}_{11} = \widetilde{N}_{11}^{E} - \widetilde{N}_{11}^{C} = \left(N_{11}^{ME} - N_{11}^{MC}\right) - \left(N^{TE} - N^{TC}\right); \tag{36}$$

$$\widetilde{N}_{22} = \widetilde{N}_{22}^{E} - \widetilde{N}_{22}^{C} = \left(N_{22}^{ME} - N_{22}^{MC}\right) - \left(N^{TE} - N^{TC}\right). \tag{37}$$

Здесь:

1) $\widetilde{N}_{11}^{E}$, $\widetilde{N}_{22}^{E}$ – термоупругие составляющие усилий растяжения [14]:

$$\widetilde{N}_{11}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{E} dx_3 = I_1\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) - (1+\mu)\widetilde{N}(P_0) = N_{11}^{ME} - N^{TE}; \tag{38}$$

$$\widetilde{N}_{22}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{22}^{E} dx_3 = I_1\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) - (1+\mu)\widetilde{N}(P_0) = N_{22}^{ME} - N^{TE}, \tag{39}$$

где $N_{11}^{ME} = I_1\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right)$ и $N_{22}^{ME} = I_1\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$ – составляющие термоупругих усилий растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (величины $I_1 = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} E(P)dx_3$, $I_2 = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} E(P)x_3 dx_3$ вычисляем по формулам (57), (58), приведённым ниже); $N^{TE} = (1+\mu)\widetilde{N}^{E}(P_0)$ – составляющая термоупругих усилий растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\widetilde{N}^{E}(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P)dx_3$ вычисляем по формуле (59), приведённой ниже);

2) $\widetilde{N}_{11}^{C}$, $\widetilde{N}_{22}^{C}$ – термопластические составляющие усилий растяжения:

$$\widetilde{N}_{11}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{C} dx_3 = I_1^{C}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2^{C}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) - (1+\mu)\widetilde{N}^{C}(P_0) = N_{11}^{MC} - N^{TC}; \tag{40}$$

$$\widetilde{N}_{22}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{22}^{C} dx_3 = I_1^{C}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2^{C}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) - (1+\mu)\widetilde{N}^{C}(P_0) = N_{22}^{MC} - N^{TC}, \tag{41}$$

где $N_{11}^{MC} = I_1^{C}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2^{C}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right)$, $N_{22}^{MC} = I_1^{C}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2^{C}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$ – составляющие термопластических усилий растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке $\left(I_1^{C} = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} E(P)R1(t,s,P)dx_3,\ I_2^{P} = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} E(P)R1(t,s,P)x_3 dx_3\right)$; $N^{TP} = (1+\mu)\widetilde{N}^{C}(P_0)$ – составляющая термопластических усилий растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями $\left(\widetilde{N}^{C}(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P)R1(t,s,P)dx_3\right)$.

Усилие сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2) имеет тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\widetilde{N}_{12} = \widetilde{N}_{12}^{E} - \widetilde{N}_{12}^{C}. \tag{42}$$

Здесь:

1) $\widetilde{N}_{12}^{E}$ – термоупругая составляющая усилия сдвига [14]:

$$\widetilde{N}_{12}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{12}^{E} dx_3 = \mu_1 \left(I_1 \gamma_{12} + I_2 \cdot 2\mathrm{X}_{12} \right), \tag{43}$$

где $\mu_1 = (1-\mu)/2$;

2) $\widetilde{N}_{12}^{C}$ – термовязкоупругая составляющая усилия сдвига:

$$\widetilde{N}_{12}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{12}^{C} dx_3 = \mu_1 \left(\widehat{I}_1^{C} \gamma_{12} + \widehat{I}_2^{C} \cdot 2\mathrm{X}_{12} \right), \tag{44}$$

где $\widehat{I}_1^{C} = \dfrac{1}{1-\mu^2} \int_{z_B}^{z_H} E(P) R2(t,s,P) dx_3$, $\widehat{I}_2^{C} = \dfrac{1}{1-\mu^2} \int_{z_B}^{z_H} E(P) R2(t,s,P) x_3 dx_3$.

<u>Изгибающие моменты</u> вдоль линий x_1 и x_2:

$$\widetilde{M}_{11} = \widetilde{M}_{11}^{E} - \widetilde{M}_{11}^{C} = \left(M_{11}^{ME} - M_{11}^{MC} \right) - \left(M^{TE} - M^{TC} \right); \tag{45}$$

$$\widetilde{M}_{22} = \widetilde{M}_{22}^{E} - \widetilde{M}_{22}^{C} = \left(M_{22}^{ME} - M_{22}^{MC} \right) - \left(M^{TE} - M^{TC} \right). \tag{46}$$

Здесь:

1) $\widetilde{M}_{11}^{E}$, $\widetilde{M}_{22}^{E}$ – термоупругие составляющие изгибающих моментов [14]:

$$\widetilde{M}_{11}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{E} x_3 dx_3 = I_2 \left(\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22} \right) + I_3 \left(\mathrm{X}_1 + \mu \mathrm{X}_2 \right) - (1+\mu) \widetilde{M}(P_0) = M_{11}^{ME} - M^{TE}; \tag{47}$$

$$\widetilde{M}_{22}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{E} x_3 dx_3 = I_2 \left(\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11} \right) + I_3 \left(\mathrm{X}_2 + \mu \mathrm{X}_1 \right) - (1+\mu) \widetilde{M}(P_0) = M_{22}^{ME} - M^{TE}, \tag{48}$$

где $M_{11}^{ME} = I_2 \left(\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22} \right) + I_3 \left(\mathrm{X}_1 + \mu \mathrm{X}_2 \right)$, $M_{22}^{ME} = I_2 \left(\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11} \right) + I_3 \left(\mathrm{X}_2 + \mu \mathrm{X}_1 \right)$ – составляющие термоупругих изгибающих моментов, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (величину $I_3 = \dfrac{1}{1-\mu^2} \int_{z_B}^{z_H} E(P) x_3^{\,2} dx_3$ вычисляем по формуле (60), приведённой ниже); $M^{TE} = (1+\mu) \widetilde{M}^{E}(P_0)$ – составляющая изгибающих моментов, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\widetilde{M}^{E}(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2} \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P) x_3 dx_3$ вычисляем по формуле (61), приведённой ниже);

2) $\widetilde{M}_{11}^{C}$, $\widetilde{M}_{11}^{C}$ – термовязкоупругие составляющие изгибающих моментов:

$$\widetilde{M}_{11}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{C} x_3 dx_3 = I_2^{C} \left(\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22} \right) + I_3^{C} \left(\mathrm{X}_1 + \mu \mathrm{X}_2 \right) - (1+\mu) \widetilde{M}^{C}(P_0) = M_{11}^{MC} - M^{TC}; \tag{49}$$

$$\widetilde{M}_{22}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{C} x_3 dx_3 = I_2^{C} \left(\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11} \right) + I_3^{C} \left(\mathrm{X}_2 + \mu \mathrm{X}_1 \right) - (1+\mu) \widetilde{M}(P_0) = M_{22}^{MC} - M^{TC}, \tag{50}$$

где $M_{11}^{MC} = I_2^C(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) + I_3^C(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)$, $M_{22}^{MC} = I_2^C(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) + I_2^C(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)$ – составляющие термовязкоупругих изгибающих моментов, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке $\left(I_3^C = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} E(P)R1(t,s,P)x_3^{\,2}dx_3 \right)$; $M^{TP} = (1+\mu)\widetilde{M}^C(P_0)$ – составляющая изгибающих моментов, обусловленная чисто температурными деформациями $\left(\widetilde{M}^C(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P)R1(t,s,P)x_3dx_3 \right)$.

<u>Крутящий момент</u> вдоль касательной плоскости (dx_1, dx_2) имеет тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\widetilde{M}_{12} = \widetilde{M}_{12}^E - \widetilde{M}_{12}^C. \tag{51}$$

Здесь:

1) $\widetilde{M}_{12}^E$ – термоупругая составляющая крутящего момента [14]:

$$\widetilde{M}_{12}^E = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{12}^E x_3 dx_3 = \mu_1\left[I_2\gamma_{xy} + I_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right]; \tag{52}$$

2) $\widetilde{M}_{12}^C$ – термовязкоупругая составляющая крутящего момента:

$$\widetilde{M}_{12}^C = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{12}^C x_3 dx_3 = \mu_1\left(\widehat{I}_2^C\gamma_{12} + \widehat{I}_3^C \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right), \tag{53}$$

где $\widehat{I}_3^C = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} E(P)R2(t,s,P)x_3^{\,2}dx_3$.

<u>Поперечные усилия</u> в главных нормальных сечениях (dx_1, dx_3), (dx_2, dx_3) имеют тот же вид, что и при чисто механических деформациях:

$$\widetilde{Q}_{13} = \widetilde{Q}_{13}^E - \widetilde{Q}_{13}^C;\ \widetilde{Q}_{23} = \widetilde{Q}_{23}^E - \widetilde{Q}_{23}^C. \tag{54}$$

Здесь:

1) $\widetilde{Q}_{13}^E$ и $\widetilde{Q}_{23}^E$ – термоупругие составляющие поперечных сил [14]:

$$\widetilde{Q}_{13}^E = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{13}^E dx_3 = c\Phi_1 \cdot \widetilde{Q}(P_0);\ \widetilde{Q}_{23}^E = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{23}^E dx_3 = c\Phi_2 \cdot \widetilde{Q}(P_0), \tag{55}$$

где величина $\widetilde{Q}^E(P_0) = \frac{1}{2(1+\mu)}\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}(P)dx_3$ вычисляется по формуле (62), приведённой ниже;

2) $\widetilde{Q}_{13}^C$, $\widetilde{Q}_{23}^C$ – термопластические составляющие поперечных сил:

$$\widetilde{Q}_{13}^C = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{13}^C dx_3 = c\Phi_1 \cdot \widetilde{Q}^C(P_0);\ \widetilde{Q}_{23}^C = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{23}^C dx_3 = c\Phi_2 \cdot \widetilde{Q}^C(P_0), \tag{56}$$

где $\widetilde{Q}^P(P_0) = \frac{1}{2(1+\mu)}\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}(P)R2(t,s,P)dx_3$.

