Http://www.engstroy.spb.ru – полнотекстовая версия журнала в сети Интернет. Бесплатный доступ, обновление с каждым новым выпуском

Инженерно-строительный журнал
научно-прикладное издание

ISSN 2071-4726

Свидетельство о государственной регистрации: ПИ №ФС77-38070, выдано Роскомнадзором

Специализированный научный журнал. Выходит с 09.2008.

Включен в Перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ

Периодичность: 8 раз в год

Учредитель и издатель:

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Адрес редакции:

195251, СПб, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 227А

Установочный тираж 1000 экз.

Подписано в печать 08.02.13
Формат 60x84/8, усл. печ. л. 13,5.
Заказ № 0295

Отпечатано в типографии СПбГПУ.
СПб, ул. Политехническая, д. 29

Тел. +7(812)535-52-47
E-mail: engstroy@inbox.ru

Web: Http://www.engstroy.spb.ru

Содержание

На обложке: тоннель метрополитена, Фрунзенско-Приморская линия, Санкт-Петербург

О работе анкеров в многослойных ограждающих конструкциях с наружным кирпичным слоем

***Д.т.н., профессор Р.Б. Орлович*[*],**
Западно-Померанский технологический университет;
***аспирант Н.М. Рубцов*[**];**
аспирант С.С. Зимин,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: каркасно-монолитные дома; лицевой кирпичный слой; слоистая кладка; анкеры; испытания

В связи с повышением нормативных требований к теплозащитным свойствам наружных стен широкое применение получили слоистые конструкции, состоящие из внутреннего несущего либо самонесущего слоя каменной кладки, лицевого слоя и расположенного между ними утеплителя с вентилируемым зазором или без него (рис. 1). Отечественная практика эксплуатации таких стен [1-11] выявила их повышенную дефектность, одной из причин которой является низкое качество анкеровки лицевого слоя к внутреннему. Распространенными ошибками при устройстве анкеров являются:

- недостаточная стойкость к коррозии (стоит отметить, что в зарубежной практике часто используются системы связей из нержавеющей или оцинкованной стали [12]);
- излишняя гибкость из плоскости стены;
- излишняя жесткость на сдвиг;
- низкое качество анкеровки в кладке лицевого и внутреннего слоев;
- большое расстояние между связями, т.е. недостаточное количество анкеров.

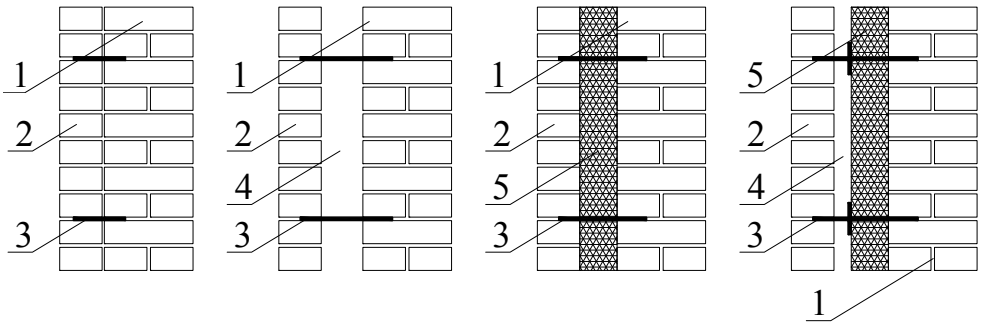

Рисунок 1. Слоистые каменные стены: а) – без вентилируемого воздушного зазора; б) – с вентилируемым зазором; в) – с утеплителем без вентилируемого зазора; г) – с утеплителем и вентилируемым зазором. (1 – внутренний слой; 2 – лицевой слой; 3 – анкеры; 4 – вентилируемый зазор; 5 – утеплитель)

Следует отметить, что ремонтопригодность многослойных ограждающих конструкций, широко применяемых в отечественной строительной индустрии, крайне невелика, а дефектовка и замена поврежденных анкерных связей является еще более сложной технологической задачей.

Целью данной работы является определение несущей способности и деформативности анкерных соединений, используемых в ограждающих конструкциях зданий.

Состояние вопроса. Оценка напряженно-деформированного состояния анкерных связей

Основной функцией анкеров является предотвращение обрушения лицевого слоя стен. Анкеры воспринимают растягивающие либо сжимающие усилия от ветровой нагрузки и действия опрокидывающего момента, вызванного внецентренным опиранием лицевого слоя на край железобетонной плиты перекрытия. Наибольшие ветровые нагрузки возникают в угловых частях в уровне верхних этажей высотных зданий. Значительные осевые усилия в анкерах могут возникать

при отсутствии горизонтальных деформационных швов [13] межу нижней поверхностью вышележащего железобетонного диска перекрытия и кладкой лицевого слоя. В связи с этим ограничение вертикальных температурных деформаций лицевого слоя по высоте, особенно, при его внецентренном опирании и разнице температур на внутренней и внешней поверхностях лицевого слоя (этому способствует отсутствие вентилируемой прослойки или вентиляции в ней) приводит к изгибу лицевого слоя из плоскости стены и, как следствие, растяжению либо сжатию анкеров.

Анкера в слоистых стенах работают также на изгиб, вызванный взаимным смещением лицевого и внутреннего слоев в результате их неравномерной усадки в различных температурно-влажностных условиях эксплуатации. Геометрические параметры, количество и глубина заделки анкеров в растворных швах кирпичной кладки зависят от следующих факторов: величины возникающих в анкерах усилий; толщины воздушной прослойки между внутренним и лицевым слоями; толщин и материалов слоев, составляющих конструкцию; расстояния между вертикальными и горизонтальными деформационными швами в лицевом слое.

Минимальное количество анкеров на 1 м^2 поверхности стены, а также размеры их сечений, регламентируемые нормами различных стран, представлены в таблице 1. При этом на участках, примыкающих к оконным и дверным проемам, а также к деформационным швам, количество анкеров увеличивается до 30–50 % (рис. 2). Количество анкеров увеличивается также при строительстве в сейсмически активных регионах.

Таблица 1. Минимальное количество гибких металлических анкеров на 1 м^2 поверхности слоистой стены

Страна	Толщина воздушной прослойки (см)	Расстояние между анкерами по вертикали и горизонтали (см)	Количество анкеров на 1 м^2 стены (шт)	Сечение гибкого анкера (мм)
Дания	12	25 x 15	2,38	d 4
Норвегия	10	46 x 50	4,35	d 5
Германия	4-15	25 x 75	5	d 4
Англия	5-7,5	45 x 90	2,5	19 x 0,6
	7,5-10	45 x 90	2,5	19 x 0,8
	10-15	45 x 45	4,94	d 5
Польша	5-15	46 x 50	4,3	d 4 – d 6

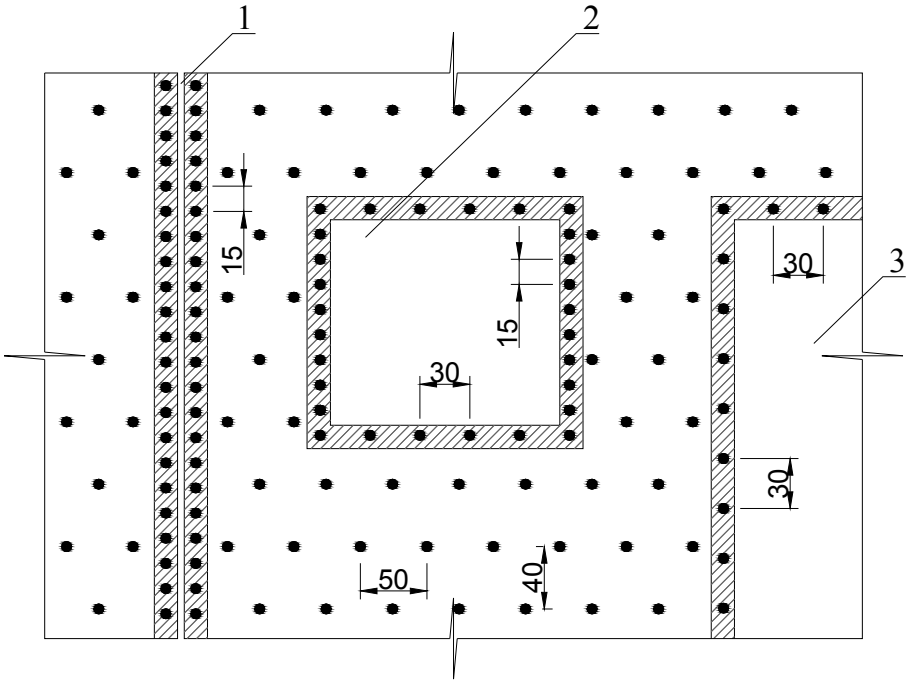

Рисунок 2. Схема расстановки анкеров в плоскости стены согласно [14] (размеры приведены в сантиметрах; на не заштрихованных участках требуется более частая расстановка анкеров): 1 – вертикальный деформационный шов, 2 – оконный проем, 3 – дверной проем

По результатам обширных зарубежных исследований [14] установлены следующие закономерности напряженно-деформированного состояния анкеров: напряжения в анкерах от изгиба могут в 10–20 раз превосходить напряжения от осевого растяжения либо сжатия; с увеличением толщины воздушной прослойки и уменьшением сечения анкеров напряжения, вызванные их изгибом, уменьшаются; наиболее напряженными являются анкера, расположенные по контуру оконных и дверных проемов, а также вдоль вертикальных и горизонтальных деформационных швов; многоцикловые температурные деформации лицевого слоя по высоте и длине стены приводят к выкрашиванию растворных швов в местах заделки анкеров и, как следствие, снижению несущей способности анкеровки.

Следует отметить, что в отечественной практике прочностные характеристики анкерных связей в кладках многослойных стен не регламентируются и зачастую неизвестны, несмотря на существование методики испытаний [15]. Согласно [16] несущая способность анкеров на растяжение должна быть не менее 600 кН, а на сжатие – 350 кН.

Для определения изгибных напряжений в анкерах от температурных деформаций лицевого слоя в зарубежной практике иногда используется следующее выражение:

$$\sigma_t = \frac{\beta \cdot E \cdot d \cdot \Delta t \cdot \alpha_t \cdot H}{t^2}, \qquad (1)$$

где β – коэффициент, зависящий от способа заделки анкера в каменных слоях кладки (β=0 при шарнирном закреплении, β=1,5 при односторонней жесткой заделке, β=3 – при двустороннем жестком закреплении);

E – модуль упругости материала анкера;

d – диаметр анкера круглого сечения либо толщина его плоского сечения;

$\Delta t = t_н - t_в$ – разница наружной и внутренней температур в лицевом слое;

α_t – коэффициент температурного расширения материала лицевого слоя;

H – расстояние между деформационными швами;

t – толщина воздушной прослойки между внутренним и лицевым слоями кладки.

Согласно экспериментальным данным [17] в стальных анкерах круглого сечения диаметром 3-5 мм при *H*=12 м напряжения от изгиба могут достигать σ_t=150–400 МПа в случае изготовления лицевого слоя из глиняного кирпича и σ_t=300–600 МПа – из силикатного. Такой уровень напряжений обусловливает необходимость изготовления анкеров из высокопрочной стали, а также недопустимость технологического выгиба (механической деформации) анкеров в процессе кладки. Необходимость выгиба анкеров, как правило, обусловлена несовпадением горизонтальных швов внутренней и облицовочной кладок. В свою очередь, выгиб анкеров приводит также к снижению их сопротивления сжатию от ветровых нагрузок и, как следствие, к преждевременной потере устойчивости из-за криволинейной формы. Кроме того, в воздушной прослойке анкеры могут подвергаться конденсационному увлажнению и, как следствие, коррозии. В связи с этим в зарубежной практике анкера в виде гибких связей изготавливаются исключительно из нержавеющей либо гальванизированной и оцинкованной стали. В случае изготовления анкерных связей из высокопрочных сталей наиболее опасным является поражение материала анкера язвенной коррозией, которая при многоцикловом нагружении анкеров от температурных и ветровых воздействий приводит к их преждевременному хрупкому разрушению.

Как уже отмечалось, при взаимном сдвиге внутреннего и лицевого слоев напряженное состояние анкеров существенно зависит от толщины воздушного зазора *t* (формула 1). В этом случае анкеры работают не только на изгиб, но и на сдвиг с образованием в предельном состоянии шарниров пластичности (рис. 3).

При этом внутреннее плечо «с» пары сил Vc составляет примерно 6 толщин d анкерных стержней [17]. Более точные экспериментальные данные для кладки из полнотелых камней и при толщине воздушного зазора *t*=0 получены в работе [18], согласно которой плечо пары сил равно:

$$C = \frac{1,33 \cdot f_y \cdot d^3}{V_{obs}}, \qquad (2)$$

где f_y – расчетное значение предела текучести стали анкеров;

d – диаметр анкеров;

V_{obs} – несущая способность анкерного соединения при сдвиге.

