

Диссипация механической энергии в круглоцилиндрической трубе

*Д.т.н., профессор А.Д. Гиргидов**

ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: одномерные потоки в круглоцилиндрической трубе; диссипация механической энергии; продольнооднородный турбулентный поток; четырехслойная модель; вихрь Рэнкина; принцип минимума диссипации; граница между квазитвердым и свободным вихрями; аппроксимация поля скорости

Распределение диссипации энергии вдоль радиуса круглоцилиндрической трубы представляет интерес при решении многих задач инженерно-строительной гидравлики. К числу таких задач относятся расчет теплопередачи через поток воздуха в ограждающих конструкциях [1, 2], расчет потерь напора в винтовых потоках [3, 4], расчет циклонов с осевым [5] и тангенциальным [6-9] подводами пылесодержащего газа. В частности, отдельное рассмотрение диссипации в продольном и вращательном движениях может оказаться полезным при обосновании расщепления винтового потока на две простые формы движения и последующей их суперпозиции и вычислении потерь напора [10, 11].

Дифференциальное уравнение баланса механической энергии осредненного движения в продольно-однородном турбулентном потоке в круглоцилиндрической трубе имеет вид [12]:

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\eta \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right)^2 + \overline{\rho u'_x u'_r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}, \quad (1)$$

где (x, r, ε) – цилиндрические координаты, $\underline{u} = (u_x, u_r, u_\varepsilon)$ – скорость жидкости, p – гидродинамическое давление, η – динамический коэффициент вязкости, ρ – плотность жидкости.

Первое слагаемое в правой части выражает плотность диссипации (перехода в тепло) механической энергии осредненного движения. Оно представляет собой произведение вязких касательных напряжений, рассчитанных по осредненной скорости: $p_{rx}^B = \eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}$ на радиальную производную осредненной скорости. В последующих вычислениях будут использоваться экспериментальные зависимости $\bar{u}_x = \bar{u}_x(r)$; дифференцирование таких зависимостей, являясь некорректной операцией, увеличивает экспериментальную погрешность измерения скорости, что усугубляется тем, что производная скорости входит в (1) в квадрате, и, следовательно,

погрешность удваивается. Для повышения точности вычислений выражение $\eta \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right)^2$ представим в виде:

$$\eta \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right)^2 = p_{rx}^B \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \quad (2)$$

и будем считать, что напряжение p_{rx}^B является разностью:

$$p_{rx}^B = p_{rx} - p_{rx}^T, \quad (3)$$

где $p_{rx} = \frac{\tau_0 r}{R}$ – теоретическое распределение полного касательного напряжения при равномерном движении в круглой цилиндрической трубе; τ_0 – касательное напряжение на стенке

трубы; R – радиус трубы; $p_{rx}^T = -\overline{\rho u'_x u'_r}$ – экспериментальное [13] значение турбулентного напряжения.

Второе слагаемое в правой части (1) представляет собой плотность распределения превращения энергии осредненного движения в энергию пульсационного движения. Согласно экспериментальным данным [13] примем, что в вязком подслое (при $R - 5\Delta < r < R$, где $\Delta = \frac{\nu}{u_*}$,

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$, $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$) p_{rx}^T равно нулю, а в логарифмическом слое (при $0,8R < r < R - 30\Delta$)

$p_{rx}^T = 0,8\tau_0$. В промежуточном слое (при $R - 30\Delta < r < R - 5\Delta$) примем линейную зависимость:

$$p_{rx}^T = 0,8\tau_0 \frac{R - 5\Delta - r}{25\Delta},$$

которая непрерывно связывает граничные значения p_{rx}^T . Во внутреннем слое (при $r < 0,8R$), где производная $\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial r}$ мала, и погрешность при её вычислении не столь существенна, было принято

прямое вычисление диссипации согласно уравнению (1), а также принималось $p_{rx}^T \approx p_{rx} = \frac{\tau_0 r}{R}$.