Приведём для величин, входящих в формулы (36) – (39), (42), (43), (45) – (52), (54), (55) некоторые расчётные соотношения, полученные в работе [14]:

$$I_1 = \frac{\sum_{m=1}^{5} \widetilde{E}_{m-1} A_{m-1}}{1-\mu^2} = \frac{\widetilde{E}_0 A_0 + \widetilde{E}_1 A_1 + \widetilde{E}_2 A_2 + \widetilde{E}_3 A_3 + \widetilde{E}_4 A_4}{1-\mu^2}; \tag{57}$$

$$I_2 = \frac{\sum_{m=1}^{5} \widetilde{E}_{m-1} A_m}{1-\mu^2} = \frac{\widetilde{E}_0 A_1 + \widetilde{E}_1 A_2 + \widetilde{E}_2 A_3 + \widetilde{E}_3 A_4 + \widetilde{E}_4 A_5}{1-\mu^2}; \tag{58}$$

$$\widetilde{N}^E(P_0) = \frac{\sum_{m=1}^{9} \widetilde{\sigma}_{m-1} A_{m-1}}{1-\mu^2} = \frac{\widetilde{\sigma}_0 A_0 + \widetilde{\sigma}_1 A_1 + \widetilde{\sigma}_2 A_2 + \widetilde{\sigma}_3 A_3 + \widetilde{\sigma}_4 A_4 + \widetilde{\sigma}_5 A_5 + \widetilde{\sigma}_6 A_6 + \widetilde{\sigma}_7 A_7 + \widetilde{\sigma}_8 A_8}{1-\mu^2}; \tag{59}$$

$$I_3 = \frac{\sum_{m=1}^{5} \widetilde{E}_{m-1} A_{m+1}}{1-\mu^2} = \frac{\widetilde{E}_0 A_2 + \widetilde{E}_1 A_3 + \widetilde{E}_2 A_4 + \widetilde{E}_3 A_5 + \widetilde{E}_4 A_6}{1-\mu^2}; \tag{60}$$

$$\widetilde{M}^E(P_0) = \frac{\sum_{m=1}^{9} \widetilde{\sigma}_{m-1} A_m}{1-\mu^2} = \frac{\widetilde{\sigma}_0 A_1 + \widetilde{\sigma}_1 A_2 + \widetilde{\sigma}_2 A_3 + \widetilde{\sigma}_3 A_4 + \widetilde{\sigma}_4 A_5 + \widetilde{\sigma}_5 A_6 + \widetilde{\sigma}_6 A_7 + \widetilde{\sigma}_7 A_8 + \widetilde{\sigma}_8 A_9}{1-\mu^2}; \tag{61}$$

$$\widetilde{Q}^E(P_0) = \frac{\sum_{m=1}^{7} \widetilde{\tau}_{m-1} A_{m-1}}{2(1+\mu)} = \frac{\widetilde{\tau}_0 A_0 + \widetilde{\tau}_1 A_1 + \widetilde{\tau}_2 A_2 + \widetilde{\tau}_3 A_3 + \widetilde{\tau}_4 A_4 + \widetilde{\tau}_5 A_5 + \widetilde{\tau}_6 A_6}{2(1+\mu)}. \tag{62}$$

Нам понадобится ещё одно выражение, приведённое в статье [14]:

$$N_1^E(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2} \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\pi}(P) dx_3 = \frac{\sum_{m=1}^{12} \widetilde{\pi}_{m-1} A_{m-1}}{1-\mu^2} = \frac{\left[\widetilde{\pi}_0 A_0 + \widetilde{\pi}_1 A_1 + \widetilde{\pi}_2 A_2 + \ldots + \widetilde{\pi}_{11} A_{11} + \widetilde{\pi}_{12} A_{12}\right]}{1-\mu^2}, \tag{63}$$

где

$$\widetilde{\pi}(P) = \widetilde{\sigma}(P) \cdot \widetilde{\varepsilon}(P) = \widetilde{\pi}_0 + \widetilde{\pi}_1 x_3 + \widetilde{\pi}_2 x_3^{\,2} + \ldots + \widetilde{\pi}_{11} x_3^{\,11} + \widetilde{\pi}_{12} x_3^{\,12} = \sum_{i=1}^{13} \widetilde{\pi}_{i-1} x_3^{\,i-1}, \tag{64}$$

причём

$$\widetilde{\pi}_k = \widetilde{\pi}_k(P_0) = \widetilde{\pi}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\sigma}_i \cdot \widetilde{\varepsilon}_{k-i}, \quad 0 \le k \le 12 \tag{65}$$

(считаем, что $\widetilde{\sigma}_i = 0$ при $i > 8$ и $\widetilde{\varepsilon}_{k-i} = 0$ при $k - i > 4$).

Выражения (65) для коэффициентов $\widetilde{\pi}_k$, входящих в соотношение (64), в развернутом виде приведены в приложении 4 работы [14].

В формулах (57) – (63) $A_{m-1} = \int_{z_B}^{z_H} x_3^{\,m-1} dx_3$, $1 \le m \le 12$ – геометрические характеристики главных нормальных сечений оболочки [14].

Функционал W полной энергии деформации

Функционал W полной энергии деформации рассматриваемых оболочек на данном отрезке $[t_0, t_1]$ времени t для задач динамики в соответствии с [5, 25, 26] имеет вид:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \widetilde{U} + A\right) dt, \tag{66}$$

где K и $\widetilde{U}$ – кинетическая и потенциальная энергии оболочки; A – работа внешних сил.

В задачах динамики подлежащие определению функции перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1, Ψ_2 являются не только функциями координат x_1, x_2, но и времени t: $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, t)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(x, y, t)$, $\Psi_2 = \Psi_2(x, y, t)$.

Для задач статики полная энергия деформации оболочки (функционал Лагранжа) может быть записана в виде [1, 2, 5 -26]:

$$W = \widetilde{U} - A. \tag{67}$$

В соотношениях (66) и (67):

$$K = \frac{\rho}{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(H_1\frac{\partial u_1^{(x3)}}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial u_2^{(x3)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(x3)}}{\partial t}\right)^2\right]d\Omega; \tag{68}$$

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[\widetilde{\sigma}_{11}\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \widetilde{\sigma}_{22}\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}\gamma_{23}]d\Omega; \tag{69}$$

$$A = \iint_{S}(P_1u_1 + P_2u_2 + qu_3)dS. \tag{70}$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки $(\rho \approx const)$; P_1, P_2 и $q \equiv P_3$ – компоненты внешней механической нагрузки в направлениях x_1, x_2 и x_3 (в задачах динамики – функции не только координат x_1 и x_2, но и времени t); $\Omega = [-a/2, a/2]\times[-b/2, b/2]\times[z_B, z_H]$ – компакт в пространстве (x_1, x_2, x_3); $S = [-a/2, a/2]\times[-b/2, b/2]$ – компакт на плоскости (x_1, x_2); $d\Omega$ и dS – дифференциалы объёма и отсчётной поверхности данной оболочки $(d\Omega = H_1H_2dx_1dx_2dx_3; dS = H_1H_2dx_1dx_2)$. (Координаты x_1, x_2, x_3 считаются неподвижными).

С учётом соотношений (8), (19), (20), (27) выражение для потенциальной энергии (69) запишем в виде:

$$\begin{aligned}\widetilde{U} &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[(\widetilde{\sigma}_{11}^E - \widetilde{\sigma}_{11}^C)\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + (\widetilde{\sigma}_{22}^E - \widetilde{\sigma}_{22}^C)\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + (\widetilde{\tau}_{12}^E - \widetilde{\tau}_{12}^C)\gamma_{12}^{(x3)} + \\ &+ (\widetilde{\tau}_{13}^E - \widetilde{\tau}_{13}^C)\gamma_{13} + (\widetilde{\tau}_{23}^E - \widetilde{\tau}_{23}^C)\gamma_{23}]d\Omega = \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[(\sigma_{11}^M - \sigma^T)(\varepsilon_{11}^{(x3)} - \widetilde{\varepsilon}) + (\sigma_{22}^M - \sigma^T)(\varepsilon_{22}^{(x3)} - \widetilde{\varepsilon}) + \widetilde{\tau}_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}\gamma_{23}]d\Omega = \\ &\widetilde{U}^E - \widetilde{U}^C = U^M - U^T.\end{aligned} \tag{71}$$

Здесь:

$$\widetilde{U}^E = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\widetilde{\sigma}_{11}^E\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \widetilde{\sigma}_{22}^E\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}^E\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}^E\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}^E\gamma_{23}\right)d\Omega; \tag{72}$$

$$\widetilde{U}^C = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\widetilde{\sigma}_{11}^C\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \widetilde{\sigma}_{22}^C\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}^C\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}^C\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}^C\gamma_{23}\right)d\Omega \tag{73}$$

суть термоупругая и термовязкоупругая составляющие потенциальной энергии (69) деформирования оболочки;

$$\begin{aligned}U^M &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\sigma_{11}^M\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^M\varepsilon_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}\gamma_{23}\right)d\Omega = \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[\begin{array}{l}(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MC})\varepsilon_{11}^{(x3)} + (\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{11}^{MC})\varepsilon_{22}^{(x3)} + \\ + (\widetilde{\tau}_{12}^E - \widetilde{\tau}_{12}^C)\gamma_{12}^{(x3)} + (\widetilde{\tau}_{13}^E - \widetilde{\tau}_{13}^C)\gamma_{13} + (\widetilde{\tau}_{23}^E - \widetilde{\tau}_{23}^C)\gamma_{23}\end{array}\right]d\Omega = \\ &= U^{ME} - U^{MC}\end{aligned} \tag{74}$$

является составляющей потенциальной энергии (69), имеющей тот же вид, что и при чисто механической нагрузке, а

$$U^T = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\sigma^T\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \left(\sigma_{11}^M + \sigma_{22}^M\right)\tilde{\varepsilon} + 2\sigma^T\tilde{\varepsilon}\right]d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left\langle \begin{array}{l} (\sigma^{TE} - \sigma^{TC})\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \\ \left[(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MC}) + (\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{22}^{MC})\right]\tilde{\varepsilon} + 2(\sigma^{TE} - \sigma^{TC})\tilde{\varepsilon} \end{array} \right\rangle d\Omega = \tag{75}$$

$$= U^{TE} - U^{TC}$$

имеет смысл составляющей потенциальной энергии (69), обусловленной чисто температурными деформациями.