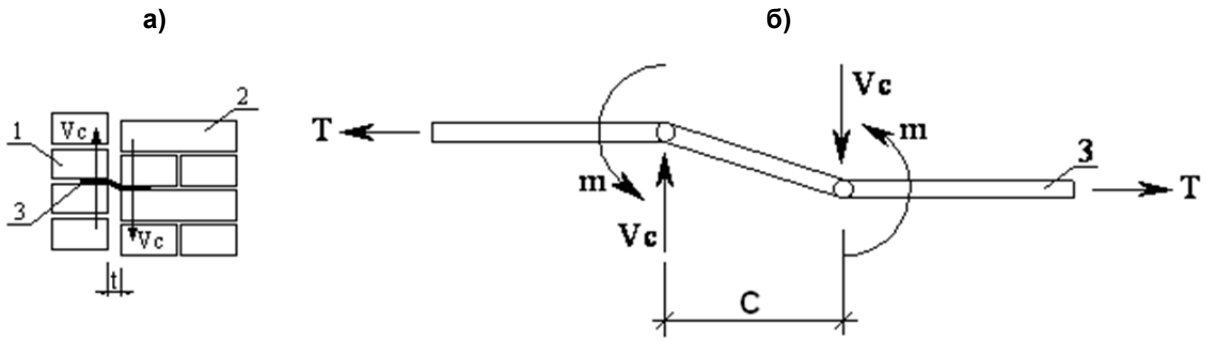

Рисунок 3. Схемы деформирования (а) и образования шарниров пластичности «m» (б) в анкерах (3) при вертикальном сдвиге лицевого слоя (1) относительно внутреннего (2)

Работоспособность анкеров также существенно зависит от величин сжимающих напряжений в каменной кладке. При низких значениях сжимающих напряжений сдвиговые усилия Vc вызывают концентрацию напряжений в области контакта анкеров с каменной кладкой (рис. 4). Такое состояние характерно для самонесущих стен, являющихся заполнением каркаса здания. Согласно работе [19] величина сдвигового усилия в этом случае определяется из выражения:

$$V_c = \frac{f_{yk} \cdot w}{2 \cdot c} + \left(k \cdot \sigma + \mu \cdot f_m\right) \cdot \frac{w \cdot c}{4}, \qquad (3)$$

где f_{yk} – характеристическое значение предела текучести материала анкеров;

w – ширина анкера;

c – плечо пары сил V_c;

σ – сжимающие напряжения в кладке;

f_m – прочность кладки на сжатие;

k = 25, μ =1,5 – эмпирические коэффициенты.

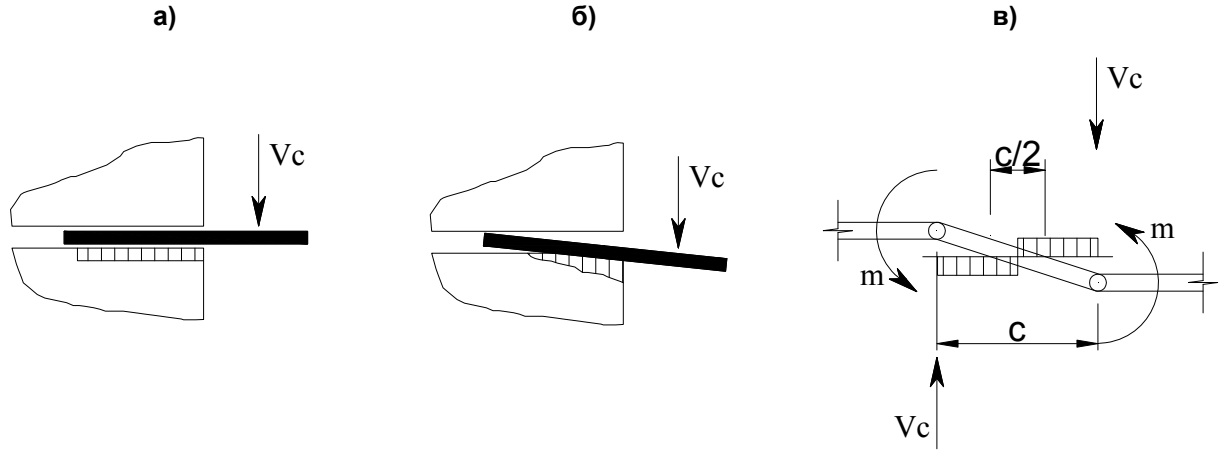

Рисунок 4. Схемы работы анкеров на сдвиг в зависимости от величины сжимающих напряжений σ в каменной кладке: а) – при больших значениях σ; б) – при малых значениях σ; в) – распределение усилий в анкере диаметром d (белыми кругами обозначены шарниры пластичности m в анкерах)

Следует отметить, что работа анкеров на сдвиг в европейской практике регламентируется нормами [17, 20].

При образовании шарниров пластичности анкеры являются работоспособными только в том случае, если не произойдет их вырывание из горизонтального растворного шва. Этому должны препятствовать усилия анкеровки T (рис. 3б), зависящие от сил сцепления между анкером и растворными швами, и сил прижима, вызванных сжимающими напряжениями в каменной кладке. Концентрация сжимающих напряжений в зоне анкеров в случае изготовления каменной кладки из камней низкой прочности может привести к их выкрашиванию и уменьшению эффективной длины анкеровки. Такое явление наблюдается в лицевом слое в случае его изготовления из керамических камней с высокой пустотностью и во внутреннем слое стены, изготавливаемом из низкопрочных пенобетонных и газосиликатных блоков. В наиболее неблагоприятном состоянии находятся анкера, расположенные в верхних верстах каменного заполнения каркасных зданий, где сжимающие напряжения достигают минимальных величин.

Лабораторные испытания анкеров на выдергивание

Учитывая неполноту информации о работоспособности применяемых в стране анкеров [1-4], авторами выполняются два цикла экспериментальных исследований их несущей способности и деформативности. Ниже представлены отдельные результаты лабораторных испытаний на выдергивание анкеров из растворных швов.

В рамках первого цикла применялись образцы, выполненные из керамических пустотелых (пустотность 40%) и полнотелых кирпичей марки М100. Кирпичи объединялись цементно-песчаным раствором М125, в который втапливались анкеры на ширину кирпича, то есть на 120 мм. Предметом исследований были анкеры, представленные на рис. 5.

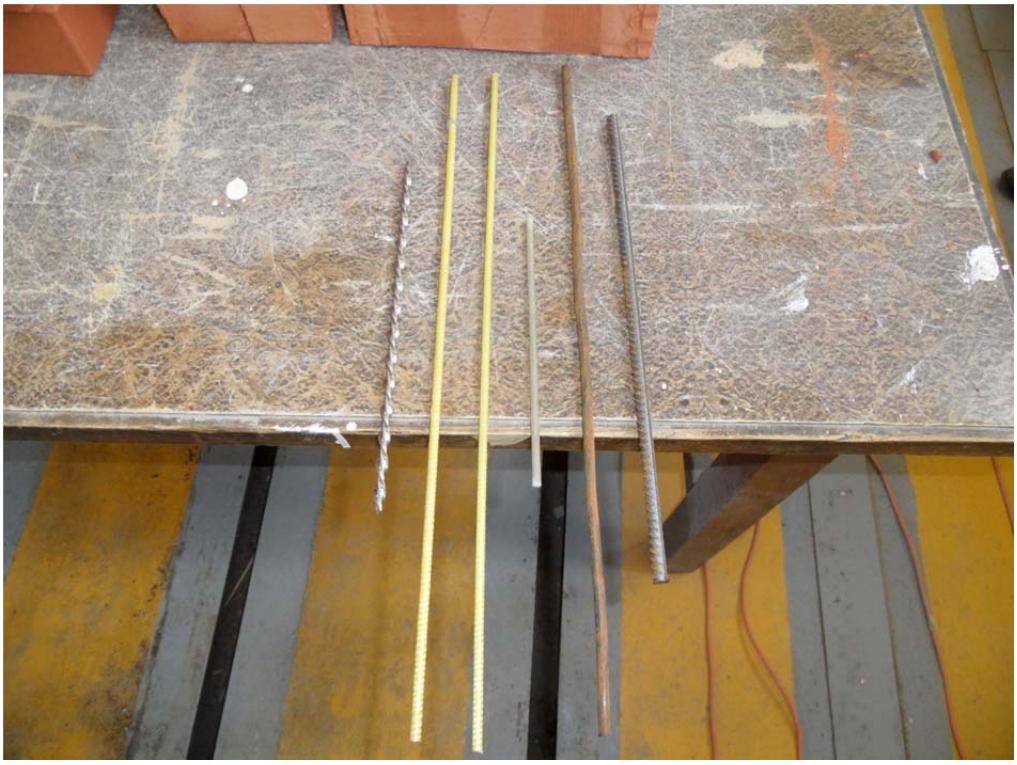

Рисунок 5. Вид испытанных анкеров, выдергиваемых из растворных швов:
1 – спиралевидные анкеры из нержавеющей стали фирмы «DESOI» диаметром 8 мм;
2 – стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм;
3 – стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм, снабженные «якорем» из деформированной стальной шайбы;
4 – стекловолоконные анкеры постоянного сечения диаметром 6 мм;
5 – горячекатаная ребристая арматура класса А400 диаметром 10 мм

Выдергивание стержней осуществлялось в разрывной машине в специально изготовленном приспособлении. Во время испытаний регистрировались деформации сдвига стержней относительно растворных швов. Результаты испытаний на выдергивание представлены в таблице 2 в виде максимального выдергивающего усилия.

Таблица 2. Результаты испытаний первого цикла

№	Вид анкеров	Максимальное выдергивающее усилие (кН)	
		кладка из полнотелого кирпича	кладка из пустотелого кирпича
1	Спиралевидные анкеры из нержавеющей стали фирмы «DESOI» диаметром 8 мм	7,1	5,2
2	Стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм без «якоря»	11,0	10,6
3	Стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм с «якорем»	14,6	13,6
4	Стекловолоконные анкеры постоянного сечения диаметром 6 мм	4,5	-
5	Горячекатаная ребристая арматура класса А400 диаметром 10 мм	7,1	7,0

Из полученных данных можно сделать следующие выводы:

- вне зависимости от типа анкеров значения выдергивающих усилий больше в образцах из полнотелых кирпичей;
- применение «якоря», выполненного из сплющенной шайбы, на конце стекловолоконного анкера с ребристой поверхностью диаметром 7 мм увеличивает несущую способность соединения на 25%.

В рамках второго цикла применялись такие же образцы, выполненные из керамических пустотелых и полнотелых кирпичей. Кирпичи объединялись цементно-песчаным раствором М100, в который втапливались анкеры на ширину кирпича, то есть на 120 мм. Помимо кирпичной, имитировалась кладка из газобетонных блоков. Для изготовления этих образцов применялись наиболее распространенные на строительном рынке блоки, напиленные под размер для изготовленного ранее приспособления. Образцы склеивались рекомендованным для данного типа кладок клеевым составом. Предметом исследований были анкеры, представленные на рис. 6.

Рисунок 6. Вид испытанных образцов анкеров, выдергиваемых из кирпичных растворных швов (а – полнотелый кирпич и б – пустотелый кирпич) и клеевого слоя кладки из газосиликатных блоков (в):
1 – спиралевидные анкеры из нержавеющей стали фирмы «DESOI» диаметром 8 мм;
2 – стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм с «якорем»;
3 – стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм без «якоря»;
4 – горячекатаная ребристая арматура класса А400 диаметром 10 мм;
5 – стальная арматура постоянного сечения 6мм;
6 – стекловолоконные анкеры постоянного сечения диаметром 6 мм;
7 – стальной трос диаметром 10 мм; 8 – стальной трос диаметром 5 мм

Результаты испытаний на выдергивание приведены в таблице 3 в виде максимального выдергивающего усилия. Методика испытаний аналогична применяемой в первом цикле испытаний.

Таблица 3. Результаты испытаний второго цикла

№	Вид анкеров	Максимальное выдергивающее усилие (кН)		
		кладка из полнотелого кирпича	кладка из пустотелого кирпича	кладка из газосиликатных блоков
1	Спиралевидные анкеры из нержавеющей стали фирмы «DESOI» диаметром 8 мм	3,92	4,12	3,24
2	Стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм с «якорем»	11,18	9,81	-
3	Стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм без «якоря»	4,41	9,61	4,81
4	Горячекатаная ребристая арматура класса А400 диаметром 10 мм	7,7	11,58	4,41
5	Стальная арматура постоянного сечения диаметром 6 мм	9,41	4,91	1,96
6	Стекловолоконные анкеры постоянного сечения диаметром 6 мм	0,83	0,95	
7	Стальной трос диаметром 10 мм	6,47	2,21	2,94
8	Стальной трос диаметром 5 мм	4,71	4,41	3,92

Результаты испытаний показали следующее.

- В соединениях с применением жестких анкеров переменного сечения выдергивающее усилие увеличивается при использовании пустотелого кирпича. Исключение – стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм с «якорем», что обусловлено концентрацией напряжений на внутренних стенках кирпича, формирующих пустоты, и их преждевременным разрушением.
- В соединениях с применением анкеров с гладкой поверхностью (стальной стержень сечения диаметром 6 мм) выдергивающее усилие увеличивается при использовании полнотелого кирпича.
- При использовании анкеров одинакового диаметра с гладкой поверхностью решающую роль играет материал, из которого изготовлен анкер. Наибольшее усилие зафиксировано при испытаниях образцов с анкерами из стали. Стекловолоконные анкеры с гладкой поверхностью проскальзывали сразу после нагружения при относительно небольших величинах выдергивающих усилий.
- В соединениях с применением стальных тросов значение выдергивающих усилий в большей степени зависит от диаметра анкера, при этом при диаметре анкера 10 мм значение выдергивающих усилий более чем в два раза выше в образцах из полнотелого кирпича. В случае со стальным тросом диаметром 5 мм выдергивающие усилия не зависят от вида кирпичей.
- При испытаниях образцов анкеровки в кладке из газосиликатных блоков решающим фактором является поверхность анкера. Практически во всех случаях применения спиралевидных анкеров и анкеров с ребристой поверхностью значения выдергивающих усилий находились на одном уровне. Максимальное значение зафиксировано при использовании стекловолоконных анкеров с ребристой поверхностью диаметром 7 мм без «якоря». Стоит отметить, что характер разрушения всех образцов, за исключением спиралевидных анкеров, идентичен – разрушение происходило по материалу кладки (рис. 7).

Рисунок 7. Пример разрушения образца из газобетона

Испытания первого и второго цикла отличаются маркой применяемого раствора, это позволит выявить зависимость между маркой раствора и выдергивающим усилием. Для наглядности результаты испытаний представлены в сводной таблице.