Рассчитаем в пределах каждого слоя E^B – диссипацию механической энергии осредненного движения и E^T – превращение этой энергии в энергию пульсационного движения. Результаты расчета в диапазоне чисел Рейнольдса Re_D от 10^4 до 10^5 приведем в таблице 1. Здесь $Re_D = \frac{vD}{\nu}$, где $D = 2R$, v – средняя (расходная) скорость в трубе. Предполагается, что труба гидравлически гладкая и справедлива формула Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re_D^{0,25}}.$$

Таблица 1

Наименование слоя	$\frac{E^B}{\rho u_*^3 R}$	$\frac{E^T}{\rho u_*^3 R}$
Вязкий подслой	31,4	0
Промежуточный слой	35,26...41,86	16,1...16,3
Логарифмический слой	0,5...5,45	7,03...33,4
Внутренний слой	1,99...0,264	8,037
По всему потоку	69,86...78,97	31,1...57,7

Очевидно, что энергия пульсационного движения также превращается в теплоту, поэтому можно сравнить результаты вычислений с полной диссипацией энергии в потоке:

$$E = \tau_0 \cdot 2\pi R v = 2\pi \rho u_*^3 R \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = (99,3...132,4) \rho u_*^3 R. \tag{4}$$

Согласно таблице 1:

$$E = E^B + E^T = (100,25...136,67) \rho u_*^3 R, \tag{5}$$

что вполне удовлетворительно соответствует (4).

Как показано в [14, 15], при ламинарном режиме движения минимум диссипации механической энергии реализуется, если продольная скорость имеет параболическое распределение:

$$u_x = 2v \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (6)$$

Кроме того, там же показано, что если $Re_D > 2300$, то диссипация при турбулентном режиме меньше, чем при ламинарном (при одних и тех же граничных условиях для области, занятой жидкостью). Примем, что для цилиндрической трубы граничными условиями, накладываемыми на поле скорости, является равенство нулю скорости на стенке и значение касательного напряжения на стенке трубы τ_0 (или u_*).

Установим значение числа Рейнольдса, при котором диссипация механической энергии при ламинарном режиме $E^Л$ и при турбулентном режиме $E^Т$ равны между собой. Очевидно, что сравнивать $E^Л$ и $E^Т$ имеет смысл только при одинаковых граничных условиях. Согласно (4) имеем:

$$E^Л = \tau_0 2\pi R v_{Л} = \tau_0 2\pi R v_{Т} = E^Т, \quad (7)$$

где $v_{Л}$ и $v_{Т}$ – средние скорости для ламинарного и турбулентного режимов. Выразим эти скорости через u_* . Для ламинарного движения из (6) следует:

$$\tau_0 = -\eta \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{r=R} = -\eta 2v_{Л} \frac{2r}{R} = -4\eta \frac{v_{Л}}{R},$$

откуда

$$v_{Л} = \frac{u_*^2 R}{4\nu} = \frac{u_*}{4} Re_*, \quad (8)$$

$$\text{где } Re_* = \frac{u_* R}{\nu} = \frac{vD}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot \frac{1}{2} = 0,1 Re_D^{7/8} = 316,2 \dots 3714.$$

При турбулентном режиме воспользуемся формулой Блазиуса:

$$v_{Т} = u_* \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5u_* Re_D^{1/8} = 5u_* (10 Re_*)^{1/7}. \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в (7) и получим значение критического числа:

$$(Re_*)_{кр} = 48,38.$$

При $Re_* < (Re_*)_{кр}$ диссипация при турбулентном режиме больше, чем при ламинарном, а при $Re_* > (Re_*)_{кр}$ наоборот. Отметим, что этому значению $(Re_*)_{кр}$ соответствует $(Re_D)_{кр} = 1170$. Полученное значение $(Re_D)_{кр}$ вдвое меньше экспериментально установленного значения $(Re_D)_{кр} = 2300$. Возможно, это объясняется тем, что в реальных потоках принцип минимума диссипации не является единственно решающим при переходе от ламинарного режима к турбулентному, но главным образом тем, что формула Блазиуса при числах $Re_D < 4000$ не имеет и не может иметь экспериментального подтверждения. Кроме того, есть материалы крупномасштабных экспериментальных исследований потерь по длине [16], согласно которым при $200 < Re_D < 2000$ потери напора $h_l \sim v^{1,2}$, что указывает на сложный нестационарный характер течения жидкости в этом диапазоне чисел Рейнольдса.