В функционалах (74), (75) величины

$$U^{ME} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(\sigma_{11}^{ME}\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^{ME}\varepsilon_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12}^E\gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13}^E\gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23}^E\gamma_{23}\right)d\Omega,$$

$$U^{MC} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(\sigma_{11}^{MC}\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^{MC}\varepsilon_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12}^C\gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13}^C\gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23}^C\gamma_{23}\right)d\Omega$$

можно трактовать как термоупругую и термовязкоупругую составляющие энергии U^M, а величины

$$U^{TE} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\sigma^{TE}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \left(\sigma_{11}^{ME} + \sigma_{22}^{ME}\right)\tilde{\varepsilon} + 2\sigma^{TE}\tilde{\varepsilon}\right]d\Omega$$

$$U^{TC} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\sigma^{TC}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \left(\sigma_{11}^{MC} + \sigma_{22}^{MC}\right)\tilde{\varepsilon} + 2\sigma^{TC}\tilde{\varepsilon}\right]d\Omega$$

– как термоупругую и термовязкоупругую составляющие энергии U^T.

Проинтегрируем по переменной x_3, $z_B \le x_3 \le z_H$ выражения (68) и (69) в функционалах (66) и (67). В результате получаем следующие выражения:

$$K = \frac{\rho}{2}\iint_S \left\{ A_0\left[\left(H_1\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2A_1\left[H_1^2\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + H_2^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right] + A_2\left[\left(H_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)^2\right]\right\}dS \tag{76}$$

и, в частности,

$$W = \left(U^M - A\right) - U^T, \tag{77}$$

где, с учетом формулы (70),

$$U^M - A =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_S \left[N_{11}^M\varepsilon_{11} + N_{22}^M\varepsilon_{22} + N_{12}^M\gamma_{12} + M_{11}^M\mathrm{X}_1 + M_{22}^M\mathrm{X}_2 + 2M_{12}^M\mathrm{X}_{12} - 2(P_1u_1 + P_2u_2 + qu_3)\right]dS; \tag{78}$$

$$U^T = \frac{1}{2}\iint_S \left[2N^T\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) + 2M^T\left(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2\right) - 2N_1^T\right]dS. \tag{79}$$

В формулах (78) и (79) $N_{11}^M = N_{11}^{ME} - N_{11}^{MC}$; $N_{22}^M = N_{22}^{ME} - N_{22}^{MC}$; $N_{12}^M = N_{12}^{ME} - N_{12}^{MP}$; $M_{11}^M = M_{11}^{ME} - M_{11}^{MC}$; $M_{22}^M = M_{22}^{ME} - M_{22}^{MC}$; $N^T = N^{TE} - N^{TC}$; $M^T = M^{TE} - M^{TC}$; $N_1^T = (1+\mu)\left[(N_1^E(P_0) + N_1^C(P_0)\right]$, где величина $N_1^E(P_0)$ вычисляется по формуле (63), а $N_1^C(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H}\tilde{\pi}(P)R2(t,s,P)dx_3$.

Уравнения движения или равновесия оболочки могут быть получены, исходя из фундаментальных принципов наименьшего действия (в форме Гамильтона-Остроградского) или минимума потенциальной энергии (в форме Лагранжа) [1, 5, 6 – 26], согласно которым

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \widetilde{U} + A \right) dt = 0 \qquad (80)$$

или, соответственно,

$$\delta W = \delta(\widetilde{U} - A) = 0 ,$$

где δ – символ вариации.

Таким образом, математическая модель деформирования оболочек переменной толщины, находящихся под воздействием механической нагрузки и температурного поля, для задач статики и динамики построена. Начальные и граничные условия, соответствующие тому или иному способу закрепления контура оболочки, предполагаются заданными.

Предложенная математическая модель термоползучести (термовязкоупругости) может быть обобщена на иные случаи различных свойств материалов рассматриваемых оболочек (нелинейная упругость, ортотропия и др.).

В задачах статики для отыскания минимума функционала (67), записанного с учётом выражений (68) – (79), может быть эффективно применён метод Ритца при разложении искомых функций перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1 и Ψ_2 в ряды.

В задачах динамики для решения системы уравнений движения оболочки, эквивалентной вариационному уравнению (80), целесообразно последовательно применить методы Власова-Канторовича и Рунге-Кутта.

Как отмечалось в работах [14, 15], если априори считать функции перемещений u_1, u_2, u_3 компонентами потенциального вектора (что, очевидно, почти всегда выполняется, поскольку возможные локальные повороты, нарушающие симметрию деформаций сдвига, не искажают картину деформированного и напряжённого состояния оболочки), то в этом случае мы имеем:

$$\frac{Du_1}{\partial l_2} = \frac{Du_2}{\partial l_1}, \ \Psi_1 = \frac{Du_1}{\partial x_3} = \frac{Du_3}{\partial l_1}, \ \Psi_2 = \frac{Du_2}{\partial x_3} = \frac{Du_3}{\partial l_2},$$

а значит, полные углы сдвигов:

$$\Phi_1 = 2\frac{Du_3}{\partial l_1}, \ \Phi_2 = 2\frac{Du_3}{\partial l_2}$$

и, кроме того,

$$\mathrm{X}_{11} = 2\frac{Du_3}{\partial l_1}, \quad \mathrm{X}_{22} = 2\frac{Du_3}{\partial l_2}, \ 2\mathrm{X}_{12} = 2\frac{D^2 u_3}{\partial l_1 \partial l_2}.$$

Таким образом, полученные математические модели существенно упрощаются.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 2007. 264 с.
2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
4. Безухов Н. Н. [и др.] Расчёты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / под ред. И. И. Гольденблата. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.
5. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
6. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.: АСВ. СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с.

7. Byskov E., Hansen J. C. Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of axially stiffened cylindrical shells with mode interaction // J. struct. mech. 1980. № 2. Pp. 205–224.

8. Chrobot B. Mathematical models of ribbed shells // Studia Geotechnica et Mechanica. 1982. Vol. IV. №3-4. Pp. 55–68.

9. Fisher C. A., Berit C. W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shells with discrete rings and stringers // Trans. ASME. Ser. E. 1973. Vol. 40. №3. Pp. 736–740.

10. Koiter W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells // Proc. Konikl. Ned. Acad. Wetenscap, 1966. Ser. B69. Pp. 1 – 54.

11. Wu Jiuncheng, Pan Lizhou. Nonlinear theory of multilayer sandwich shells and its application. 1. – General theory // Appl. Math, and Mech. / Engl. Ed.1997.18. № 1.Pp. 19 -27.

12. Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells // Arch. Mech. 1998. 50. № 3. Pp. 483-495.

13. Карпов В. В., Филатов В. Н. Математические модели термоупругости оболочек переменной толщины при учете различных свойств материала // Вестник гражданских инженеров. 2006. №3. С. 42–45.

14. Жгутов В. М. Геометрически нелинейные математические модели термоупругости оболочек переменной толщины // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2011. №4. С. 46–56.

15. Жгутов В. М. Математические модели деформирования оболочек переменной толщины с учётом различных свойств материалов // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1. С. 79–90.

16. Жгутов В. М. Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2009. №4. С. 24–30.

17. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2010. №2. С. 53–59.

18. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости упругих ребристых оболочек при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2011. №1. С. 122–129.

19. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6. С. 38–47.

20. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричный случай) // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8. С. 47–55.

21. Жгутов В. М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8. С. 40–46.

22. Жгутов В. М. Ответ профессору Карпову, Владимиру Васильевичу (о научном приоритете в методе конструктивной анизотропии для ребристых оболочек и на функционал, описывающий ползучесть их материала) // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3. С. 75–80.

23. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 428 с.

24. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. М.: Наука, Физматлит, 1969. 352 с.

25. Компанеец А. С. Теоретическая физика. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1957. 564 с.

26. Жилин П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 339 с.

** Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru

© Жгутов В.М., 2012

К вопросу о локализации колебаний в строительных конструкциях

Аспирант Г.В. Денисов*,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: локализация колебаний; строительные конструкции; собственные частоты; демпфирование

Развитие техники и технологий, освоение сейсмически активных районов, распространение высотного строительства, увеличение скоростного режима транспорта – все это приводит к увеличению уровня действующих динамических нагрузок. Необходимость обеспечения прочности в этих условиях ставит перед инженерами новые задачи, для решения которых требуется совершенствование расчетного аппарата.