Таблица 4. Результаты первого и второго цикла испытаний

№	Вид анкеров	Максимальное выдергивающее усилие (кН) при М125		Максимальное выдергивающее усилие (кН) при М100	
		кладка из полнотелого кирпича	кладка из пустотелого кирпича	кладка из полнотелого кирпича	кладка из пустотелого кирпича
1	Спиралевидные анкеры из нержавеющей стали фирмы «DESOI» диаметром 8 мм	7,1	5,2	3,92	4,12
2	Стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм без «якоря»	11,0	10,6	4,41	9,61
3	Стекловолоконные анкеры с ребристой поверхностью диаметром 7 мм с «якорем»	14,6	13,6	11,18	9,81
4	Стекловолоконные анкеры постоянного сечения диаметром 6 мм	4,5	-	0,83	0,95
5	Горячекатаная ребристая арматура класса А400 диаметром 10 мм	7,1	7,0	7,7	11,58

Выводы

Из полученных данных следует, что несущая способность анкеров на выдергивание оказывается практически одинаковой для кладок из пустотных и полнотелых кирпичей в случае применения растворов большей марки. При меньшей прочности растворных швов первостепенное значение имеют характеристики анкеров: гибкость, диаметр и шероховатость поверхности.

Наибольшая несущая способность получена для стекловолоконных анкеров с ребристой поверхностью, что объясняется повышенными силами сцепления в области контакта поверхности с растворным швом, однако данные анкеры требуют более глубокого изучения с точки зрения влияния на их материал щелочесодержащих растворов, изменений температуры и т.д.

Наличие «якоря» на конце стекловолоконного анкера приводит к увеличению выдергивающего усилия до 30%, но в отдельных случаях приводит к разрушению материала кладки.

Повышенная прочность и жесткость анкерных связей не гарантирует увеличения их анкерующей способности.

Сечения анкеров должны быть подобраны таким образом, чтобы при их увеличении не разрушались растворные швы, а при уменьшении не происходило разрыва от растяжения. В этом смысле удачно себя зарекомендовали спиралевидные анкеры, которые обладают относительно малой площадью сечения и значительной площадью контакта с материалом шва. Однако они подвержены значительным деформациям при относительно небольших нагрузках.

В заключение следует отметить, что полученные данные могут значительно отличаться от реальных условий стройплощадки и тем более эксплуатации, в связи с этим планируются испытания анкеров на реальных объектах.

Литература

1. Ищук М.К. Российский опыт возведения наружных стен с лицевым слоем из кирпичной кладки // Технология строительства. 2009. Вып. 64. №2. С. 28-37.
2. Гроздов В.Т. О недостатках существующих проектных решений навесных наружных стен в многоэтажных монолитных железобетонных зданиях. Дефекты зданий и сооружений. СПб.: ВИТУ, 2006. С. 15-21.
3. Орлович Р.Б., Деркач В.Н. Сопряжение лицевого слоя сплошных каменных стен с плитами перекрытий // Промышленное и гражданское строительство. 2011. №11. С. 60-63.
4. Ананьев А.А., Гохберг Ю.Ц. Пути повышения срока безремонтной службы наружных стен жилых зданий, облицованных кирпичом // Промышленное и гражданское строительство. 2011. №1. С. 14-19.
5. Кнатько М.В., Пестряков И.И. Горщков А.С., Рымкевич П.П. Опыт испытания стеновой конструкции в лабораторных и натурных условиях с целью прогнозирования ее эксплуатационного срока службы // II Всероссийская научно-техническая конференция «Строительная теплофизика и энергоэффективное проектирование ограждающих конструкций зданий». Санкт–Петербург, 2009. С. 56-66.
6. Ищук М.К. Требования к многослойным стенам с гибкими связями // Жилищное строительство. 2008. №5. С. 15-19.
7. Ищук М.К. Причины дефектов наружных стен с лицевым слоем из кирпичной кладки // Жилищное строительство. 2008. №3. С. 28-31.
8. Лобов О.И., Ананьев А.И. Долговечность наружных стен современных многоэтажных зданий // Жилищное строительство. 2008. №8. С. 48-52.
9. Деркач В.Н. Повреждения керамической облицовки наружных стен многоэтажных каменных зданий // Вестник Брестского государственного технического университета. Строительство и архитектура. 2009. №1. С. 199-209.
10. Милонов В.М. Исследование облегченных кирпичных стен: автореф. дисс. … канд.техн.наук. М.: ЦНИПС, 1952.
11. Здания с монолитными железобетонными несущими конструкциями. Наружные стены из легкобетонных блоков с облицовкой кирпичом. Технические решения / ЦНИИЭП жилища. М., 2005.
12. Murauer T. Edelstahl im zweishaligen Mauerwerk – Sicherheit im Hintergrund // Mauerwerk. 2006. №6. Pp. 230–234.
13. Beasley K.J. Masonry Facade Stress Failures // The Construction specifier. 1998. Vol.51. No.2.
14. Jager W., Pfeifer G. Konstruktionsregeln für Mauerwerk. Mauerwerk Kalender. Berlin, 2005. Pp. 233-264.
15. Грановский А.В., Киселев Д.А. О методике испытаний анкеров на вырыв из различных стеновых материалов и возможных областях их применения // Жилищное строительство. 2010. №2. С. 7-8.
16. EN 846-5: 2002 (Еврокоды) Определение несущей способности и жесткости анкеров, работающих на сжатие и растяжение.
17. EN 846-7: 2002 (Еврокоды) Определение несущей способности и жесткости на сдвиг анкеров и связей.
18. Roumani N.A. The shear strength of prestressed brichwork sections. PhD thesis. University of Manchester, 1985.
19. Simudic G., Page A.W. Australian developments in the use of walls of geometric section // 7th North American Masonry Conference, University of Notre Dame – South Bend, Indiana, USA. 1996. Vol. 2. Pp. 1007-1018.
20. Phipps M.E., Montague T.I. The behaviour and design of steel shear connectors in plain and prestressed masonry // 7th North American Masonry Conference, University of Notre Dame – South Bend, Indiana, USA. 1996. Vol. 2. Pp. 789-798.

**Роман Болеславович Орлович, г. Щецин, Польша*

Тел. раб.: 48-661868850, эл. почта: orlowicz@mail.ru

***Никита Михайлович Рубцов, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: +7(921)317-96-18; эл. почта: nrubtsov@stpr.ru

О методике определения коррозионного износа стальных конструкций

инженер С.Д. Федотов;
к.т.н., доцент А.В. Улыбин*;
д.ф.-м.н., профессор Н.Н. Шабров,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: коррозионный износ; стальные конструкции; ультразвуковая толщинометрия; обследование строительных конструкций

Хорошо известно, что коррозионные потери металлических конструкций приносят большой экономический ущерб. Коррозионное разрушение элементов стальных конструкций и арматуры в железобетоне является одним из основных факторов, приводящих к недопустимому и аварийному состоянию конструкций [1]. Скорость коррозии изменяется в широких пределах от 0,05 до 1,6 мм в год [2] и зависит от коррозионной стойкости металла, параметров агрессивной среды, наличия и состояния антикоррозионной обработки, конструктивного решения и прочих факторов.

Определение фактического коррозионного износа эксплуатируемых стальных конструкций необходимо как для контроля их технического состояния и своевременного восстановления, так и для предотвращения аварий (отказов и обрушений).

В современных нормативах по обследованию, технической литературе и научных трудах вопрос правильного определения коррозионного износа раскрыт не полностью. Из имеющихся указаний не всегда четко понятно, чем и как измерять потери, какие участки выбирать и как их подготавливать. Нет однозначного мнения о том, как отображать результат измерений. Таким образом, необходимо обобщить имеющиеся в литературе данные и разработать методику контроля с учетом современного приборного обеспечения.

Контроль коррозионных потерь на практике сводится к двум основным задачам:

1) определение фактического остаточного сечения металлического элемента;
2) сравнение фактической толщины с изначальной (либо измеренной на предыдущем этапе обследования).

Казалось бы, обе указанные задачи весьма легко решаются. Однако на практике возникают проблемы как при измерении толщины поврежденной конструкции, так и при сопоставлении ее с изначальной. Также не всегда очевидно, как наиболее удобно и информативно отобразить результат исследования. Решению данных проблем, схематично представленных на рис. 1, посвящена данная статья.

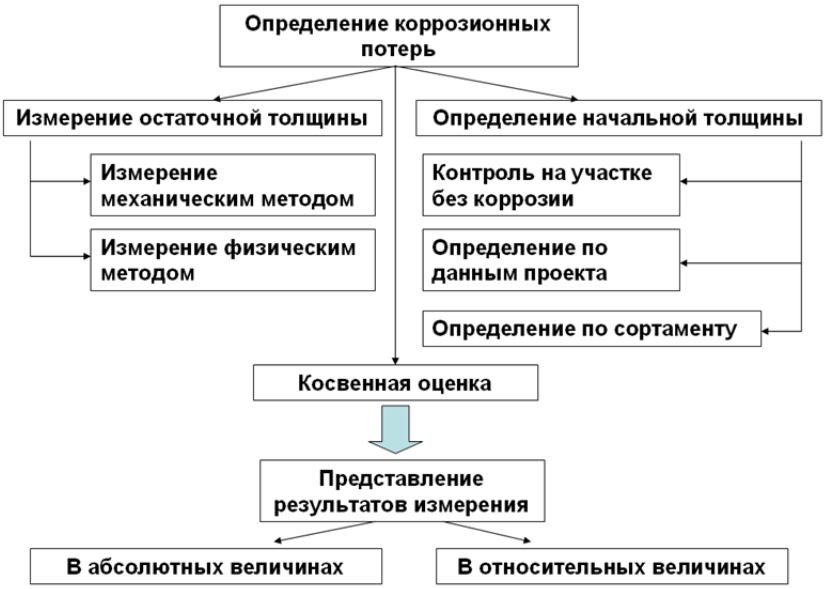

Рисунок 1. Методы определения коррозионных потерь

В статье рассмотрены основные методы контроля, реализуемые при наличии сплошной коррозии металла. Вопросы измерения местной коррозии (язвенной, питтинговой, межкристаллитной и др.) в данном материале не рассматриваются.

Измерение остаточной толщины механическим методом

Прежде чем рассматривать вопрос толщинометрии, необходимо отметить, что обмеры металлических конструкций требуют максимальной точности измерений по сравнению с конструкциями из других материалов. Согласно нормативно-методическим документам [3] и технической литературе [4] точность измерения должна быть не менее 0,05-0,1 мм.

Наиболее простым и требующим минимальных затрат на оборудование способом является определение фактической толщины элементов стальных конструкций с помощью различных механических измерительных приборов. Для реализации указанных целей с обеспечением необходимой точности рекомендуется использовать штангенциркули, микрометры и механические толщиномеры, а также измерительные скобы [3, 5].

На практике применение наиболее доступных из указанных средств, а именно штангенциркулей, не всегда удобно, а иногда невозможно. Объясняется это тем, что измерение штангенциркулем можно осуществить только на открытых участках профилей (перья уголков, полки двутавров и швеллеров и др.) (рис. 2). Особенно часто возникает необходимость измерения остаточной толщины более тонкого элемента сечения, которым является стенка в швеллерах и двутаврах. В большинстве случаев свободный конец профиля (на участках опирания) недоступен и, соответственно, измерение выполнить невозможно. Вторым существенным ограничением является длина губок штангенциркуля. При этом имеется возможность измерения толщины металла только на участках, расположенных вдоль края исследуемого профиля в пределах полосы, равной длине губок.

Рисунок 2. Измерение остаточной толщины штангенциркулем

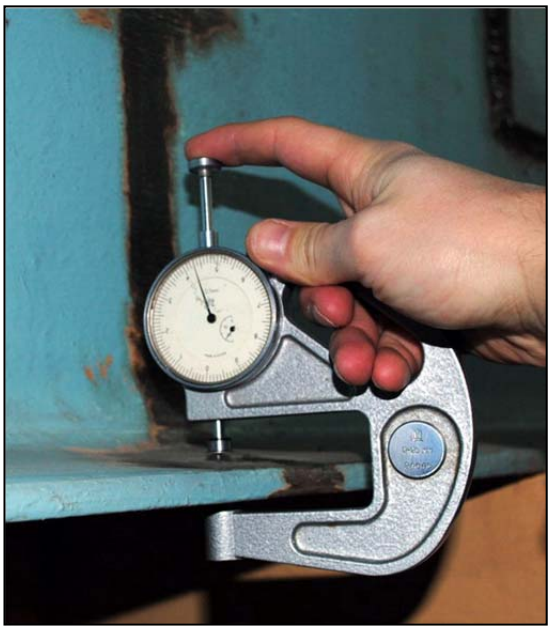

Рисунок 3. Измерение остаточной толщины ИЧТ со скобой

Рисунок 4. Микрометр-толщиномер

Более удобными средствами измерения являются толщиномеры со скобой. Применяя их, возможно выполнить измерение толщины на локальных участках, расположенных на отдалении от краев исследуемого элемента. При неравномерном коррозионном повреждении данное преимущество будет решающим в сравнении со штангенциркулем. Помимо этого, при использовании толщиномера с мессурой (рис. 3) может быть увеличена точность измерения по сравнению с механическим штангенциркулем до 0,01 мм и более. С другой стороны, применение механических толщиномеров в виде скоб сопровождается теми же ограничениями, что и у штангенциркулей.

Очевидно, что применение вышеуказанных механических средств измерения невозможно на элементах замкнутого профиля – трубах, которые применяются с каждым годом все в больших объемах. Единственно возможный способ механического измерения толщины замкнутого профиля заключается в сверлении отверстия и измерении специализированным микрометром (рис. 4). При этом точность измерения и производительность контроля резко снижаются.

Измерение остаточной толщины физическим методом

Для определения толщины, сплошности и других параметров изделий и покрытий, выполненных из различных материалов, используется широкий спектр физических методов неразрушающего контроля (НК). Среди них можно отметить магнитные, вихретоковые, радиоволновые методы и др. [6].