Проведем подобные вычисления для двухслойной модели турбулентного потока, часто используемой на практике. Согласно этой модели вязкий подслой имеет толщину $c\Delta$, где c – безразмерная постоянная, значение которой предстоит установить, а осредненная скорость распределена линейно. Турбулентные напряжения в этом подслое малы, поэтому вся энергия осредненного движения за счет вязкости диссипирует в теплоту. В этом слое:

$$E_{\text{ВП}}^B = 2\pi\rho u_*^3 R \left(c - \frac{c^2}{\text{Re}_*} + \frac{c^3}{\text{Re}_*^2} \right). \quad (10)$$

В турбулентном ядре имеет место свободная турбулентность, и коэффициент турбулентной вязкости ν^T не зависит от радиуса r . Полагая, что скорость распределена непрерывно, найдем:

$$\frac{u_x}{\nu^T R} = \frac{u_*}{2} \frac{(R - c\Delta)^2 - r^2}{R^2} + cu_*.$$

В турбулентном ядре $\nu^T \gg \nu$, и, следовательно, здесь энергия осредненного движения почти полностью превращается в энергию пульсационного движения, и только потом диссипирует в тепло.

Суммарная потеря энергии осредненным потоком:

$$E = 2\pi\rho u_*^3 R K, \quad (11)$$

$$\text{где } K = \frac{\text{Re}_*}{4k} + c \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{c^2}{\text{Re}_*} \left(1 - \frac{3}{2k} \right) + \frac{c^3}{\text{Re}_*^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k} \right) + \frac{c^4}{4k \text{Re}_*^3}; \quad k = \frac{\nu^T}{\nu}.$$

Расход жидкости в трубе:

$$Q = \pi u_* R^2 K. \quad (12)$$

Из этого выражения получим следующее равенство:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{\text{Re}_*}{4k} + c \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{c^2}{\text{Re}_*} \left(1 - \frac{3}{2k} \right) + \frac{c^3}{\text{Re}_*^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k} \right) + \frac{c^4}{4k \text{Re}_*^3}. \quad (13)$$

Используя (13), из (11) получим, что при $c = 0$ (т.е. при отсутствии вязкого подслоя):

$$k = \frac{\text{Re}_*}{4} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 5 \dots 28,12.$$

При этом осредненная скорость имеет параболическое распределение. Такое распределение осредненной скорости турбулентного потока возможно реализуется в трубе, стенки которой имеют неровности (выступы и впадины) с геометрическими размерами, превышающими $\frac{R}{5}$, так что их нельзя рассматривать как шероховатость. Турбулентность потока определяется обтеканием отдельных неровностей и практически однородна, а пристеночный слой с логарифмическим распределением скорости не образуется. Параболическое распределение скорости соответствует минимуму диссипации энергии [14] (в нашем случае это минимум потери энергии осредненным потоком).

Найдем значения $c \neq 0$, т.е. толщину вязкого подслоя, исходя из условия, что только в этом подслое происходит непосредственная диссипация в тепломеханической энергии. Согласно таблице 1, это составляет $0,7 \dots 0,58$ от всей потери энергии осредненным потоком. Решая уравнение:

$$E_{\text{ВП}} = (0,70 \dots 0,58)E, \quad (14)$$

в которое следует подставить выражения (10) и (11), найдем:

$$c = 11,48 \dots 11,86,$$

а из равенства (13) получим:

$$k = 14,3 \dots 63. \quad (15)$$

Как видно, полученные значения c хорошо совпадают с используемым на практике $c = 11,2$. Значения k для турбулентного ядра двухслойной модели (в которое входит логарифмический и внутренний слой четырехслойной модели), как и следовало ожидать, меньше, чем значения для внутреннего слоя.

Укажем дополнительно, что из уравнения (13) можно найти значение $c = 16,76 \dots 21,29$, соответствующее $k = \infty$. При этом скорость в турбулентном ядре постоянна (квазитвердое движение), а потери энергии осредненного движения осуществляются только в виде диссипации в тепло в вязком подслое.

Используем аналогичный прием для установления значений параметров вихря Рэнкина [17]. Примем трехслойную модель осесимметричного вихря в круглоцилиндрической трубе.

1. Квазитвердая часть при $0 < r < R_\Gamma$, где R_Γ – радиус квазитвердой части. Здесь распределение азимутальной скорости линейное:

$$u_\varepsilon = u_\Gamma \frac{r}{R_\Gamma},$$

где u_Γ – скорость при $r = R_\Gamma$. В этой части диссипация отсутствует.

2. Свободный (потенциальный) вихрь (при $R_\Gamma < r < R - c\Delta$). Здесь движение турбулентное, осредненная азимутная скорость имеет распределение:

$$\bar{u}_\varepsilon = u_\Gamma \frac{R_\Gamma}{r}.$$

В этой части потока энергия осредненного движения превращается в энергию пульсационного движения:

$$E_{\text{пот}} = 4\pi\rho\nu^\tau c^2 u_*^2 \left(\frac{1}{\rho_\Gamma^2} - 1 \right),$$

где $\rho_\Gamma = \frac{R_\Gamma}{R - c\Delta}$. Здесь использовано следующее из (38) равенство $u_\Gamma R_\Gamma = cu_*(R - c\Delta)$.