Настоящая статья является продолжением ранее опубликованной работы [1] и посвящена исследованию локальных колебаний, возникающих в конструкциях.

Целью работы является анализ причин и возможности возникновения локальных колебаний отдельных элементов конструкций и оценка их влияния на прочность сооружения в целом.

С примерами локальных колебаний отдельных элементов, узлов или частей конструкции мы встречаемся повсеместно. Это раскачивание веток деревьев, колебания крыла самолета, вибрация элементов салона транспорта и т.д. Казалось бы, указанные колебания могут привести лишь к повреждениям отдельных элементов при сохранности всего сооружения в целом. В действительности, данное явление, зачастую возникающее неожиданно, может представлять не менее серьезную опасность, чем колебания всей конструкции. Особую роль локализованные колебания приобретают в свете широко используемого в последнее время расчета сооружений на так называемое прогрессирующее обрушение [2].

В начале исследования определим понятие «локальные колебания». Под локальными колебаниями будем понимать колебания отдельных элементов или частей конструкции при относительно покоящихся прочих элементах или конструкции в целом. Возникновение локальных колебаний будем называть локализацией колебаний.

Показательным примером локальных колебаний являются зафиксированные колебания пролета каркаса машинного зала Саяно-Шушенской ГЭС при относительно покоящемся фундаменте (агрегатном блоке) вследствие динамической нагрузки, возникающей от работы водобойного колодца. Данное обстоятельство поставило жесткие требования по контролю состояния указанной конструкции [3]. Другим примером являются колебания перекрытий зданий, расположенных в непосредственной близости от транспортных магистралей, приводящие к повреждениям несущего каркаса [4].

Анализ отечественных и зарубежных публикаций последних лет указывает на значительный интерес исследователей к данному вопросу, не рассматриваемому ранее ввиду невозможности анализа поведения сложных систем при динамических воздействиях.

Сначала проанализируем известные теоретические зависимости.

В первом приближении будем рассматривать конструкции, соответствующие стержневой схематизации (башни, мачты, высотные здания и т.п.), как наиболее наглядные в части динамического поведения. Кратко напомним основные сведения из теории колебаний. При этом для выявления общих закономерностей будем использовать интегральное уравнение свободных колебаний прямого стержня, которое, как известно, имеет вид [5]:

$$y(x,t) = -\int_0^l K(x,s)m(s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}ds\,, \quad o \le x \le l,\, o \le s \le l, \tag{1}$$

где y(x,t) – перемещение стержня в точке x в момент времени t; K(x,s) – функция влияния, описывающая смещения стержня в точке x от единичной обобщенной силы, приложенной в точке s; m(s) – масса единицы длины стержня. Данное выражение с учетом вариации функции влияния K(x,s) описывает малые продольные, крутильные и поперечные колебания прямого стержня при любых граничных условиях. Решение уравнения (1) представляют в виде бесконечного ряда

произведений двух функций, из которых одна является функцией времени t, вторая – функцией x, именуемой собственной формой уравнения (1):

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i(t)\varphi_i(x)\,. \qquad (2)$$

Интегральное выражение для собственных форм имеет вид [5]:

$$\varphi_i(x)=p_i^2\int_0^l K(x,s)\varphi_i(s)ds\,, i=1,2,..,\infty\,. \qquad (3)$$

где p_i – собственные частоты колебаний, соответствующие *i*-м формам.

Выражение (1) свидетельствует, что смещение стержня в точке *x* получается как линейная сумма смещений элемента *ds* стержня. Таким образом, интеграл (1) можно рассматривать как предельный случай системы уравнений, описывающих смещения элементов *ds*. Данную систему уравнений получим при делении стержня на *n* частей длиной *ds*. Обозначим через y_i значение функции *y(x,t)* в центре участка стержня *ds*, a_{ik} и m_k – соответствующие значения *K(x,s)* и *m(s).* В результате можно записать:

$$y(x,t)=\{y_1,y_2,..,y_n\},\ y_i=-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}m_k\ddot{y}_k\,,\ i=1,2,..,n\,. \qquad (4)$$

Таким образом, колебания любого прямого стержня с любыми граничными условиями можно описать как совокупность колебаний отдельных взаимосвязанных элементов с размерами, стремящимися к точке, и массой, стремящейся к нулю. Указанный элемент в физическом смысле представляет собой не что иное, как осциллятор, то есть груз, подвешенный на пружине, а весь стержень – как бесчисленная совокупность бесконечно малых взаимосвязанных осцилляторов (см. рис. 1).

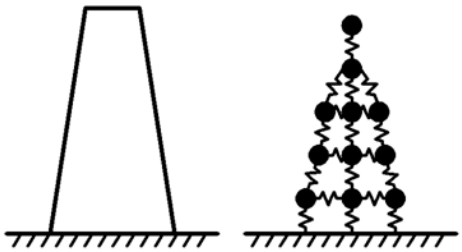


Рисунок 1. Схематизация стержня системой осцилляторов

Приведенный анализ справедлив для всех строительных конструкций и является основой инженерных методов определения собственных частот колебаний сооружений, в которых реальная конструкция заменяется системой с точечными взаимосвязанными массами [6], что в настоящее время вылилось в метод конечных элементов [7].

Как известно, частота собственных колебаний осциллятора определяется выражением [5]:

$$w=\sqrt{c/m}\,, \qquad (5)$$

где *c* – жесткость пружины, *m* – масса грузика. Тогда для собственной частоты конструкции можно записать:

$$p_i=\sqrt{\sum_{j=1}^{A}c_j\Big/\sum_{k=1}^{B}m_k}\,, \qquad (6)$$

где A, B – некие константы, определяющие совокупность деформационных и массовых элементов системы, участвующих в колебаниях по форме, соответствующей частоте p_i. Таким образом, используя зависимость между собственными частотами [5], можно записать:

$$p_{i-1}<p_i \Longleftrightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{A}c_j\Big/\sum_{k=1}^{B}m_k}<\sqrt{\sum_{j=1}^{C}c_j\Big/\sum_{k=1}^{D}m_k}\,, \qquad (7)$$

где A, B, C, D – некие константы, определяющие совокупность деформационных и массовых элементов системы, участвующих в колебаниях по соответствующим формам. Таким образом, спектр собственных частот представляет собой последовательность отношений (6). Это позволяет заключить, что, по мере увеличения частоты в колебательный процесс, соответствующий высшим формам, будут включаться более жесткие и (или) менее весомые части системы, при этом отдельные части конструкции могут исключаться из движения. Сделанный вывод соответствует результатам исследований [8] и подтверждается натурными измерениями, выполненными в ходе практического определения фактического состояния отдельных несущих элементов сооружения по их динамическим характеристикам [9, 10].

На основании вышесказанного можно заключить, что локализованные колебания следует рассматривать как какую-либо собственную форму колебания конструкции. Это позволяет разделить весь спектр собственных колебаний на глобальные и локальные формы.

В качестве иллюстраций на рис. 2 приведены характерные формы собственных колебаний массивного сооружения, полученные математическим моделированием с помощью метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Из представленных результатов видно, что 1-я и 9-я формы – глобальные, в то время как 4-я и 8-я – локальные формы колебаний стены. Таким образом, внешнее воздействие с частотами 14,56 Гц и 20,64 Гц приведет лишь к колебаниям отдельной стены при относительно покоящейся конструкции в целом.