Одним из наиболее успешно применяемых физических методов контроля толщины и других параметров стальных конструкций является ультразвуковой метод. Подтверждением тому стало повсеместное изучение и применение ультразвуковых приборов (толщиномеров и дефектоскопов) в отечественной и зарубежной практике [7-17]. Данный метод основан на способности ультразвуковых волн отражаться на границе раздела сред [18-21]. Необходимо отметить, что для целей, описываемых в настоящей работе, ультразвуковой эхо-метод является единственно применимым среди физических методов НК [6].

Основные преимущества использования современных приборов, реализующих ультразвуковой метод толщинометрии:

- возможность контроля при одностороннем доступе;
- работа на участках, удаленных от края конструкции (без наличия открытых краев);
- высокая производительность;
- достаточная точность измерений;
- относительно простые требования по предварительной подготовке участка измерения.

Рисунок 5. Измерение толщины с помощью ультразвукового прибора

В России широко применяются ультразвуковые толщиномеры как отечественных, так и зарубежных производителей (ООО «АКС», ООО «Технотест», ЗАО «Константа», «Olympus» и др.). Наиболее удобными для работы в полевых условиях являются приборы-моноблоки (рис. 5). Безусловно, у них есть и недостатки, среди которых ограниченный диапазон измеряемых толщин, меньшая емкость аккумулятора и другие.

Для использования большинства ультразвуковых толщиномеров необходима подготовка поверхности стали путем зачистки или (предпочтительно) шлифовки участка измерения. С одной стороны, данное обстоятельство снижает производительность контроля, а в случае отсутствия источника электроснабжения – весьма существенно. С другой стороны, подготовка участка измерения также необходима для обеспечения нормальной точности контроля механическими толщиномерами. Кроме того, доступность портативных аккумуляторных инструментов для механической обработки поверхности металла в наши дни практически устраняет эту проблему.

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод о том, что преимущество ультразвуковых приборов перед механическими толщиномерами очевидно.

Определение начальной толщины сечения

Чтобы понять, каковы потери металла, необходимо знать его начальную толщину. Самым простым и достоверным способом является измерение толщины исследуемого элемента в неповрежденном сечении. В случае неограниченного (в пространстве) и продолжительного доступа агрессивной среды к открытым элементам зачастую вся площадь элемента имеет коррозионное повреждение. В данном случае определить изначальную толщину элемента прямым измерением невозможно.

В такой ситуации параметры сечения элементов определяют либо по проектной документации, либо по сортаменту металлопроката. Данный подход имеет невысокую достоверность и в ряде случаев невозможен (отсутствие документации, применение нестандартных сварных профилей и пр.). Если же проектная документация доступна для анализа, вероятность определения искомых параметров выше. Однако нет гарантии того, что возведенные конструкции полностью соответствуют проектному решению, а в реалиях отечественного строительства – исполнительной документации.

Выявление толщин элементов по сортаменту путем определения общих габаритов сечения (высоты и ширины) также не всегда возможно. Если конструкции выполнены из швеллеров и двутавров, для решения задачи необходимо наличие сортаментов, соответствующих периоду изготовления профилей. Однако при обследовании конструкций не всегда удается определить соответствие профилей конкретному сортаменту. При обследовании труб и уголков использование сортамента для определения начальной толщины невозможно, так как одним и тем же габаритам сечений соответствует большой диапазон толщин. Например, равнополочный уголок №50 по ГОСТ 8509-93 может иметь начальную толщину от 3,0 до 8,0 мм с шагом 1,0 мм.

Косвенный метод контроля коррозионных потерь

В нормативах и технической литературе по обследованию зданий [3, 22] можно встретить рекомендации применять для приблизительной оценки величины коррозионных потерь косвенный метод. Суть его заключается в измерении толщины слоя продуктов коррозии и в оценке величины повреждения, равной 1/3 толщины коррозионных окислов.

Достоверность такого подхода с нашей точки зрения весьма сомнительна по следующим причинам. В основу идеи, вероятно, положен тот факт, что продукты коррозии имеют плотность существенно меньшую, чем разрушенный металл. Можно предположить, что для достоверной реализации метода плотность коррозионных окислов должна быть в 3 раза меньше плотности стали. Однако по результатам измерений, выполненных авторами на различных объектах, отношение плотностей продуктов коррозии (без учета объема открытых пор и воздушных прослоек) и стали изменяется в диапазоне 2,1…2,6 раза (табл. 1).

Таблица 1. Плотность коррозионных окислов

№	Объект	Элемент отбора	Условия эксплуатации	Плотность окислов, т/м^3	Отношение к плотности стали
1	Балки междуэтажного перекрытия жилого здания	Полка балки	Увлажнение во время протечек	3,06	2,6
2		Стенка балки	То же	3,42	2,3
3	Канализационная решетка лаборатории	Уголок решетки	Периодическое увлажнение	3,53	2,2
4	Отстойник канализационных очистных сооружений	Подкос лотка	Под уровнем жидкости	3,53	2,2
5		Уголок водослива	Постоянное увлажнение	3,71	2,1

Можно было бы опровергнуть данные утверждения тем, что именно за счет наличия пор и воздушных прослоек толщина продуктов коррозии как раз в три раза больше поврежденного слоя металла. Однако в этом и заключается вторая причина невозможности реализации косвенного подхода. Плотность «упаковки» продуктов коррозии (соотношение воздушных прослоек и пор с объемом окислов) зависит от разных факторов. К ним в разной степени относятся вид агрессивной среды, периодичность доступа среды к материалу, наличие микроорганизмов, являющихся катализатором процесса [23], и другие. В большей степени играет роль конструктивное решение, а именно наличие прилегающих к корродирующему элементу других конструкций, препятствующих свободному накоплению продуктов коррозии.

Авторам не раз приходилось наблюдать при обследовании однотипных конструктивных элементов различные по своей структуре продукты коррозии. Например, в одном из зданий постройки конца XIX века плотность коррозионных окислов, зафиксированных на стенках балок перекрытий, отличалась в разы. Причиной высокой плотности окислов являлось межбалочное заполнение в виде кирпичных сводиков, препятствующих свободному накоплению коррозионных слоев. На другом перекрытии того же здания коррозионные «пироги» вдоль стенок двутавровых балок имели суммарную толщину 5,0-7,0 см при толщине потерь стали 5,0-7,0 мм (рис. 6). В данном случае заполнение между балками было сделано в виде деревянного наката.

Рисунок 6. Слоистые коррозионные окислы, отобранные с балок перекрытия

Подводя итоги, необходимо отметить, что указанный косвенный метод мог бы быть реализован только в случае, когда продукты коррозии накапливаются за весь коррозионный период и не удаляются с места образования. В условиях открытых элементов (металлические фермы, колонны и пр.) невозможно однозначно определить суммарную толщину продуктов коррозии, которые могли либо быть счищены во время эксплуатации, либо просто упали с конструкции под собственным весом.

Представление результатов измерения

Еще одной проблемой, не освещенной в литературе, является вопрос о том, как представлять результат измерения износа. Имеются следующие варианты: в абсолютных единицах (мм, мкм); в процентах от толщины отдельного элемента сечения (полки, стенки); в процентах от площади всего сечения. Необходимо отметить, что аварийный критерий коррозионного износа, имеющийся в документах [3, 24], выражается в процентах от площади сечения. Как правило, износ, нормируемый как аварийный, составляет 25% площади.

Для выполнения поверочных расчетов мало иметь информацию о потере площади сечения (либо о фактической площади остаточного сечения). Такая информация может быть достаточной только для расчета растянутых элементов. Для расчета сжатых и изогнутых элементов необходимо знать фактические габариты всех элементов сечения (полок, стенок, перьев уголков и др.). Поэтому представление результатов измерений в процентах от площади сечения недостаточно информативно. Установить процент потери площади сечения прямым измерением не представляется возможным, так как данный параметр можно определить только пересчетом. Это утверждение обосновывается следующим: в случае одинаковой скорости коррозии всех элементов сечения величина потерь будет одинакова по абсолютной величине (мм), при этом износ в процентах будет равен только для элементов с одинаковой начальной толщиной. Однако случаи равномерной коррозии всех элементов сечения с одинаковой скоростью встречаются редко.

Часто ошибка исследователей связана с тем, что потери измеряются только в одном из элементов сечения, по которому и делают вывод о коррозионном износе сечения в целом. Такой подход ошибочен, так как в зависимости от пространственного расположения, типа сечения, доступа агрессивной среды и других факторов износ разных частей сечения будет различным [25]. Характерным примером является коррозия двутавровых балок в воздушной среде. При равномерном доступе агрессивной среды большему износу будут подвергаться верхняя поверхность горизонтально расположенных частей сечения (например, полок). Это происходит за счет скопления на них влаги, пыли, продуктов коррозии, ускоряющих процесс разрушения.

При определенных условиях, связанных, как правило, с доступом агрессивной среды, глубина коррозионных потерь сильно изменяется даже в пределах одного элемента сечения. В качестве примера на рис. 7. представлено сечение двутавровой балки надподвального перекрытия с коррозионными потерями. Как видно из рисунка, максимальные повреждения имеются на краях нижней полки и достигают 100% толщины. При этом по мере приближения к стенке процент износа уменьшается. Принять по измерению на краях, что полка, а тем более все сечение полностью утрачено, было бы в корне неправильным.

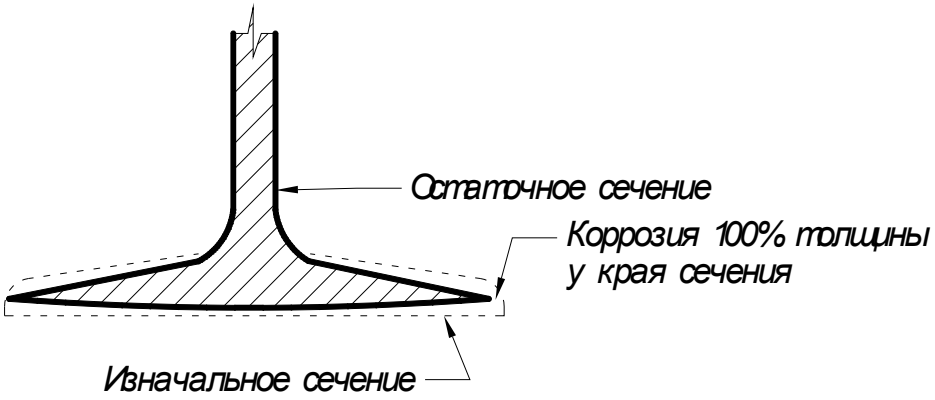

Рисунок 7. Неравномерное коррозионное повреждение нижней полки двутавровой балки надподвального перекрытия

Исходя из вышесказанного, для качественного выполнения обследования и представления его результатов необходимо:

- производить измерение остаточной толщины во всех элементах сечения, имеющих признаки повреждения;
- при неравномерном коррозионном повреждении в пределах части сечения определять минимальные и максимальные толщины, а также выявлять зоны максимальных потерь (строить конкретный профиль остаточного сечения);
- при определении потери площади сечения производить ее расчет по данным толщинометрии каждого из элементов сечения.

Практический пример

Для иллюстрации описанного выше приведем результаты обследования, задачей которого было определение процента коррозионного износа ферм покрытия.

Обследуемые металлические фермы (рис. 8) расположены в производственном корпусе кирпичного завода и перекрывают пролет 36 м. Элементы поясов и решеток ферм преимущественно выполнены из спаренных уголков, образующих тавровое сечение (рис. 9). Верхний пояс в крайних панелях выполнен из сварного двутавра с различной шириной полок. Соединения элементов выполнены на сварке с фасонками. Согласно проектной документации элементы ферм изготовлены из разных марок стали: элементы решетки из ВСт3пс6 по ГОСТ 380-71, элементы поясов из 14Г2 по ГОСТ 19281-73, фасонки из ВСт3сп5 по ГОСТ 380-71.

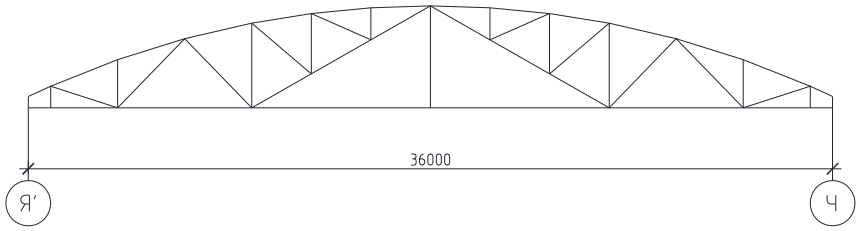

Рисунок 8. Общий вид обследованных ферм

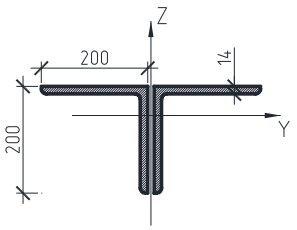

Рисунок 9. Сечение одного из элементов фермы

Зачистка поверхности в зазоре между уголками весьма трудоемка, а использование механических толщиномеров без удаления продуктов коррозии приводит к значительной погрешности измерения. Для решения поставленной задачи был использован ультразвуковой толщиномер А1207 с рабочей частотой 2,5 МГц. Диапазон устанавливаемых скоростей варьируется от 1000 до 9000 м/с, что позволяет производить калибровку прибора для различных конструкционных сталей.

Рисунок 10. Коррозионное повреждение элемента фермы

В ходе обследования выполнен визуальный осмотр металлических элементов ферм, в результате которого установлены наличие повсеместного износа защитных окрасочных покрытий и сплошная коррозия металлических элементов (рис. 10). Измерения остаточной толщины выполнялись на наиболее поврежденных по визуальным признакам участках элементов ферм.

Ввиду длительной эксплуатации без своевременных периодических ремонтов и восстановления защитных покрытий элементы ферм на всей площади имели коррозионное повреждение.

Таким образом, определение начальной толщины сечения по измерению на неповрежденном участке не представлялось возможным. С учетом этого была предпринята попытка сопоставления фактических габаритов сечений с ближайшим большим (по толщине профиля) сечением по сортаменту. Определенные таким образом коррозионные потери составили 25–30%, что, согласно требованиям норматива [24], является аварийным признаком.