3. Вязкий подслой (при $R - c\Delta < r < R$). Здесь скорость распределена линейно:

$$\bar{u}_\varepsilon = \frac{u_*^2}{\nu} (R - r),$$

а диссипация равна:

$$E_{\text{ВП}} = 2\pi\rho u_*^3 R c \left(1 - \frac{c\Delta}{2R} \right).$$

Вычислим и зафиксируем удельный (на единицу длины трубы) расход жидкости через плоскость, нормальную к вектору азимутальной скорости, полагая $c\Delta$ пренебрежимо малым по сравнению с R :

$$q = \int_0^R u_\varepsilon dr = \frac{1}{2} cu_* R (1 - 2 \ln \rho_\Gamma). \quad (16)$$

Выразим u_* из (16) и представим суммарную потерю механической энергии осредненного движения $E = E_{\text{пот}} + E_{\text{вп}}$ в виде:

$$E = 8\pi\rho\nu^T c^2 u_*^2 \left(\frac{1}{\rho_\Gamma^2} - 1 \right) \frac{q^3}{c^3 R^3 (1 - 2 \ln \rho_\Gamma)^3} + 4\pi\rho u_*^3 R c \left(1 - \frac{c\Delta}{2R} \right) \frac{q^2}{c^2 R^2 (1 - 2 \ln \rho_\Gamma)^2}.$$

Найдем значение ρ_Γ , при котором имеет место минимум E , приравняв к нулю производную E по ρ_Γ . В результате получим уравнение:

$$\left(\frac{3q}{c^2 \nu^T} - 2 \right) x + 1 = (\ln x - 2x) \ln x,$$

где $x = \rho_\Gamma^2$.

Если принять ν^T согласно (15), а $c = 11,2$, то в диапазоне $\text{Re}_R = \frac{\nu R}{\nu} = \frac{q}{\nu} = 10^4 \dots 10^5$ получим, что значение ρ_Γ изменяется в пределах: $\rho_\Gamma = 0,339 \dots 0,418$.

В заключение приведем аппроксимацию поля скорости в турбулентном ядре вихря Рэнкина в виде:

$$u_\varepsilon = u_\Gamma \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left(\frac{r}{R_\Gamma} \right)^{2n-1}}{\left(\frac{r}{R_\Gamma} \right)^{4n-2} + 1}.$$

Согласно этой зависимости при $r \rightarrow 0$ скорость u_ε линейно зависит от r , а при больших значениях r эта скорость, как в свободном вихре, обратно пропорциональна r . На рис. 1 представлено распределение скорости u_ε , рассчитанное по предлагаемой формуле.