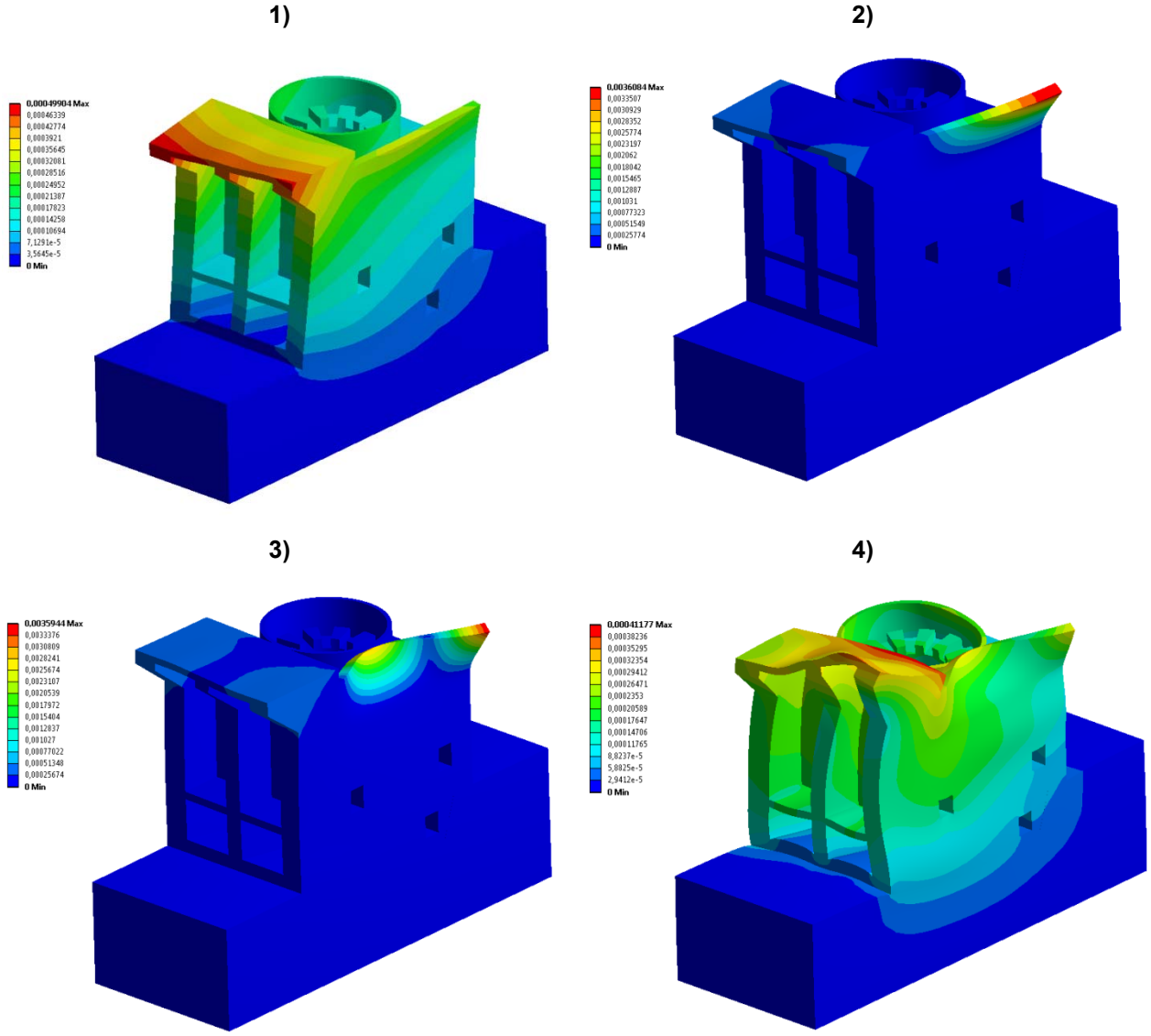


Рисунок 2. Собственные формы колебаний массивного сооружения:
1) 1-я форма, частота 7,13 Гц; 2) 4-я форма, частота 14,56 Гц; 3) 8-я форма, частота 20,64 Гц; 4) 9-я форма, частота 21,70 Гц

В свою очередь, примем разделение локализаций по частотному признаку на низко- и высокочастотные колебания относительно исследуемого спектра колебаний конструкции, учитываемого при проектировании (далее будем называть его основным спектром). При этом заметим, что частоты локальных колебаний могут располагаться и в основном спектре. Данные локальные колебания будем именовать среднечастотными. Приведем примеры. В работе [11] авторы указывают на возможность возникновения локальных низкочастотных колебаний покрытий и перекрытий зданий; исследованиями [12] показано, что данное явление характерно для верхних этажей зданий. К среднечастотным колебаниям можно отнести колебания отдельных элементов конструкции при смешанном спектре внешней нагрузки [13, 14]. Высокочастотные локальные колебания отдельных элементов корпуса судна вследствие динамической нагрузки от вращающегося винта двигателя исследованы в упомянутой выше работе [8].

Обратим внимание на некий произвол в предложенной систематизации ввиду неоднозначности определения основного спектра. С одной стороны, при выполнении расчетов реальных конструкций на динамические воздействия перед инженерами встает вопрос о количестве учитываемых форм собственных колебаний, что косвенно регулируется нормативными документами. С другой стороны, используя современные расчетные программы, реализующие метод конечных элементов и позволяющие учитывать свыше 100 форм собственных колебаний, инженеры упускают из виду то обстоятельство, что точность определения высших частот и форм колебаний резко уменьшается по мере увеличения частоты вследствие большой размерности задачи [15]. Таким образом, зачастую учитываемый спектр собственных частот не вполне адекватно характеризует поведение конструкции при динамических воздействиях.

Возвращаясь к принятой систематизации, отметим, что в целом низкочастотные локализации [11, 12] не представляют интереса для исследования, так как могут быть рассмотрены в ходе модального анализа и учтены при проектировании. Среднечастотные локальные колебания [13, 14] также зачастую выявляются при модальном анализе. Основная сложность при этом заключается в точности определения частот локальных форм. Эта проблема может быть решена выполнением серии расчетов с различной степенью детализации элементов конструкции. В связи с этим, подробнее остановимся на высокочастотных колебаниях.

Выполним оценку собственных форм колебаний с энергетической точки зрения. Как известно, наиболее энергоемкими являются низшие формы, так как максимальная потенциальная энергия колебаний по *i*-й форме есть функция, пропорциональная амплитуде колебаний, которая в свою очередь обратно пропорциональна величине *i*-й частоты собственных колебаний [5]. Другими словами, можно сказать, что энергия колебаний по мере увеличения частоты уменьшается. Подтверждением этому служат результаты экспериментов, представленные в работе [16].

Вернемся к реальным конструкциям, в которых, как известно, при колебаниях возникают силы сопротивления, характеризуемые вязким трением в материале и сухим в сочленениях (при их наличии). Трение в материале имеет сложную природу и описывается коэффициентом поглощения (демпфирования), который принято определять как долю рассеянной энергии за цикл колебания в максимальной энергии цикла. Как следует из многочисленных опытов, для большинства строительных материалов указанный коэффициент не зависит или слабо зависит от амплитуды и частоты колебаний [6]. Сухое трение в сочленениях (конструкционное демпфирование) в физическом смысле характеризует максимальную силу, при которой тело еще находится в состоянии покоя. При этом, величина данной силы не зависит от скорости движения тела [17], а следовательно, и от частоты колебаний. Вместе с тем, как было установлено выше, низкочастотные воздействия зачастую вызывают колебания наиболее гибких элементов сооружения (примеры [11, 12]), в то время как узлы соединений, в качестве элементов повышенной жесткости, начинают вовлекаться в колебания при более высоких частотах (пример [8]).

На основании изложенного можно заключить, что по мере увеличения частоты колебаний системы, сопровождающееся уменьшением амплитуды и энергии колебаний и увеличением количества колеблющихся узлов сочленений, происходит увеличение суммарного конструкционного демпфирования в сооружении. Указанные обстоятельства свидетельствуют об ограниченности спектра частот механических колебаний системы.

Сделанный вывод нельзя распространить на системы, не обладающие конструкционным демпфированием (монолитные здания, массивные бетонные сооружения и т.д.), что является темой отдельной работы.

Выводы

1. С помощью математических преобразований было показано, что в силу конструктивных особенностей в зданиях и сооружениях могут возникать локальные колебания отдельных частей или их элементов при относительно покоящихся прочих элементах или конструкции в целом.

2. Для выявления возможности возникновения указанных колебаний, в ряде случаев представляющих опасность для конструкции в целом и не регламентируемых действующими нормативными документами, на стадии проектирования требуется выполнение тщательного модального анализа как сооружения в целом, так и отдельных его элементов.

Литература

1. Денисов Г. В., Лалин В. В. О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 91-97.
2. Перельмутер А. В., Криксунов Э. З., Мосина Н. В. Реализация расчета монолитных жилых зданий на прогрессирующее (лавинообразное) обрушение в среде вычислительного комплекса «SCADOffice» // Инженерно-строительный журнал. 2009. №2. С. 13–18.
3. Брызгалов В. И., Клюкач А. А. Опыт эксплуатации пространственно-стержневой конструкции МАРХИ машинного зала Саяно-Шушенской ГЭС // Гидротехническое строительство. 1998. №9. С. 63–66.
4. Алявдин П. В., Музычкин Ю. А. Исследования вибрации каркасного здания, расположенного вблизи метрополитена // Механика машин, механизмов и материалов. 2009. №2(7). С. 56–60.
5. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1958. 628 с.
6. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. М.: Госстройиздат, 1956. 340 с.
7. Румянцев Е. В., Белугина Е. А. Моделирование конструкций железнодорожного терминала станции Адлер с учетом системы сейсмоизоляции // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 22-30.
8. Schwanecke H. Some remarks on local structural vibration and structure-borne sound phenomena caused by marine propellers // Proceedings of The 16th Symposium on Theory and Practice of Shipbuilding (XVI Symposium SORTA 2004), Zagreb, 2004. Pp. 9.6.1–9.6.12.
9. Atamturktur S., Bornn L., Hemez F. Vibration characteristics of vaulted masonry monuments undergoing differential support settlement // Engineering Structures. 2011. №33. Pp. 2472–2484.
10. Matsumoto Y., Yamaguchi H., Yoshioka T. A field investigation of vibration-based structural health monitoring in a steel truss bridge // Proceeding of the Joint Conference on Advances in Bridge Engineering-II, 2010, Bangladesh. Pp. 461–467.
11. Перельмутер А. В., Карпиловский В. С., Фиалко С. Ю., Егупов К. В. Опыт реализации проекта МСН СНГ «Строительство в сейсмических районах» в программной системе SCAD // Вестник Одесской государственной академии строительства и архитектуры. 2003. № 9. С. 147–159.
12. Miskovic Z., Pavic A., Reynolds P. Global vertical modes of floor vibration in multi-storey buildings // Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA 2006). Leuven, Belgium. Pp. 1211-1220.
13. Мондрус В. Л., Хуэн Л. Т. Т., Сизов Д. К. Распределение амплитуд виброускорений в многоэтажном административном здании от источников техногенного происхождения // Вестник МГСУ. 2010. №1. С. 113–116.
14. Jaswal H. Analysis of micro-vibration in buildings // Proceedings of the 2007 Earthquake Engineering Symposium for Young Researchers. Seattle, Washington. Pp. 09.1 – 09.12.
15. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 271 с.
16. Qi G.Z., Guo X., Chang P., Qi X., Dong W. Local modes of vibrations for civil structural health monitoring // Proceedings of The 14th World Conference on Earthquake Engineering. Beijing, 2008. Pp. 6–16.
17. Розенблат Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS, 2011. 205 с.