После первоначального анализа (сопоставления с сортаментом) заказчиком была найдена и предоставлена проектная документация. В результате анализа проекта установлено, что часть элементов фермы была выполнена из профилей большего сечения (по толщине и габаритам), чем указано в проекте. С учетом изначального применения профилей большего сечения и их коррозионного износа было выявлено, что фактические толщины данных элементов превосходят проектные. Таким образом, несущая способность, предусмотренная проектом для данных элементов, обеспечена. Коррозионные потери той части элементов, сечение которых соответствует проектным данным, оказались не столь существенными (не более 10%).

Итак, при определении коррозионного износа на основе сравнения с проектной документацией было выявлено, что его величина не превышает 10% площади сечения некоторых элементов. При отсутствии проектной документации и использовании в качестве изначальных сечений по сортаменту техническое состояние конструкций ошибочно могло быть признано аварийным.

Заключение

В качестве выводов по изложенному материалу можно выделить следующее.

1. Показано, что наиболее удобным и производительным, а иногда и единственно возможным методом для определения остаточной толщины стальных конструкций является ультразвуковой эхо-метод. Использование механических толщиномеров можно рекомендовать только в случае отсутствия или невозможности применения ультразвуковых толщиномеров (например, при низких температурах воздуха).
2. Обосновано, что косвенный метод по определению коррозионных потерь на основе измерения толщины продуктов коррозии неприменим ввиду недостоверности получаемых результатов.
3. Представление коррозионных потерь металла в процентном выражении дает качественную оценку состояния конструкции, а также позволяет оценить скорость коррозии.

4. Состояние конструкций в большинстве случаев необходимо определять поверочным расчетом. Для этого необходимо иметь информацию об остаточных геометрических характеристиках поврежденного сечения.
5. Разработан алгоритм определения коррозионного износа, который рекомендуется применять в практике обследования объектов (рис. 11).
6. Требуется обновление разделов нормативных документов, регламентирующих инструментальную оценку коррозионного износа и классифицирующих техническое состояние металлических конструкций с учетом предлагаемой методики.

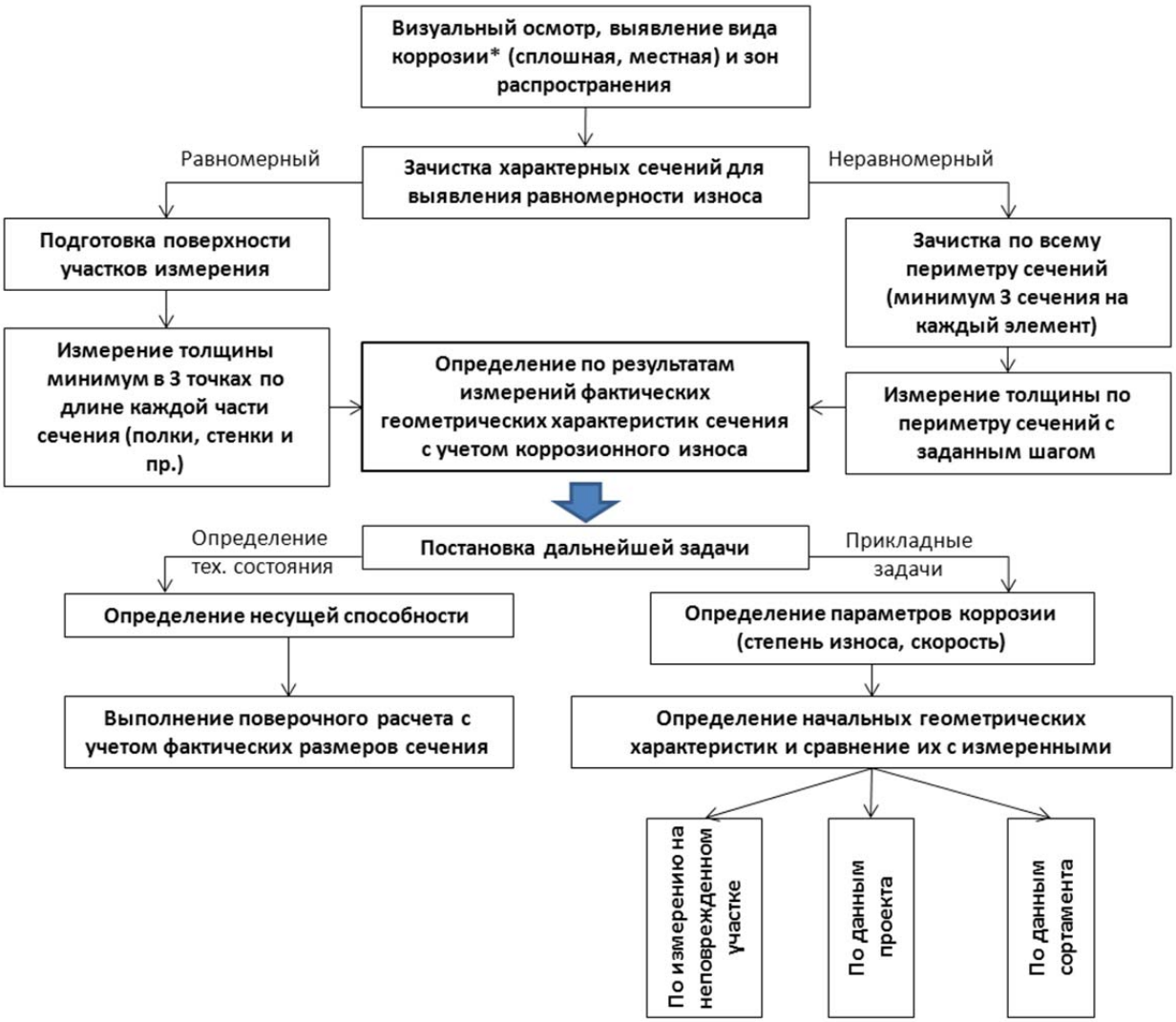

Рисунок 11. Алгоритм оценки коррозионного износа (* при сплошной коррозии металла)

Литература

1. Пузанов А.В., Улыбин А.В. Методы обследования коррозионного состояния арматуры железобетонных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2011. №7(25). С. 18-25.
2. Добромыслов А.Н. Диагностика повреждений зданий и инженерных сооружений. М.: АСВ, 2006. 256 с.
3. Пособие по обследованию строительных конструкций зданий. М.: АО «ЦНИИПРОМЗДАНИЙ», 1997. 179 с.

4. Ремнев В.В., Морозов А.С., Тонких Г.П. Обследование технического состояния строительных конструкций зданий и сооружений: Учебное пособие для вузов ж.-д. транспорта. М.: Маршрут, 2005. 196 с.

5. Пособие по контролю состояния строительных металлических конструкций зданий и сооружений в агрессивных средах, проведению обследований и проектированию восстановления защиты конструкций от коррозии (к СНиП 2.03.11-85). М.: ГОССТРОЙ СССР, 1987. 23 с.

6. Гуревич А.К. [и др.] Таблица: Методы и задачи толщинометрии // В мире НК. 2008. №2(40). С. 4.

7. Юнникова В. В. Исследование и разработка методов и средств повышения достоверности ультразвукового контроля толщины: дис. … канд. техн. наук. Хабаровск, 1999. 107 с.

8. Юнникова В.В. О достоверности ультразвукового контроля толщины // Контроль и диагностика. 1999. №9. С. 31-34.

9. Broberg P., Runnemalm A., Sjödahl M. Improved corner detection by ultrasonic testing using phase analysis // Ultrasonics. 2013. №53(2). Pp. 630-634.

10. Xiong R., Lu Z., Ren Z., Xu C. Experimental research on small diameter concrete-filled steel tubular by ultrasonic detection // Applied Mechanics and Materials. 2012. Vol. 226-228. Pp. 1760-1765.

11. Tang R., Wang S., Zhang Q. Study in ultrasonic flaw detection for small-diameter steel pipe with thick wall // International Journal of Digital Content Technology and its Applications. 2012. №6(16). Pp. 17-27.

12. Самокрутов А.А., Шевалдыкин В.Г. Ультразвуковая эхо-томография металлоконструкций. Состояние и тенденции // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. №1. С. 50–59.

13. Данилов В.Н., Самокрутов А.А. Моделирование работы пьезопреобразователей с сухим точечным контактом в режиме излучения // Дефектоскопия. 2003. №8. С. 11–23.

14. Introduction to Phased Array Ultrasonic Technology Applications: R/D Tech Guideline. Quebec: R/D Tech inc., 2004. 368 p.

15. Samokrutov A. A., Kozlov V. N., Shevaldykin V. G. New approaches and hardware means of ultrasonic thickness measurement with the usage of one-element single probes // 8th European conference on Non-Destructive Testing, Barcelona, 17 – 21 June, 2002. Pp. 134-139.

16. Самокрутов А.А., Шевалдыкин В. Г., Козлов В. Н, Алёхин С.Г., Мелешко И.А., Пастушков П.С. А1207 – Ультразвуковой толщиномер нового поколения // В мире НК. 2001. №2(12). С. 23-24.

17. Fowler K.A., Elfbaum G. M., Smith K. A., Nelligan T. J. Theory and application of precision ultrasonic thickness gaging [Электронный ресурс]. URL: http://www.ndt.net/article/wt1097/panam/panam.htm (дата обращения: 09.01.2013).

18. Сорокин Ю.Н. Ультразвуковые методы неразрушающего контроля // Сб. ВИНИТИ. Итоги науки и техники: Метрология и измерительная техника. 1979. Т.4. С.253-290.

19. Гмырин С. Я. Влияние шероховатости контактной поверхности на показания ультразвуковых толщиномеров // Дефектоскопия. 1993. №10. С. 29-43.

20. Гмырин С.Я. К вопросу о толщине стенок изделия и погрешности ее измерения в ультразвуковой толщинометрии в случае значительной коррозии поверхности ввода // Дефектоскопия. 1996. №11. С. 49-63.

21. Землянский А.А., Вертынский О.С. Опыт выявления дефектов и трещин в крупноразмерных резервуарах для хранения углеводородов // Инженерно-строительный журнал. 2011. №7(25). С. 40-44.

22. ГОСТ Р 53778-2010. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. Введ. 01.01.2011. М., 2010. 60 с.

23. Старцев С.А. Проблемы обследования строительных конструкций, имеющих признаки биоповреждения // Инженерно-строительный журнал. 2010. №7(17). С. 41-46.

24. ТСН 50-302-2004. Проектирование фундаментов зданий и сооружений в Санкт–Петербурге. Введ. 05.08.04. СПб., 2004. 57 с.

25. Прищепова Н.А. Долговечность стальных ферм покрытий промзданий предприятий цветной металлургии на крайнем севере: автореф. дис. … канд. техн. наук. Норильск.: Норильский индустр. инст-т, 1997. 25 с.

**Алексей Владимирович Улыбин, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812)535-57-82; эл. почта: ulybin@mail.ru

Внешнее армирование изгибаемых фибробетонных изделий углеволокном

К.т.н., доцент С.В. Клюев*,
ФГБОУ ВПО Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова;
директор Ю.В. Гурьянов,
ООО «НИИ ВСУ «ИНТЕР/ТЭК»

Ключевые слова: усиление; изгибаемые конструкции; углеродное волокно

В настоящее время применение композиционных материалов в строительстве обосновано их высокими прочностными и деформативными характеристиками. Эти материалы по сравнению с традиционными более прочные, долговечные и легкие. В России производство таких композитов становится все более дешевым в связи с развитием технологии их изготовления. Увеличение срока эксплуатации материалов приводит к снижению стоимости обслуживания и ремонта зданий и сооружений [1–8].

Композиционные материалы на основе углеволокна могут быть использованы при ремонте и реконструкции мостов, путепроводов, тоннелей, резервуаров, подпорных стен, конструкций промышленных и общественных зданий, а также при проектировании новых строительных объектов [9]. Основными достоинствами материалов являются высокая удельная прочность (коэффициент конструктивного качества) и отношение прочности к плотности, благодаря этому на их основе получают очень эффективные конструкции [10–18].

Применение композиционных материалов для усиления конструкций имеет целый ряд преимуществ по сравнению с традиционными методами:

- высокая прочность при растяжении;
- коррозионная стойкость;
- простота применения;
- высокая усталостная прочность;
- отсутствие размерных ограничений.

Успех применения композиционных материалов для усиления строительных конструкций зависит не только от выбора эффективных композитов, но в значительной мере от решения проблем совместности их работы с восстанавливаемой или усиливаемой конструкцией. Для этого важен выбор материалов и технологий для ремонта деструктивной поверхности железобетона, обеспечивающих их высокую адгезию в подложке. Этот ремонтный слой, в свою очередь, должен быть надежным основанием для приклейки усиливающих композиционных материалов и работать с ними совместно. Подготовка железобетонной конструкции к ремонту и последующему усилению должна включать мероприятия по защите от коррозии арматуры, которая, как правило, развивается при первых признаках деструкции. Без проведения специальных мероприятий образующиеся продукты коррозии будут отрывать защитный слой от ремонтных материалов, что сведет на нет работы по наклейке композитов.

Система ремонта предусматривает использование материалов и технологий, обеспечивающих остановку и предотвращение дальнейшего развития коррозии арматуры и бетона, надежное сцепление ремонтных составов со старым бетоном, повышенную водонепроницаемость, морозостойкость и химическую стойкость. К числу таких материалов относятся: пенетрирующие ингибиторы коррозии арматуры; полимерцементные сухие смеси с быстрым набором прочности; специальные латексные эмульсии, повышающие сцепление со старым бетоном; защитные покрытия для предотвращения проникновения ионов хлора; низковязкие эпоксидные составы для ремонта трещин и специальные эпоксидные составы для ремонта конструкций в условиях повышенной влажности и под водой [2].