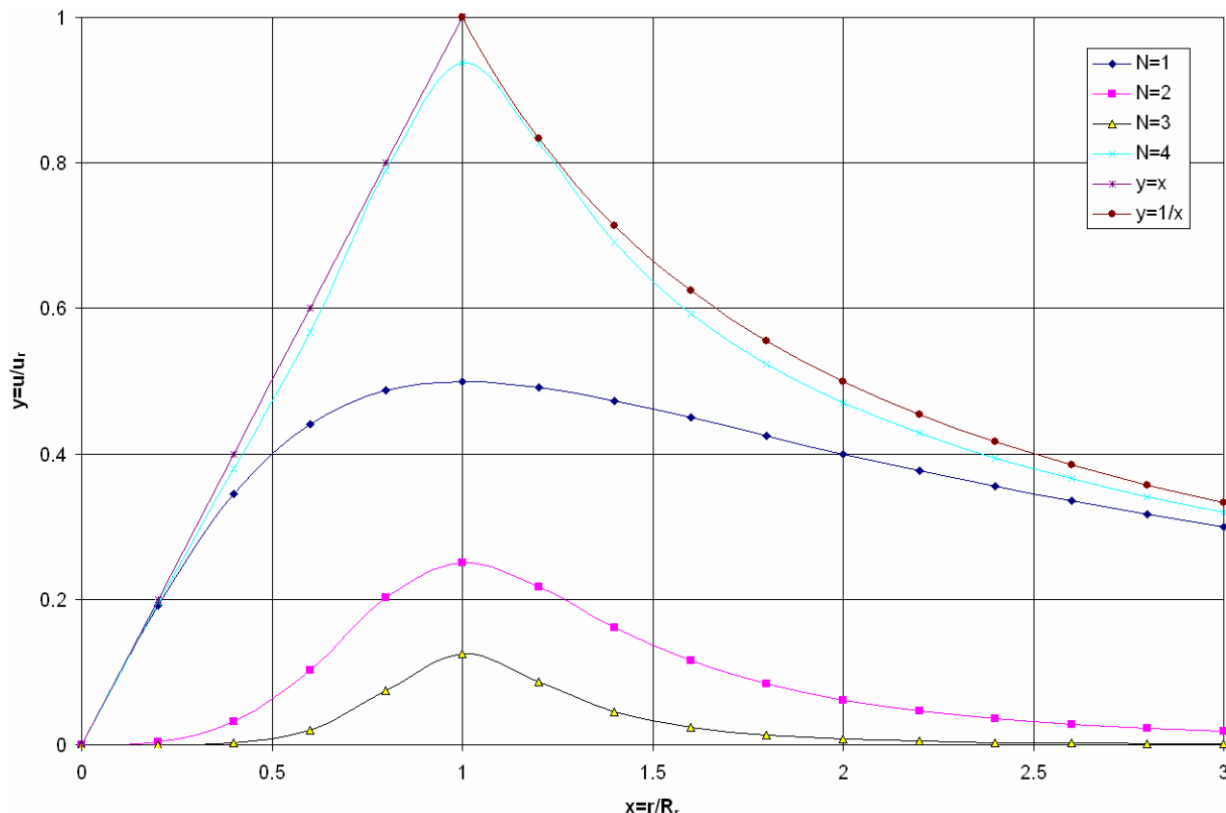


Рисунок 1. Распределения тангенциальной скорости по радиусу при различных значениях N

Литература

1. Петриченко М. Р., Петроченко М. В. Гидравлика СКТ в ограждающих конструкциях с воздушным зазором // Инженерно-строительный журнал. 2011. №8. С. 51-56.
2. Петриченко М. Р., Петроченко М. В. Достаточные условия существования свободно-конвективного течения в вертикальном щелевом канале // Научно-технические ведомости СПб ГПУ. 2012. №2-1. С. 276-281.
3. Харьков Н. С., Чамкина М. В., Петриченко М. Р. Возможно ли восстановление напора в цилиндрическом закрученном потоке // Инженерно-строительный журнал. 2011. №1. С.12-16.
4. Петриченко М. Р., Харьков Н. С. Экспериментальное исследование насосного действия винтового потока // Журнал технической физики. 2009. Том 79. Вып.7. С. 137-139.
5. Зайцев Н. О. Расчет эффективности пылеулавливания циклонного устройства для очистки газов от пыли // Научно-технические ведомости СПб ГПУ. 2006. №5-1. С. 197-202.
6. Hoffmann A. C., Stein L. E. Gas Cyclones and Swirl Tubes. Berlin, Heidelberg: Springer. Verl. 2002. 421 p.
7. Zhao Bing- tao. Effects of Flow Parameters and Inlet Geometry on Cyclone Efficiency // The Chinese Journal of Process Engineering. 2006. №2. Pp. 178-180.
8. Стрелец К. И. Численное решение уравнений турбулентной диффузии в закрученном потоке газа // Научно-технические ведомости. СПбГПУ. 2010 . №5 (108). С. 156-160.
9. Гиргидов А. А., Стрелец К. И., Ватин Н. И. Численное моделирование трехмерного поля скорости в циклоне // Инженерно-строительный журнал. 2011. №5 (23). С. 5-9.
10. Tokohama H. Jowsawa H. Energy separation in vortex tube with a divergent chamber // Het Trasfer Trans., ASME. 1981. Vol. 103. N2. Pp. 196-203.
11. Vabistas G. U. Tangential velocity and static pressure distribution in vortex chambers. // AiAA J., 1987. Vol. 25. №8. Pp. 1139-1140.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч I. М.: Наука, 1965. 640 с.
13. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в потоке с параллельными стенками. М.: Мир, 1968. 176 с.
14. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика). СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 545 с.
15. Гиргидов А. Д. О диссипации энергии при движении несжимаемой жидкости // Докл. АН. 2009. Т. 426, №5. С. 626-628.
16. Carothers S. D. Portland experiments on the flow of oil in tubes // Proc. Roy. Soc. 1912. Vol. A87. Pp. 154-163.
17. Пирралишвили Ш. А., Поляев В. Н. Сергеев М. Н. Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения / под ред. А.И. Леонтьева. М.: УНПЦ «Энергомаш», 2000. 412 с.