** Григорий Валентинович Денисов, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: +7(921)385-56-12; эл. почта: oxoxox@mail.ru

© Денисов Г.В., 2012

Об одной модели сыпучих сред. Волны в редуцированной среде Коссера

Д.т.н., профессор В.В. Лалин;
ассистент Е.В. Зданчук*,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: редуцированная среда Коссера; дополнительная упругая постоянная; аналитическое решение; объемные волны; дисперсия; запрещенная зона

При описании колебательных свойств в деформируемых телах обычно предполагается, что размер колеблющихся частиц незначителен по сравнению со средним расстоянием между ними, поэтому для описания кинематики таких сред используется только вектор перемещений. Такова классическая модель сплошной среды, которая часто используется для моделирования волн в упругих телах [1].

Однако некоторые эффекты, наблюдаемые при исследовании сейсмических волн и задач взаимодействия сооружений с массивами гранулированных или трещиноватых скальных оснований, плохо описываются классическими моделями сплошной среды. К таким эффектам относятся, например, значительная дисперсия и (или) затухание волн [2,3]. Для описания таких свойств могут использоваться неклассические модели с микроструктурой или дополнительными степенями свободы. При этом в большинстве работ считается, что при учете независимых вращательных степеней свободы необходимо введение моментных напряжений. Такие модели сплошных сред хорошо известны, например, моментная теория упругости или среда Коссера, теория которой начала интенсивно развиваться около 50 лет назад [4-10].

Не так широко известно, что возможен и промежуточный вариант, когда вращательные степени свободы независимы от перемещений, а моментные напряжения отсутствуют. Такой класс моделей сплошных сред был назван на основании классификации, предложенной в [11], «безмоментными средами со свободным вращением». Впоследствии выяснилось, что применительно к трехмерным средам такая модель была предложена в [12] и получила затем название «редуцированная среда Коссера». Вывод основных уравнений и анализ некоторых задач для такой среды приведены в работах [13-16].

В работе [12] подобная среда предлагалась для моделирования поведения океанских отложений и осадочных пород. Мы предполагаем, что такую модель можно использовать для любых сыпучих сред.

Отличительная особенность редуцированной среды Коссера заключается в том, что тензор напряжений является несимметричным, причем в статических задачах этот тензор становится симметричным. Таким образом, в статике редуцированная среда Коссера неотличима от классической сплошной среды, в которой вращательные степени свободы не являются независимыми, так как выражаются через перемещения, а тензор напряжений является симметричным.

В настоящей работе исследуются волновые движения трехмерной, изотропной, упругой редуцированной среды Коссера, выводятся уравнения для потенциальных и вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота, строятся и анализируются дисперсионные уравнения для плоских волн.

В классической упругой, изотропной среде Коссера, уравнения движения в перемещениях имеют вид [10]:

$$(\lambda+2\mu)graddiv\mathrm{u} - (\mu+\alpha)rotrot\mathrm{u} + 2\alpha\mathrm{rot}\,\omega + X = \rho\ddot{\mathrm{u}}\ ,$$
$$(\beta+2\gamma)graddiv\omega - (\gamma+\varepsilon)rotrot\omega + 2\alpha rot\mathrm{u} - 4\alpha\omega + \mathrm{Y} = \mathrm{J}\ddot{\omega}\,.$$

Для перехода к редуцированной среде Коссера необходимо положить: β =0, γ =0, ε =0.

Также мы будем рассматривать случай отсутствия объемной нагрузки (**X**,**Y**=0). Приходим к следующим уравнениям движения редуцированной среды Коссера:

$$(\lambda+2\mu)graddiv\mathrm{u} - (\mu+\alpha)rotrot\mathrm{u} + 2\alpha\mathrm{rot}\,\varphi = \rho\ddot{\mathrm{u}}\ , \tag{1}$$
$$2\alpha rot\mathrm{u} - 4\alpha\varphi = \mathrm{J}\ddot{\varphi}\,, \tag{2}$$

где φ – вектор поворота (у Новацкого $\omega=\varphi$);
u – вектор перемещений;
λ, μ – постоянные Ламе;
α – дополнительная упругая постоянная;
ρ – объемная плотность;
J – объемная плотность шарового тензора инерции.

Построим общее решение уравнений движения для задачи в плоскости x, z с помощью метода, изложенного в работе [7]. Будем искать решение в виде $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{z},\mathrm{t})=U(z)e^{ikx}U(t)$, т.е. рассматривать гармоническую волну, распространяющуюся в направлении x с амплитудой, зависящей от z. Сделаем преобразование Фурье по времени и получим $\hat{\mathrm{u}}=\mathrm{U}(\mathrm{z})e^{ikx}U_0(\omega)$, где $U_0(\omega)$ – спектральная плотность волнового пакета. Аналогично, $\hat{\varphi}=\varphi(\mathrm{z})e^{ikx}\varphi_0(\omega)$.

Преобразование Фурье имеет свойство: $\hat{\ddot{\mathrm{u}}}=(\mathrm{i}\omega)^2\hat{\mathrm{u}}$, $\hat{\ddot{\varphi}}=(\mathrm{i}\omega)^2\hat{\varphi}$. Используя это свойство, из (1), (2) получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций $U_1(z),U_2(z),U_3(z),\varphi_1(z),\varphi_2(z),\varphi_3(z)$:

$$(\mu+\alpha)\frac{d^2}{dz^2}U_1(z)+\left(\rho\omega^2-k^2(2\mu+\lambda)\right)U_1(z)+ik(\lambda+\mu-\alpha)\frac{d}{dz}U_3(z)-2\alpha\frac{d}{dz}\varphi_2(z)=0, \quad (3)$$

$$(\mu+\alpha)\frac{d^2}{dz^2}U_2(z)+\left(\rho\omega^2-k^2(\mu+\alpha)\right)U_2(z)-2ik\alpha\varphi_3(z)+2\alpha\frac{d}{dz}\varphi_1(z)=0, \quad (4)$$

$$(2\mu+\lambda)\frac{d^2}{dz^2}U_3(z)+\left(\rho\omega^2-k^2(\mu+\alpha)\right)U_3(z)+ik(\lambda+\mu-\alpha)\frac{d}{dz}U_1(z)+2ik\alpha\varphi_2(z)=0, \quad (5)$$

$$-2\alpha\frac{d}{dz}U_2(z)+\left(J\omega^2-4\alpha\right)\varphi_1(z)=0, \quad (6)$$

$$2\alpha\frac{d}{dz}U_1(z)+\left(J\omega^2-4\alpha\right)\varphi_2(z)-2ik\alpha U_3(z)=0, \quad (7)$$

$$2ik\alpha U_2(z)+\left(J\omega^2-4\alpha\right)\varphi_3(z)=0. \quad (8)$$

Выразим из уравнений (6), (7), (8) $\varphi_1(z),\varphi_2(z),\varphi_3(z)$ через $U_1(z),U_2(z),U_3(z)$ и подставим в уравнения (3), (4), (5). Обозначим $c_1^2=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $c_2^2=\dfrac{\mu}{\rho}$, $c_3^2=\dfrac{\mu+\alpha}{\rho}$, $\omega_0^2=\dfrac{4\alpha}{J}$. Тогда получим:

$$\begin{gathered}\left(\frac{c_3^2}{c_1^2}+\frac{c_3^2-c_2^2}{c_1^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}U_1(z)+\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2\right)U_1(z)+\\ +ik\left(\frac{c_1^2-c_3^2}{c_1^2}-\frac{c_3^2-c_2^2}{c_1^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\frac{d}{dz}U_3(z)=0\end{gathered}, \quad (9)$$

$$\left(1+\frac{c_3^2-c_2^2}{c_3^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}U_2(z)+\left(\frac{\omega^2}{c_3^2}-k^2\left(1+\frac{c_3^2-c_2^2}{c_3^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\right)U_2(z)=0, \quad (10)$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dz^2}U_3(z)+\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2\left(\frac{c_3^2}{c_1^2}+\frac{c_3^2-c_2^2}{c_1^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\right)U_3(z)+\\ +ik\left(\frac{c_1^2-c_3^2}{c_1^2}-\frac{c_3^2-c_2^2}{c_1^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\frac{d}{dz}U_1(z)=0\end{gathered}. \quad (11)$$

Введем обозначение $a=\dfrac{c_3^2}{c_1^2}+\dfrac{c_3^2-c_2^2}{c_1^2}\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}$ и сделаем замену переменных:

$$U_1(z) = ik\Phi(z) - \frac{d}{dz}\psi(z), \quad U_3(z) = \frac{d}{dz}\Phi(z) + ik\psi(z).$$

Из уравнений (9), (11) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2\right)\Phi(z) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + \left(\frac{\omega^2}{ac_1^2} - k^2\right)\psi(z) = 0. \tag{13}$$

Общее решение уравнений (12),(13) для величин $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z) = Ae^{\nu_1 z} + Be^{-\nu_1 z}, \ \psi(z) = Ce^{\nu_2 z} + De^{-\nu_2 z},$$

где экспоненциальные показатели ν_1, ν_2 определяются выражениями:

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}, \ \nu_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{ac_1^2}}.$$

Теперь мы можем определить вид амплитудных функций $U_1(z), U_2(z), U_3(z)$, $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)$:

$$U_1(z) = ikAe^{\nu_1 z} + ikBe^{-\nu_1 z} - Ce^{\nu_2 z} + De^{-\nu_2 z}, \tag{14}$$

$$U_2(z) = Ee^{\nu_2 z} + Fe^{-\nu_2 z}, \tag{15}$$

$$U_3(z) = A\nu_1 e^{\nu_1 z} - B\nu_1 e^{-\nu_1 z} + ikCe^{\nu_2 z} + ikDe^{-\nu_2 z}, \tag{16}$$

$$\varphi_1(z) = \frac{\omega_0^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}\frac{d}{dz}U_2(z), \tag{17}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{\omega_0^2 ik}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}U_3(z) - \frac{\omega_0^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}\frac{d}{dz}U_1(z), \tag{18}$$

$$\varphi_3(z) = -\frac{\omega_0^2 ik}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}U_2(z). \tag{19}$$

Константы A-F определяются для каждого типа волны из соответствующих граничных условий.