В систему ремонта входит также усиление конструкций, которое осуществляется путем внешнего армирования особо высокопрочными тканями из углеродных и специальных стеклянных волокон на эпоксидном связующем. Армирующие элементы создаются наклейкой соответствующих тканей на отремонтированную поверхность специальными эпоксидными составами, обеспечивающими надежное сцепление с бетоном и ремонтными материалами.

Усиление бетонных и железобетонных конструкций углеродными лентами сейчас активно применяется в Европе [8,10,11]. В России в последнее время также получили широкое

распространение композиты на основе углеволокна. Эти композиты можно разделить на две основные группы: формируемые на строительном объекте и заводского изготовления [12-17].

Для изгибаемых изделий целесообразно использовать внешнее армирование. Поскольку эти изделия работают преимущественно на изгиб, то для проведения экспериментальных исследований по их усилению целесообразно применять углеродную ткань с расположением волокон в одном направлении (однонаправленную) (рис. 1).

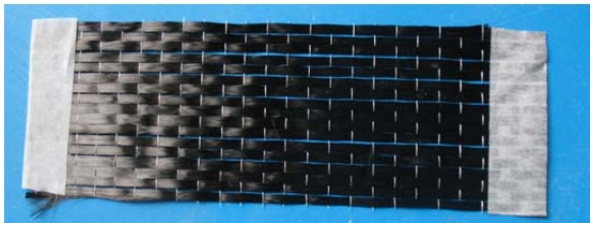

Рисунок 1. Углеродная однонаправленная ткань

Углеродные ткани изготавливают из жгутов углеродных волокон путем прядения. По данным производителя [4], они имеют следующие характеристики:

- толщина (0,1–0,4 мм) зависит от количества волокон в жгутах, диаметра волокон и расположения жгутов;
- масса – 0,15–0,5 кг/м²;
- ширина, как правило, от 100 мм до 1500 мм;
- прочность при растяжении – 1200–3000 МПа;
- модуль упругости – 100–300 ГПа;
- относится к группе трудносгораемых строительных материалов.

Композиционные материалы, полученные путем проклейки ткани полимерной смолой (например, эпоксидной), используют, в частности, для усиления бетонных и железобетонных конструкций. Они наклеиваются на поверхность восстанавливаемой или усиливаемой конструкции послойно в растянутой зоне с помощью пропитки специальными эпоксидными смолами каждого слоя.

В технологии усиления строительных конструкций углеволокном путем внешнего армирования можно выделить следующие этапы:

- подготовка основания под наклейку;
- раскрой углеродной ткани;
- приготовление адгезива;
- наклейка лент.

Экспериментальное исследование фибробетонных конструкций

В ходе эксперимента исследовались фибробетонные образцы, как усиленные, так и восстановленные с помощью ткани из углеволокна.

Для изготовления бетонных образцов применялся товарный цемент ЗАО «Белгородский цемент» Цем I 42,5Н (табл. 1 и рис. 2), отходы мокрой магнитной сепарации (отходы ММС) и суперпластификатор [9].

Армирующей фиброй была стальная волновая от производителя «Росфибра». В качестве заполнителя применялся отсев дробления кварцитопесчаника. Для получения более плотной упаковки заполнителя использовался песок Таволжанского месторождения. Для оценки качества применяемых заполнителей были изучены их основные физико-механические свойства (табл. 2).

Таблица 1. Химический состав цемента

Марка цемента	Химический состав, % по массе								
	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	CaO	MgO	SO_3	R_2O	$CaO_{св}$	прочее
ЦЕМ I 42,5Н	22,49 ±0,5	4,77 ±0,3	4,40 ±0,1	67,22 ±1,0	0,43 ±0,03	2,04 ±0,01	0,20 ±0,05	0,20 ±0,05	1,5 ±0,5

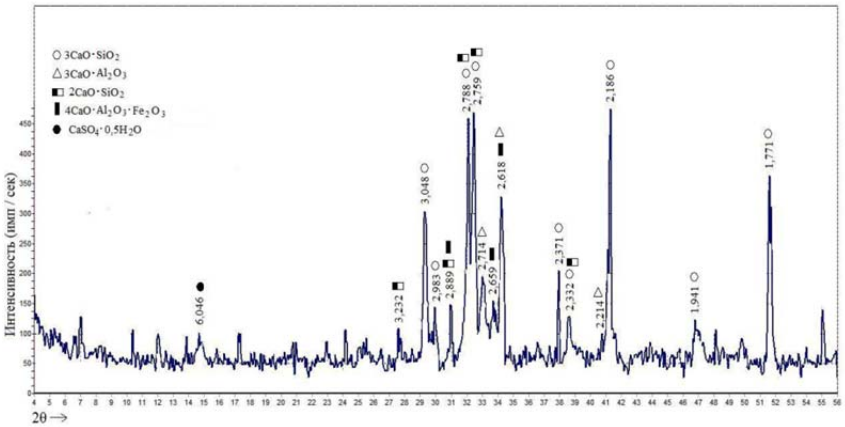

Рисунок 2. Дифрактограмма цемента

Таблица 2. Физико-механические характеристики заполнителя

Показатель	Отсев дробления КВП	Таволжанский песок
Модуль крупности	3,50	1,38
Насыпная плотность, кг/м^3	1490	1448
Истинная плотность, кг/м^3	2710	2630
Пустотность, %	47,8	44,9
Водопотребность, %	5,5	7

Проведенные исследования по определению минералогического состава заполнителя позволили установить, что:

1) мелкий заполнитель в виде кварцевого песка Таволжанского месторождения в качестве главного минерала содержит кварц (β-SiO_2), идентифицируемый по отражениям 3,34; 4,25; 1,82 Å. Акцессорием в исследуемом материале является кальцит ($CaCO_3$), содержание которого не превышает 5% (рис. 3 и табл. 3);

2) основным минералом мелкого заполнителя в виде отсева дробления кварцитопесчаника является кварц, содержание которого составляет около 87% (рис. 4, табл. 4). Акцессорными минералами выступают мусковит (6%), альбит (3%) и кальцит (1,6%).

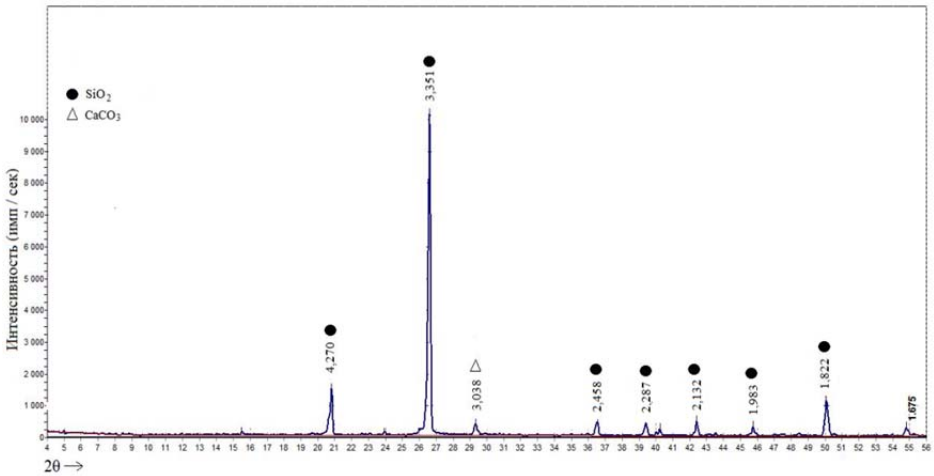

Рисунок 3. Дифрактограмма кварцевого песка Таволжанского месторождения

Таблица 3. Минералогический состав кварцевого песка Таволжанского месторождения

№пробы	Формула	Название	Основные отражения	Условная концентрация,%	Эталоны №ICDD
06746	SiO_2	Quartz	$3{,}34_x\ 4{,}25_2 1{,}82_2$	95,2	46-1045
	$CaCO_3$	Calcite	$3{,}03_x 2{,}28_2\ 2{,}09_2$	4,8	5-586

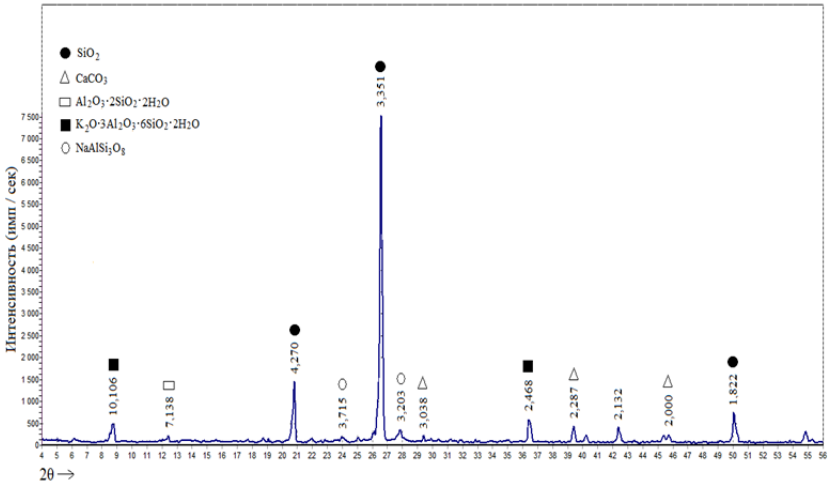

Рисунок 3. Дифрактограмма отсева дробления кварцитопесчаника

Таблица 4. Минералогический состав отсева дробления кварцитопесчаника

№пробы	Формула	Название	Основные отражения	Условная концентрация, %	Эталоны №ICDD
06747	SiO_2	Quartz	$3{,}34_x 4{,}25_2 1{,}82_2$	87,3	46-1045
	$CaCO_3$	Calcite	$3{,}03_x 2{,}28_2 2{,}09_2$	1,6	5-586
	$Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$	Kaolinite	$7{,}14_x 3{,}57_6 4{,}36_5$	1,6	80-886
	$K_2O \cdot 3Al_2O_3 \cdot 6SiO_2 \cdot 2H_2O$	Muscovite	$10{,}03_x 2{,}57_x 3{,}34_9$	6,3	15-780
	$NaAlSi_3O_8$	Albite	$3{,}19_x 3{,}78_3 3{,}68_2$	3,2	9-466

Были проведены экспериментальные исследования призм размерами 100×100×400 мм (рис. 5). В качестве адгезива использовался клей эпоксидный марки «ЭДП» (ТУ 2385-012-54804491–2002), изготовленный из эпоксидной смолы ЭД-20. Клей предназначен для приклеивания углеродной ткани на бетонный образец. Соотношение между углеродной тканью и эпоксидным клеем 60:40.

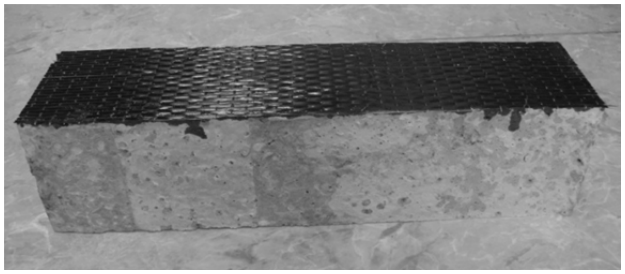

Рисунок 5. Углеродная однонаправленная ткань, наклеенная на образец

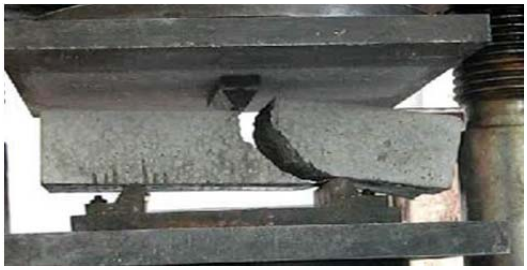

Рисунок 6. Характер разрушения бетонных призм, усиленных углеволокном

На рис. 6 представлен характер разрушения сталефибробетонных призм. Он изменяется, поскольку бетон работает совместно с косвенной внешней арматурой. Внешнее армирование позволяет усиленному образцу воспринимать более высокую нагрузку по сравнению с контрольными образцами. На рис. 7 представлены результаты испытания бетонных призм.

Результаты проведенных экспериментальных исследований оказались близкими к теоретическим расчетам. Методика расчета по усилению изгибаемых конструкций углеволокном приведена в работе [2].

Анализ рис. 7 показывает нелинейное увеличение прочности усиленных образцов в зависимости от количества наклеенных слоев углеродных лент.

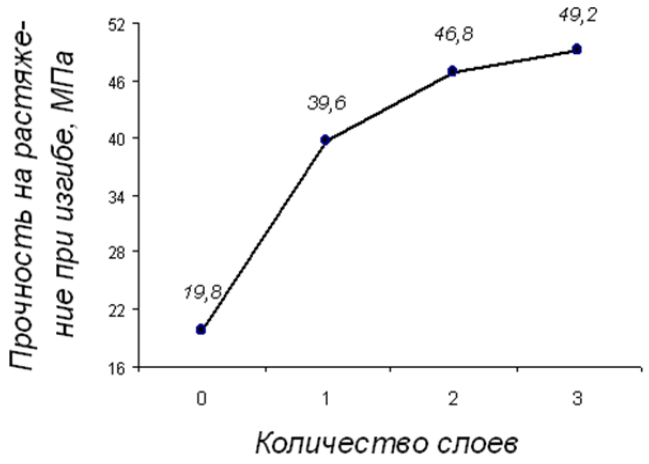

Рисунок 7. Зависимость прочности на растяжение при изгибе от количества слоев углеродной ткани

На следующем этапе осуществлялось изучение восстановления и усиления изгибаемых изделий углеродной лентой. Для этого проводились исследования по восстановлению и усилению сталефибробетонных призм. Сталефибробетонную призму вначале разрушили, затем склеили две части призмы эпоксидным клеем и произвели усиление конструкции углеволокном в растянутой зоне (рис. 8).