**Артур Давидович Гиргидов, Санкт-Петербург, Россия
Тел. раб.: +7(812)552-64-01; эл. почта: hydraulika@cef.spbstu.ru*

© Гиргидов А.Д., 2012

doi: 10.5862/MCE.32.1

Energy dissipation in circular tube

A.D. Girgidov,*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*
+7(812)552-64-01; e-mail: *hydraulika@cef.spbstu.ru*

Key words

energy dissipation; four-layer description; flow in circular tube; axial turbulent flow; Rankine vortex; minimum of dissipation principle; approximation of the velocity distribution

Abstract

Energy dissipation distribution along the circular tube radius is important in solving such problems as calculation of heat transfer by the air flow through building envelope; calculation of pressure loss in spiral flows; calculation of cyclones with axial and tangential supply of dust-containing gas.

Two types of one-dimensional radially axisymmetric flows in circular tube were considered: axial flow and rotation about the axis (Rankine vortex). Relying on two- and four-layer description of axial turbulent flow energy dissipation was calculated in each layer.

Similar calculation for Rankine vortex with viscous sublayer at the tube surface was provided. By employing the dissipation minimum principle the boundary radius between rigid rotation and free vortex is calculated. Approximation of the velocity distribution in Rankine vortex is proposed.

References

1. Petrichenko M. R., Petrochenko M. V. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 8. Pp. 51-56. (rus)
2. Petrichenko M. R., Petrochenko M. V. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU* [Science and technical sheets SPSPU]. 2012. No. 1. (rus)
3. Kharkov N. S., Chamkina M. V., Petrichenko M. R. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 1. Pp. 12-16. (rus)
4. Petrichenko M. R., Kharkov N. S. *Magazine of technical physics*. 2009. Vol. 79. No. 7. Pp. 137-139. (rus)
5. Zaytsev N. O. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU* [Science and technical sheets SPSPU]. 2006. No. 5-1. Pp. 197-202. (rus)
6. Hoffmann A.C. Stein L. E. *Gas Cyclones and Swirl Tubes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 2002. 421 p.
7. Zhao Bing-tao. Effects of Flow Parameters and Inlet Geometry on Cyclone Efficiency. *The Chinese Journal of Process Engineering*. 2006. No. 2. Pp. 178-180.
8. Strelets K. I. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU* [Science and technical sheets SPSPU]. 2010. No. 5 (108). Pp. 156-160. (rus)
9. Girgidov A. A., Strelets K. I., Vatin N. I. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 5 (23). Pp. 5-9. (rus)
10. Tokohama H. Jowsawa H. Energy separation in vortex tube with a divergent chamber. *Heat Trasfer Trans.* ASME. 1981. Vol. 103. No. 2. Pp. 196-203.
11. Vabistas G.U. Tangential velocity and static pressure distribution in vortex chambers. *AiAA J.* 1987. Vol. 25. No. 8. Pp. 1139-1140.
12. Monin A. S., Yaglov A. M. *Statisticheskaya gidromekhanika* [Statistical fluid]. Part 1. Moscow: Nauka, 1965. 640 p. (rus)
13. Kont-Bello Zh. *Turbulentnoe techenie v potoke s parallelnymi stenkami* [Turbulent flow with parallel walls]. Moscow: Mir, 1968. 176 p. (rus)
14. Girgidov A. D. *Mekhanika zhidkosti i gaza (gidravlika)* [Fluid and gas mechanics (hydraulics)]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2003. 545 p. (rus)
15. Girgidov A. D. *Doklady Akademii Nauk* [Proceedings of the Academy of Science]. 2009. Vol. 426. No. 5. Pp. 626-628. (rus)
16. Carothers S. D. Portland experiments on the flow of oil in tubes. *Proc. Roy. Soc.* 1912. Vol. A 87. Pp. 154-163.
17. Pirralishvili Sh. A., Polyaev V. N., Sergeev M. N. *Vikhrevoy effekt. Eksperiment, teoriya, tekhnicheskie resheniya* [Vortex effect. Experiment, theory, techniques]. Edited by Leontev A. I. Moscow: UNPTS «Energomash», 2000. 412 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 5-11

Stepanov V.B. The method of corrosion crack opening evaluation for the reinforced concrete structures technical state assessment