Рассмотрим в частном случае дисперсионные соотношения для объемных продольных и поперечных волн.

1. *Объемная продольная волна (нет изменения амплитуды с глубиной)*

$U_3(z) = 0$, $U_1(z) = const$. Из уравнения (9) при этих условиях получаем:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2},$$

что дает нам скорость продольной волны.

2. *Поперечная волна с горизонтальной поляризацией*

$U_2(z) = const$. Из уравнения (10) получаем:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\dfrac{c_3^2\omega^2 - c_2^2\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}. \tag{20}$$

3. Поперечная волна с вертикальной поляризацией

$U_1(z)=0$, $U_3(z)=const$. Из уравнения (11) получаем:

$$k^2=\frac{\omega^2}{\dfrac{c_3^2\omega^2-c_2^2\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}}. \tag{21}$$

В случаях 2 и 3 получили одно и то же дисперсионное соотношение, анализ которого будет приведен ниже.

Вернемся к уравнениям (1) и (2) и произведем разделение неизвестных, для чего представим их в несколько иной форме. Векторы u и **φ** могут быть разложены на скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathrm{u}=\nabla\mathrm{a}+\nabla\times\mathrm{b},\quad \nabla\cdot\mathrm{b}=0,$$
$$\varphi=\nabla\mathrm{c}+\nabla\times\mathrm{d},\quad \nabla\cdot\mathrm{d}=0.$$

Подставим эти выражения в уравнения (1), (2), получим:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\nabla a-(\mu+\alpha)\nabla\times\nabla\times\nabla\times b+2\alpha\nabla\times\nabla\times d=\rho\left(\nabla\ddot{a}+\nabla\times\ddot{b}\right), \tag{22}$$

$$2\alpha\left(\nabla\times\nabla\times b-2\left(\nabla c+\nabla\times d\right)\right)=J\left(\nabla\ddot{c}+\nabla\times\ddot{d}\right). \tag{23}$$

Возьмем дивергенцию уравнения (22), получим уравнение только для «a»:

$$(\lambda+2\mu)\Delta a=\rho\ddot{a}.$$

Данное уравнение описывает продольную волну. Проследим характер распространения волны на примере монохроматической плоской волны, распространяющейся в направлении x. Для этого подставим в последнее уравнение:

$$a=A\exp(-i\omega t+ikx).$$

Получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\lambda+2\mu)k^2=\rho\omega^2.$$

Отсюда находим фазовую скорость волны:

$$c_1^2=\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}.$$

Она совпадает с фазовой скоростью продольной волны в классической теории упругости [1]. Отсюда следует, что если в среде измерять только скорость продольной волны, то невозможно отличить классическую среду от редуцированной среды Коссера.

Возьмем дивергенцию уравнения (23), получим уравнение только для «c»:

$$4\alpha c=-J\ddot{c}.$$

Полученное уравнение не является волновым, а представляет собой уравнение осциллятора с собственной частотой $\omega=\omega_0=\sqrt{\dfrac{4\alpha}{J}}$. Наличие такой частоты микровращения является отличительной особенностью редуцированной среды Коссера.

Для того чтобы получить отдельное уравнение для «*b*», воспользуемся следующим преобразованием уравнений (22), (23):

$$\left(-\partial_t^2\left[J(22)\right]-4\alpha(22)-2\alpha rot(23)\right).$$

В результате получим:

$$-J(\mu+\alpha)\Delta\partial_t^2 b+J\rho\partial_t^4 b-4\alpha\mu\Delta b+4\alpha\rho\partial_t^2 b=0. \tag{24}$$

Для того чтобы получить отдельное уравнение для «**d**», воспользуемся следующим преобразованием уравнений (22), (23):

$$\left(-\partial_t^2\left[\rho(23)\right]-(\mu+\alpha)rotrot(23)-2\alpha rot(22)\right).$$

Получим:

$$-J(\mu+\alpha)\Delta\partial_t^2 b + J\rho\partial_t^4 b - 4\alpha\mu\Delta b + 4\alpha\rho\partial_t^2 b = 0\,. \qquad (25)$$

Обратим внимание, что уравнение (24) совпадает с уравнением (25). Таким образом, вихревая часть вектора перемещения совпадает с вихревой частью вектора вращения.

Подставив в уравнение (24) $b = B\exp(-i\omega t + ikx)$, получим следующее дисперсионное уравнение, совпадающее с уравнениями (20), (21):

$$(c_2^2\omega_0^2 - c_3^2\omega^2)k^2 - \omega^2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0\,.$$

Отсюда:

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(c_2^2\omega_0^2 - c_3^2\omega^2)}}\,. \qquad (26)$$

Проанализировав данное выражение, можно найти следующее.

1. В интервале $\omega_k \langle \omega \langle \omega_0$, где $\omega_k = \omega_0\sqrt{\frac{c_2^2}{c_3^2}}$, корней уравнения не существует, т.е. волны с такими частотами в редуцированной среде Коссера распространяться не могут.

2. При $\omega_k \rangle \omega$ или $\omega \rangle \omega_0$ существует один корень уравнения.

3. Для малых частот волновое число, с точностью до ω^3, имеет значение $k = \frac{\omega}{c_2}$, с точностью до ω^5, $k = \frac{\omega}{c_2} + \frac{1}{2\omega_0^2 c_2}\left(\frac{c_3^2}{c_2^2} - 1\right)\omega^3$. Таким образом, фазовая скорость волны для малых частот составляет приблизительно $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, что совпадает со скоростью поперечных волн в классической теории упругости [1].

4. Для больших частот волновое число $k = \frac{\omega}{c_3}$ с точностью до $\frac{1}{\omega}$; с точностью до $\frac{1}{\omega^3}$ - $k = \frac{\omega}{c_3} + \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{c_2^2}{c_3^2} - 1\right)\frac{1}{\omega}$. Отсюда следует, что значение фазовой скорости для больших частот приблизительно составляет $c_3 = \sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}}$.

Построим дисперсионную кривую, соответствующую уравнению (26) (рис. 1).

Константы в приведенном примере таковы: $\lambda = 2.8\cdot 10^9\ H/м^2$, $\mu = 4\cdot 10^9\ H/м^2$, $\alpha = 2\cdot 10^9\ H/м^2$, $\rho = 10^5\ кг/м^3$, $J = 10^4\ кг/м$.

Частотная зависимость $k(\omega)$ построена на рисунках сплошной черной линией. При малых частотах дисперсионная ветвь приближается к прямой, соответствующей скорости c_2 (штриховая линия). При больших частотах – c_3 (пунктирная линия).

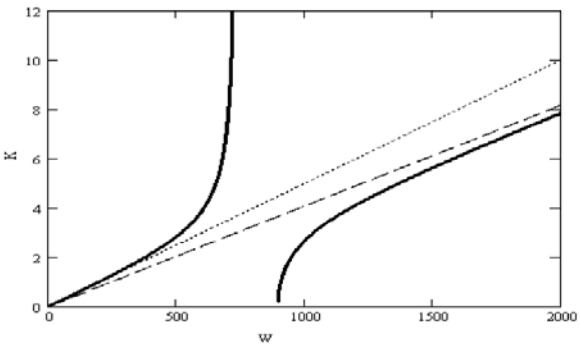


Рисунок 1. Дисперсионная кривая при $\alpha = 2\cdot 10^9\ H/м^2$. Предельные прямые при малых и больших частотах

Особенностью редуцированной среды Коссера является то, что для объемных поперечных волн существует запрещенная зона

(рис. 2). Поперечные волны не могут распространяться в интервале $\omega_k \langle \omega \langle \omega_0$ (для нашего примера от 730.3 c^{-1} до 894.4 c^{-1}).

Так как предполагается, что данную модель среды можно использовать для сыпучих сред, то наличие запрещенной зоны является большим преимуществом этой модели: сыпучий грунт будет гасить волны, распространяющиеся с частотой, попадающей в запрещенный интервал.

Сложность, которая не дает пока возможности осуществлять решение задач по этой модели, состоит в том, что нам неизвестны значения дополнительной упругой постоянной α для реальных сред. Так при уменьшении α на порядок ($\alpha = 2 \cdot 10^8 \, H/м^2$) запрещенная зона сужается до интервала от 276 c^{-1} до 282.8 c^{-1} (рис. 3), а при увеличении на порядок ($\alpha = 2 \cdot 10^{10} \, H/м^2$) – увеличивается до интервала от 1155 c^{-1} до 2828 c^{-1} (рис. 4). Также, при уменьшении α до $2 \cdot 10^8 \, H/м^2$, скорости c_2 и c_3 становятся почти равными: $c_2 = 200 \, м/c$, $c_3 = 204.9 \, м/c$.

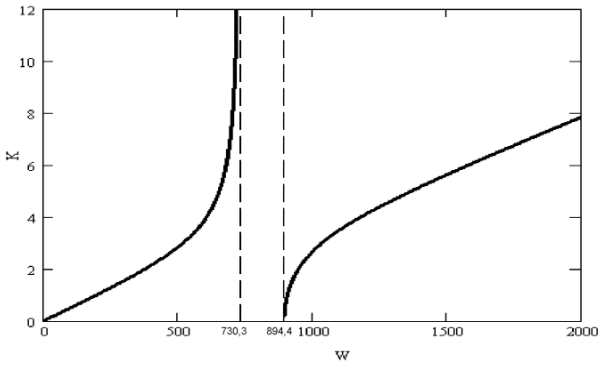


Рисунок 2. Дисперсионная кривая при $\alpha = 2 \cdot 10^9 \, H/м^2$.