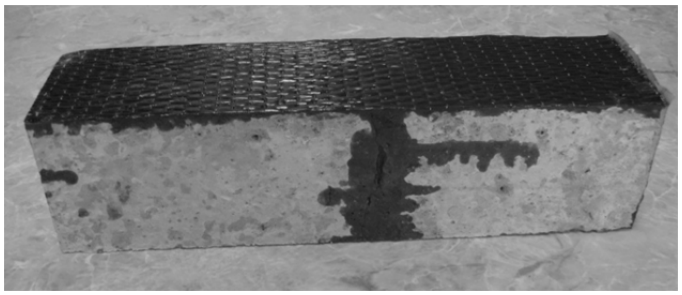

Рисунок 8. Восстановленная и усиленная углеволокном призма

Рисунок 9. Характер разрушения бетонных призм, восстановленных и усиленных углеволокном

Экспериментальные исследования этих призм показали увеличение предела прочности на растяжение при изгибе: не усиленные – 19,8 МПа, восстановленные и усиленные углеволокном – 23,4 МПа. Таким образом, наблюдается увеличение прочности на 18%, что свидетельствует об эффективности применения углеволокна при восстановлении и усилении строительных конструкций (рис. 9).

Выводы

1. Установлен механизм влияния внешнего армирования бетонных изгибаемых изделий на композиционных вяжущих и техногенных песках на прочностные характеристики. Разрушение образца происходит не по восстановленному сечению. Представляется, что композит на основе углеволокна в растянутой зоне образца практически полностью воспринимает растягивающее усилие за счет концентрации волокон в этой зоне. Экспериментально доказано, что усиление изгибаемых элементов за счет композита позволяет повысить предел прочности на растяжение при изгибе в 2–3 раза.

2. Разработаны принципы усиления изгибаемых фибробетонных строительных конструкций с использованием мелкозернистого бетона на основе техногенных песков.

3. Предложена область использования полос композита из углеволокна для усиления изгибаемых элементов из сталефибробетона на основе техногенного песка.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке в виде гранта для аспирантов и молодых научно-педагогических работников БГТУ им. В.Г. Шухова в рамках реализации мероприятий Программы стратегического развития БГТУ им. В.Г. Шухова на 2012-2016 годы по теме «Разработка теоретических и практических основ усиления и восстановления строительных конструкций композитом на основе углеволокна путем внешнего армирования» и в виде грантов президента Российской Федерации МК-5667.2013.8 по теме «Повышение эксплуатационных характеристик бетонных и железобетонный изделий и конструкций на композиционных вяжущих и техногенного песках за счет дисперсного и внешнего армирований»

Литература

1. Клюев А.В. Усиление изгибаемых конструкций композитами на основе углеволокна // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2011. №3. С. 38–41.
2. Клюев С.В. Усиление и восстановление конструкций с использованием композитов на основе углеволокна // Бетон и железобетон. 2012. №3. С. 23–26.
3. Клюев С.В. Высокопрочный фибробетон для промышленного и гражданского строительства // Инженерно-строительный журнал. 2012. №8(34). С. 61–66.
4. Клюев С.В., Лесовик Р.В., Рубанов В.Г. Расчет изгибаемых конструкций усиленных композитами на основе углеродного волокна // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2011. №4. С. 55-58.
5. Чернявский В.Л., Хаютин Ю.Г, Аксельрод Е.З., Клевцов В.А., Фаткуллин Н.В. Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами. М.: ИнтерАква, 2006. 113 с.
6. Чернявский В.Л., Аксельрод Е.З.Усиление железобетонных конструкций композитными материалами // Жилищное строительство. 2003. №3. С. 15-16.
7. Композит, холдинговая компания [Электронный ресурс]. URL: http://www.compozit.su (дата обращения: 02.04.2011).
8. ИнтерАква, инженерно-производственный центр [Электронный ресурс]. URL: http://www.interaqua.biz (дата обращения: 02.04.2011).
9. Клюев С.В., Клюев А.В., Лесовик Р.В. Усиление строительных конструкций композитами на основе углеволокна: монография. Lambert, 2011. 123 с.
10. Nabil F. Grace, Singh S.B. Durability Evaluation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthened Concrete Beams: Experimental Study and Design // ACI Structural Journal. 2005. Vol. 102. №1. Pp. 40-53.
11. Бондаренко С.В., Санжарновский Р.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. М.: Стройиздат, 1990. 352 с.
12. Bakis C.E., Bank L.C., Brown V.L., Cosenza E., Davalos J.F., Lesko J.J., Machida A., Rizkalla S.H., Triantifillou T.C. Fibre-Reinforced Polymer Composites for Construction-State-of-the-Art Review // Journal of Composites in Construction. 2002. Vol. 6. №2. Pp. 73–87.
13. Чернявский В. Л. Аксельрод Е. З. Применение углепластиков для усиления железобетонных конструкций промышленных зданий // Промышленное и гражданское строительство. 2004. №3. С. 37–38.
14. Nanni A. FRP Reinforcement for Bridge Structures // Proceedings of Structural Engineering Conference, The University of Kansas, Lawrence, KS, March 16, 2000. P. 5.
15. Crawford J.E., Malvar L.J., Morrill K.B., Ferritto J.M. Composite Retrofits to Increase the Blast Resistance of Reinforced ConcreteBuildings. P-01-13 // Tenth International Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures, May 2001. Pp. 22.
16. Bisby L.A., Kodur V.K.R., Green M.F. Fire endurance of fiber-reinforced polymer-confined concrete columns // ACI Structural Journal. 2005. Vol. 102. №6. Pp. 883-891.
17. Kodur V., Bisby L.A., Green M.F. FRP Retrofitted Concrete under Fire Conditions: Performance verification of insulated reinforced concrete members // Concrete International. 2006. Vol. 28. №12. Pp. 37-44.

**Сергей Васильевич Клюев, Белгород, Россия*

Тел. раб.: +7(4722)58-63-38; эл. почта: klyuyev@yandex.ru

Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

К.т.н., доцент И.И. Овчинников*,
ФГБОУ ВПО Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.;
Д.т.н., профессор И.Г. Овчинников,
ФГБОУ ВПО Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Ключевые слова: деформационная модель; коррозия железобетона; пластинка на упругом основании; хлоридная коррозия; жесткая дорожная одежда

В транспортном строительстве широкое применение находят армированные конструкции в виде толстостенных и тонкостенных плит и пластинок на упругом основании. Расчетная схема в виде плиты (пластинки) на упругом основании используется для расчета дорожных одежд, плит, применяемых для укрепления откосов насыпей, конусов мостов, при расчете мостового полотна и ряда других конструкций.

В связи с ростом количества автомобилей и увеличением их веса требования к уровню прочности дорожных одежд существенно возросли. С учетом тяжелых климатических условий в большинстве регионов нашей страны более долговечными окажутся жесткие дорожные одежды, выполняемые из железобетонных плит на упругом основании.

Преимущества жестких дорожных одежд:

- значительно большая прочность и жесткость цементобетона в сравнении с асфальтобетоном (относительная стабильность деформативных свойств цементобетона при изменении внешних температурных воздействий) [1]; увеличение прочности цементобетона с возрастом;
- стабильность коэффициента сцепления бетонных покрытий с колесом автомобиля, слабая его зависимость от влажности;
- существенно больший срок службы жестких покрытий до капитального ремонта.

Несмотря на то, что в данный момент стоимость строительства жестких дорожных одежд на 10-20% больше по сравнению с асфальтобетонными покрытиями, это соотношение не является стабильным и будет изменяться в связи с ростом цен на нефтепродукты и транспортные услуги.

В статье рассматривается моделирование поведения жестких дорожных одежд с учетом реальных условий эксплуатации, и в частности, основное внимание уделяется учету воздействия агрессивных эксплуатационных сред. Эти среды проникают в объем дорожной одежды, взаимодействуют с ее компонентами и в результате приводят к деградации их механических свойств. Одной из распространенных эксплуатационных агрессивных сред для дорожных железобетонных покрытий является хлоридсодержащая среда, причиной появления которой являются либо хлоридсодержащие средства-антиобледенители, применяемые с целью обеспечения безопасности проезда автотранспорта при гололеде на проезжей части дорог, либо солевой туман (характерный для приморской атмосферы), имеющий контакт с конструкцией.

Многочисленные результаты экспериментальных исследований и натурных наблюдений, выполненных многими учеными [2,3,4,5], свидетельствуют о том, что воздействие хлоридсодержащей среды приводит к существенным изменениям механических свойств железобетона, а в ряде случаев – к изменению характера работы конструкции. Изменение свойств со временем носит, как правило, необратимый характер и зависит от условий нагружения, концентрации агрессивной среды и других факторов. По мере проникания агрессивной среды в тело конструкции происходит деградация защитного слоя бетона, после чего возможна коррозия арматуры. В результате коррозии уменьшается площадь поперечного сечения арматуры, а образующиеся при этом продукты коррозии приводят к появлению трещин, ориентированных вдоль арматуры, и последующему отслаиванию защитного слоя бетона. При этом изменяется характер сцепления арматуры с бетоном. Все эти факторы снижают несущую способность и повышают деформативность дорожных железобетонных покрытий.

Обычно при расчете железобетонных конструкций применяется методология, основанная на применении теории предельных состояний. Согласно этой теории железобетонная конструкция считается разрушенной, если усилия от внешней нагрузки превышают несущую способность железобетона, определяемую с учетом предельных характеристик бетона и арматуры. Однако в реальных условиях эксплуатации в подавляющем большинстве случаев железобетон разрушается не от того, что нагрузка увеличивается до опасного уровня, а от того, что характеристики составляющих компонентов железобетона ухудшаются настолько, что конструкция разрушается от рабочей нагрузки.

Поэтому при расчете железобетонных конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных сред, более правильным является использование нелинейных деформационных моделей [6], являющихся более корректными с точки зрения моделирования процесса деформирования конструкции.

Бетон – основной материал жестких дорожных одежд – является разномодульным и нелинейно деформируемым материалом.

Как видно, моделирование поведения жестких дорожных покрытий из разномодульного нелинейно деформируемого армированного материала с учетом воздействия агрессивных хлоридсодержащих сред является актуальной проблемой, которая имеет практический интерес и представляет собой весьма сложную и трудоемкую задачу.

Состояние проблемы

Исследованиям процессов коррозии бетона, стали и железобетона в агрессивных средах с химической точки зрения посвящено достаточно много работ. На данный момент существуют несколько фундаментальных теорий, описывающих процессы коррозии бетона и стали. Имеются экспериментальные данные, характеризующие общие условия разрушения бетона, стали и железобетона в различных агрессивных средах.

Теория расчета жестких железобетонных дорожных покрытий на упругом основании, работающих в обычных условиях, в определенной мере развита и обоснована, но не получила развития в направлении расчетов с учетом эффектов коррозии. Методики расчета конструкций, работающих в агрессивных средах, имеют частный характер, так как основываются на выведенных авторами формулах с эмпирическими коэффициентами, вычисленными на основании опытных данных для конкретных случаев нагружения и действия среды. Такие методики расчета немногочисленны и не доведены до практического применения.

Согласно [4] главная задача расчета железобетонной конструкции – определить возможность эксплуатации конструкции без специальной защиты, изолирующей конструкцию от окружающей среды. Эта защита приводит к весьма существенному удорожанию конструкции и обычно не обладает стойкостью на весь период эксплуатации, а ремонт поврежденных конструкций и нарушенной защиты обычно сложен и не экономичен.

В методах расчета, разрабатываемых А.Ф. Полаком [7], предполагается, что долговечность железобетонных конструкций в коррозионной среде может быть определена с помощью математического моделирования.

Различные подходы к оценке срока службы бетонных конструкций в условиях эксплуатации рассматриваются в работах [8, 9]. В [9] предлагается следующая процедура прогноза долговечности бетона:

- устанавливаются эксплуатационные требования и критерии повреждений;
- устанавливаются критические характеристики эксплуатационной пригодности материала;
- устанавливаются ожидаемый вид и размеры фактора повреждений;
- задаются характеристики материала, для которого делается прогноз долговечности;
- определяется возможный механизм повреждения;
- выполняется проектирование и проводятся быстрые испытания с целью вызвать быстрое повреждение и определить его механизм;
- организуются длительные испытания в эксплуатационных условиях;
- разрабатывается математическая модель повреждения, и сравниваются скорости изменений в натурных и лабораторных условиях;
- осуществляется прогноз долговечности конструкции.

За рубежом активные исследования поведения железобетонных конструкций в условиях хлоридной коррозии проводятся под руководством Д.Н. Франгопола [10,11,12]. Причем в этих исследованиях большое внимание уделяется учету вероятностного характера коррозионных и деформационных процессов [13,14], а также учету геометрической нелинейности при расчете железобетонных конструкций [15].

Большой вклад в развитие методики проектирования железобетонных конструкций в агрессивных средах внесли В.М. Бондаренко, Е.А. Гузеев, Н.В. Савицким с сотрудниками [16]. Ими развиты и экспериментально обоснованы представления об определяющем влиянии внешних воздействий, коррозионных сред и силовых факторов на напряженно-деформированное состояние и перераспределение усилий в железобетонных конструкциях.

А.И. Попеско [17] предложил методику расчета подверженных коррозии железобетонных конструкций, основанную на использовании эквивалентных модулей деформаций. Эти модули являются интегральными характеристиками деформативных свойств конструкции и учитывают деформированную схему конструкции, геометрические и физико-механические характеристики ее элементов. В.М. Бондаренко [18] предложил методику оценки силового сопротивления железобетонных конструкций, подверженных коррозионным воздействиям. В соответствии с этой методикой силовое сопротивление (деформирование) бетона определяют следующие факторы:

- анизотропия механических свойств в зависимости от уровня и знака напряжений;
- нелинейность связи между напряжениями и деформациями, разномодульность (разносопротивляемость сжатию и растяжению);
- неравновесность и наследственность деформирования во времени;
- значительная необратимость деформаций.

В работе [19] приводится метод расчета-прогноза долговечности бетона с использованием подходов механики разрушения.