Запрещенная частотная зона

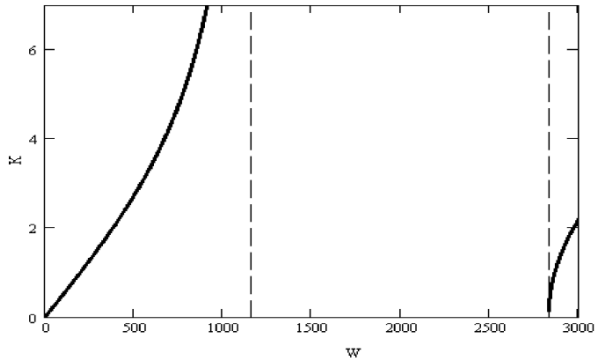


Рисунок 3. Дисперсионная кривая при $\alpha = 2 \cdot 10^8 \, H/м^2$

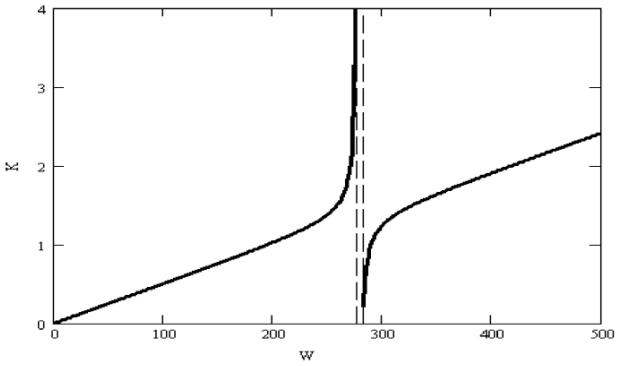


Рисунок 4. Дисперсионная кривая при $\alpha = 2 \cdot 10^{10} \, H/м^2$

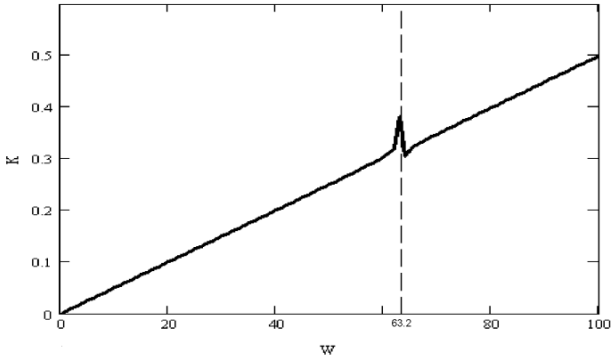


Рисунок 5. Дисперсионная кривая при $\alpha = 2 \cdot 10^7 \, H/м^2$

При дальнейшем уменьшении α до $10^7 \, H/м^2$ практически исчезает дисперсия поперечных волн (рис. 5), $c_2 = c_3 = 200 \, м/c$, и наблюдается неоднородность, соответствующая резонансу при совпадении скорости поперечной волны с осцилляциями частиц с частотой $\omega_0 = 63.2 c^{-1}$.

Выводы

В статье были рассмотрены некоторые вопросы распространения волн в упругой изотропной безмоментной среде со свободным вращением – редуцированной среде Коссера, как одной из моделей гранулированных сред. На основании проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Получены независимые уравнения для потенциальных и вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота.

2. Показано, что динамические свойства вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота одинаковы.

3. Исследовано влияние дополнительной упругой постоянной на свойства дисперсионной кривой для поперечных волн.

Литература

1. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, N-HPC. 1973. 426 p.
2. Уайт Дж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 263 с.
3. Linton C. M., McIver P. Handbook of Mathematical Techniques for Wave. Structure Interactions. CRC Press LLC, 2001. 298 p.
4. Toupin R. A. Elastic materials with couple stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V.11. №5, Pp. 1189-1196.
5. Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // ФТТ. 1963. Т.5. №9. С. 2591-2597.
6. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. С. 401-408.
7. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple stress // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V.17. Pp. 85-112.
8. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 11. №5. Pp. 1183-1188.
9. Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15. Pp. 909-923.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Лалин В. В. О классификации сплошных сред. Новые модели в строительной механике // VII международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте». Тезисы. СПб, 2008. С. 123.
12. Lawrence M. Schwartz, David Linton Johnson and Shechao Feng. Vibrational Modes in Granular Materials // Physical Review Letters. 1984. Vol. 52, №10. Pp. 831–834.
13. Grekova E. F., Kulesh M. A., Herman G. C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bull. Seismol. Soc. Am., 2009. Vol. 99, №2B. Pp. 1423-1428.
14. Кулеш М. А., Грекова Е. Ф., Шардаков И. Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. 2009. Том 55, №2. С. 216-225.
15. Zdanchuk E., Lalin V. The theory of continuous medium with free rotation without coupled Stresses // Proceedings of the XXXVIII Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS. 2010. Pp. 771-775.
16. Lalin V., Zdanchuk E. On the Cauchy problem for nonlinear reduced Cosserat continuum // Proceedings of the XXXIX Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS. 2011. Pp. 549-552.
17. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
18. Кулеш М. А., Шардаков И. Н. Волновая динамика упругих сред: методический материал к спецкурсу / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2007. 60 с.

** Елизавета Викторовна Зданчук, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: +7(905)251-81-13; эл. почта: zelizaveta@yandex.ru

© Лалин В.В., Зданчук Е.В., 2012

Заведующий кафедрой,
д.т.н., профессор
Ватин Николай Иванович

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Инженерно-строительный факультет

Кафедра «Технология, организация и экономика строительства» (ТОЭС)

Международные магистерские программы по направлению «Строительство»

Что такое магистратура?

- получение квалификации, признанной во всем мире;
- фундаментальное профессиональное образование;
- ускоренный путь к получению степени кандидата технических наук;
- получение знаний и умений, востребованных работодателями на производстве и в науке;
- реальное участие в научно-исследовательской и педагогической деятельности.

Обучение в магистратуре проходит в течение 2 лет, на бюджетной или контрактной основе, по очной или заочной форме. Иногородним предоставляется общежитие.

Выберите одну из наших магистерских программ:

1. Автоматизированное проектирование зданий и сооружений
2. Инженерные системы зданий и сооружений
3. Организация и управление инвестиционно-строительными проектами
4. Теория и практика организационно-технологических решений
5. Энергосбережение и энергоэффективность (при финансовой поддержке ЕС)
6. Международные инвестиционно-строительные проекты (при финансовой поддержке ЕС)

Обучение в ведущих европейских вузах

Каждому магистру предоставляется возможность бесплатной стажировки (от 1 семестра до года) в одном из европейских строительных вузов-партнеров ГОУ СПбГПУ.

Особенности обучения на кафедре:

- индивидуальная работа с каждым магистром, включающая активную научно-исследовательскую работу и опыт педагогической деятельности;
- регулярные выступления на семинарах, конференциях, научных форумах;
- активное взаимодействие преподавателей и студентов в ходе совместной проектной и научно-исследовательской деятельности;
- оперативное обновление учебных дисциплин;
- учебный процесс, построенный на современных компьютерных технологиях в строительстве;
- постоянное общение с представителями ведущих строительных и проектных организаций.

Заочная магистратура как второе высшее образование

Программа ориентирована, прежде всего, на обучение практикующих специалистов, в том числе с техническим «нестроительным» образованием:

- возможность обучения без отрыва от работы;
- использование новейших технологий дистанционного обучения;
- самостоятельный выбор приоритетных направлений обучения.

Контакты

195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 204, 301, 201
297-59-49, 535-79-92, 552-94-60, www.stroikafedra.spb.ru

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Инженерно-строительный факультет
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
тел/факс: 552-94-60, www.stroikursi.spb.ru.
stroikursi@mail.ru

Приглашает специалистов проектных и строительных организаций,
не имеющих базового профильного высшего образования
на курсы профессиональной переподготовки (от 500 часов)
по направлению «Строительство» по программам:

П-01 «Строительство зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Основы проектирования зданий и сооружений***
- ***Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD***
- ***Автоматизация сметного дела в строительстве***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций заказчика-застройщика***

П-02 «Экономика и управление в строительстве»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций заказчика-застройщика и генерального подрядчика***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Экономика и ценообразование в строительстве***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Организация, управление и планирование в строительстве***
- ***Автоматизация сметного дела в строительстве***

П-03 «Инженерные системы зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы механики жидкости и газа***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем вентиляции и кондиционирования***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем отопления и теплоснабжения***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем водоснабжения и водоотведения***
- ***Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD***
- ***Электроснабжение и электрооборудование объектов***

П-04 «Проектирование и конструирование зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы сопротивления материалов и механики стержневых систем***
- ***Проектирование и расчет оснований и фундаментов зданий и сооружений***
- ***Проектирование и расчет железобетонных конструкций***
- ***Проектирование и расчет металлических конструкций***
- ***Проектирование зданий и сооружений с использованием AutoCAD***
- ***Расчет строительных конструкций с использованием SCAD Office***

П-05 «Контроль качества строительства»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Проектирование и расчет железобетонных конструкций***
- ***Проектирование и расчет металлических конструкций***
- ***Обследование строительных конструкций зданий и сооружений***
- ***Выполнение функций заказчика-застройщика и генерального подрядчика***

По окончании курса слушателю выдается диплом о профессиональной переподготовке государственного образца, дающий право на ведение профессиональной деятельности