Достаточно корректным на современном этапе является метод расчета композитных строительных конструкций с учетом действия агрессивных сред, предложенный В.И. Соломатовым и В.П. Селяевым [20]. В этом методе модули упругости бетона при сжатии и растяжении имеют различные значения; зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии описывается нелинейной функцией; при определении напряжений от действия нагрузок и объемных изменений, происходящих вследствие переноса агрессивных сред в бетонном элементе, применяется принцип суперпозиции; действие агрессивной среды на механические и геометрические характеристики бетонного элемента учитывается с помощью деградационных функций жесткости и несущей способности.

В работе [21] представлена модель деформирования железобетонного элемента с агрессивной средой в рамках механики сплошной среды. Физико-химическое разрушение и механическое поведение бетона рассматриваются совместно с использованием объединенной механохимической модели повреждения, согласно которой вводится дополнительная внутренняя переменная, названная «повреждением от воздействия окружающей среды».

Весьма перспективным является также подход И.Г. Овчинникова и В.В. Петрова, основанный на теории структурных параметров [22, 23]. Согласно этому подходу модель конструкции, взаимодействующей с агрессивной средой, представляется в виде совокупности моделей: модели конструктивного элемента, модели грунтового основания, модели материала, модели воздействия среды и модели наступления предельного состояния.

В данной статье методология работ [22, 23] применяется к моделированию поведения железобетонной пластины на упругом основании

1. Построение основных соотношений

1.1. Модель конструктивного элемента

В качестве модели конструктивного элемента, учитывая соотношения размеров плоских армированных элементов, а также характер их деформирования под действием нагрузки, будем рассматривать модель пластины по технической теории изгиба с учетом соответствующих гипотез.

Отнесем эту пластину к прямоугольной системе координат x, y, z; где z – координата, нормальная к срединной поверхности пластины (рис. 1).

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки на упругом основании при пренебрежении трением, возникающим между пластинкой и упругим основанием, может быть представлено в виде:

$$-\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right)=p(x,y)-q(x,y), \qquad (1)$$

где q (x, y) – реактивные давления упругого основания (нагрузка на основание); p (x,y) – заданные поверхностные силы, действующие на пластинку; M_x, M_y – изгибающие моменты; H – крутящий момент.

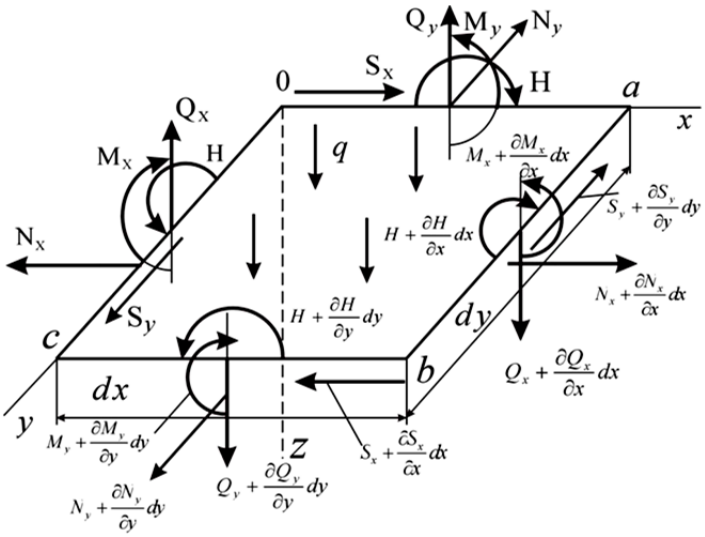

Рисунок 1. Элемент пластинки с приложенными усилиями

1.2. Модель грунтового основания

В качестве модели грунтового основания принимается двухпараметрическая модель типа Власова-Леонтьева [24]:

$$2m\nabla^2 W(x,y)-nW(x,y)+q_1=0. \qquad (2)$$

Коэффициент n определяет работу упругого основания на сжатие и в этом смысле аналогичен коэффициенту постели, а коэффициент m характеризует работу упругого основания на сдвиг.

1.3. Модель нагружения

Схема и программа нагружения пластинки будут зависеть от того, моделью какого конструктивного элемента является рассматриваемая пластина. Далее полагаем, что пластина либо равномерно, либо локально нагружена статической нагрузкой по поверхности, причем нагрузка условно приложена к срединной плоскости.

1.4. Модель деформирования материала пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии и подвергающейся воздействию хлоридсодержащей среды

При выводе физических соотношений для определенности в качестве армированного материала будем рассматривать железобетон. Железобетон в общем случае является ортотропным материалом, по-разному сопротивляющимся растяжению и сжатию. Несмотря на то, что бетон и арматура имеют близкие коэффициенты расширения, бетон имеет отличающиеся диаграммы деформирования при растяжении и сжатии. Это позволяет использовать для описания поведения армированного бетона нелинейную деформационную модель в виде составной модели ортотропного нелинейного разномодульного материала. Основные соотношения, описывающие поведение элемента пластины в условиях плоского напряженного состояния, будут складываться из физических соотношений для бетона, работающего в условиях плоского напряженного состояния, и физических соотношений для арматуры, которая работает в условиях одноосного напряженного состояния для каждого направления армирования. Влияние времени на процесс

деформирования учитывается путем введения параметра поврежденности в физические соотношения и конструированием специальных уравнений накопления повреждения для этого параметра.

Физические соотношения для бетона принимаем в виде [25]:

$$\sigma_x^b = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_x + \nu_j e_y\right); \quad \sigma_y^b = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_y + \nu_j e_x\right); \quad \tau_{xy}^b = \frac{\Psi_j}{2\left(1+\nu_j\right)} e_{xy}. \tag{3}$$

Здесь ν_j – коэффициент поперечной деформации; j = 1,2; $\sigma_x^b, \sigma_x^b, \tau_{xy}^b$ – компоненты тензора напряжений; e_x, e_y, e_{xy} – то же, деформаций, причем:

$$\begin{gathered} e_x = \varepsilon_x + \chi_x z; \quad e_y = \varepsilon_y + \chi_y z; \quad e_{xy} = \varepsilon_{xy} + 2\chi_{xy} z; \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{gathered} \tag{4}$$

В этих формулах ε_x, ε_y, ε_{xy} – деформации точек срединной поверхности; χ_x, χ_y, χ_{xy} – кривизны в этих точках; z – координаты рассматриваемых точек, отсчитываемые от срединной плоскости; u, v, w – перемещения в направлении осей x, y, z. Принимается, что любая точка пластины находится в растянутом состоянии (j=1), если $\sigma_0 \geq 0$, и в сжатом состоянии (j=2), если $\sigma_0 < 0$. Здесь σ_0 – среднее напряжение, определяемое выражением:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \tag{5}$$

Функция Ψ_j имеет вид:

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j(e_u, C, \Pi)}{e_u}, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

где Φ_j – функции, аппроксимирующие обобщенную кривую деформирования бетона σ_u^b (e_u) при растяжении (j=1) и при сжатии (j=2); σ_u^b – интенсивность напряжений; e_u – интенсивность деформаций. Влияние концентрации хлоридсодержащей среды C и уровня поврежденности Π учитывается при задании выражений для Φ_j.

Физические соотношения для арматуры принимаются в виде:

а) для направления x: $$\sigma_x = f_x(e_x); \tag{7}$$

б) для направления y: $$\sigma_y = f_y(e_y). \tag{8}$$

Здесь f_x – функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования стержневой арматуры, уложенной в направлении x, а f_y – в направлении y.

1.5. Модель воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды

Процесс взаимодействия хлоридсодержащей среды с армированной пластиной состоит из нескольких стадий: проникание среды в объем пластины; взаимодействие ее с материалом, приводящее к изменению механических характеристик бетона и коррозии арматуры; деформирование и разрушение с учетом происходящего процесса деградации.

1.5.1. Модель проникания хлоридсодержащей среды

На стадии проникания среды формируется закон распределения агрессивной среды по объему пластины, определяющий затем характер неоднородности бетона и интенсивность коррозии арматуры.

Кинетику проникания хлоридсодержащей среды в пластину будем описывать с помощью уравнения диффузии, имеющего вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = div(D \cdot gradC) - g(C), \tag{9}$$

где t – время; D – коэффициент диффузии; $g(C)$ – скорость связывания проникшей среды.

Чтобы выявить распределение концентрации хлоридсодержащей среды C по объему пластины в любой момент времени нужно решить это уравнение с начальными и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче.

1.5.2. Модель воздействия хлоридсодержащей среды на бетон

Положим, что в рамках нелинейной деформационной модели бетон является нелинейным разносопротивляющимся материалом. Тогда зависимость $\sigma_u^в(e_u, C)$ примем в виде [25]:

$$\sigma_u^b = [A_j^b(C) \cdot e_u - B_j^b(C) \cdot e_u^{m_j(C)}]/(1 + \lambda П), \tag{10}$$

где $A_j^b(C)$, $B_j^b(C)$, $m_j(C)$ – функции, учитывающие влияние концентрации хлоридсодержащей среды *C* на деформирование бетона при растяжении $(j = 1)$ и сжатии $(j = 2)$, а функция $(1 + \lambda П)$ учитывает влияние уровня поврежденности $П$ на деформирование бетона. Включение функции поврежденности $П$ в физические соотношения для бетона (10) позволяет отразить влияние ползучести бетона на процесс его деформирования через изменение диаграммы деформирования с течением времени.

1.5.3. Модель воздействия хлоридсодержащей среды на арматуру

Так как под влиянием хлоридсодержащей среды изменения механических свойств арматуры практически не происходит [5], а происходит коррозионное разрушение, вызывающее изменение площади сечения арматуры, то зависимость между напряжениями и деформациями в арматуре примем в виде диаграммы Прандтля:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot e, & \sigma < \sigma_T, \\ \sigma_T, & \sigma \geq \sigma_T, \end{cases} \tag{11}$$

где E – модуль упругости; σ_T – предел текучести.

Процесс коррозионного разрушения арматуры состоит из двух стадий: инкубационного периода t_u, в течение которого концентрация хлоридов в точке расположения арматурного стержня изменяется от начального до критического значения C_{KP}, и стадии интенсивного коррозионного разрушения, в которой происходит коррозионный износ арматуры.

Кинетику коррозионного износа арматуры можно описывать с использованием моделей, приведенных в работе [25]. Для определенности будем полагать, что коррозионный износ описывается функцией:

$$\delta = \begin{cases} 0, & t < t_u, \\ (\delta_K \cdot t)/(t + T), & t \geq t_u, \end{cases} \tag{12}$$

где δ_K – предельная глубина коррозии; T – параметр.

Положим, что коррозионный износ арматурного стержня круглого сечения с начальным диаметром d_0 происходит по хорде. Тогда площадь его сечения с учетом коррозионного поражения запишем в виде:

$$F(t) = \begin{cases} (\pi \cdot d_0^2)/4, & t < t_u, \\ (\pi \cdot d_0^2)/4 - d_0^2 \cdot (S - \sin S)/8, & t \geq t_u, \end{cases} \tag{13}$$

где $S = 2\arccos(1 - (2 \cdot \delta / d_0))$.

1.6. Модель разрушения материала

В подавляющем большинстве случаев разрушение железобетона начинается с разрушения бетонной части. Поэтому при моделировании разрушения армированной пластины будем рассматривать процесс разрушения бетона как процесс накопления дисперсных повреждений. Уровень поврежденности оцениваем с помощью параметра поврежденности Π, равного нулю в начальном неповрежденном состоянии материала и равного единице в момент разрушения. Скорость изменения параметра Π полагаем зависящей от интенсивности напряжений σ_u^b, вида напряженного состояния, концентрации хлоридсодержащей среды C и достигнутого значения поврежденности Π. В результате уравнение накопления повреждений принимаем в виде:

$$d\Pi/dt = a_j(C)\,[\sigma^b_u/(1-\Pi)]^{в_j(C)},\ \ \Pi(0)=0,\ \Pi(t_p)=1,\quad j = 1, 2, \tag{14}$$

где t_p – время до разрушения точки пластины, в которой поврежденность достигает предельного уровня $\Pi = 1$; $a_j(C)$ и $в_j(C)$ – коэффициенты уравнения накопления повреждений, зависящие от концентрации агрессивной среды C в точке пластины и от вида напряженного состояния в этой точке.

Если предположить, что локальное разрушение (в точке пластины) можно отождествить с разрушением всей пластины, то тогда t_p можно принять за время до разрушения пластины в агрессивной среде.

1.7. Физические соотношения для усилий и деформаций, возникающих в железобетонной пластине

Получим выражения для изгибающих моментов и усилий через деформации, полагая, что в сечениях пластинки они складываются из моментов и усилий, воспринимаемых бетоном, и моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, а на сдвиг работает только бетон.

С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} &M_x = M_x^b + M_x^a;\quad M_y = M_y^b + M_y^a;\quad H = H^b;\\ &N_x = N_x^b + N_x^a;\quad N_y = N_y^b + N_y^a;\quad S = S^b. \end{aligned} \tag{15}$$

Выражения для частей моментов и усилий, воспринимаемых бетоном:

$$\begin{aligned} &M_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b z dz, \qquad M_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b z dz,\\ &H^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b z dz, \qquad N_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b dz,\\ &N_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b dz, \qquad S^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b dz. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь z_0 – уравнение нейтральной поверхности, определяемой из условия $\sigma_0=0$ и отделяющей растянутую зону пластинки от сжатой; i, j – индексы, характеризующие сжатую и растянутую зону пластинки. Если нижняя зона изгибаемой пластинки растянута, то $j = 1$, $i = 2$; если нижняя зона изгибаемой пластинки сжата, а верхняя растянута, то $j = 2$, $i = 1$.

Выражения для z_0 получим из условия:

$$\sigma_0^b = \frac{\left(\sigma_x^b + \sigma_y^b\right)}{3} = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left[\left(1+\nu_j\right)\left(e_x + e_y\right)\right] = 0 . \quad (17)$$

Отсюда следует:

$$z_0(x,y) = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} . \quad (18)$$

Для получения выражений для моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, условно заменим арматурные стержни в направлении координаты *x* сплошным эквивалентным слоем металла переменной толщины (рис. 2).

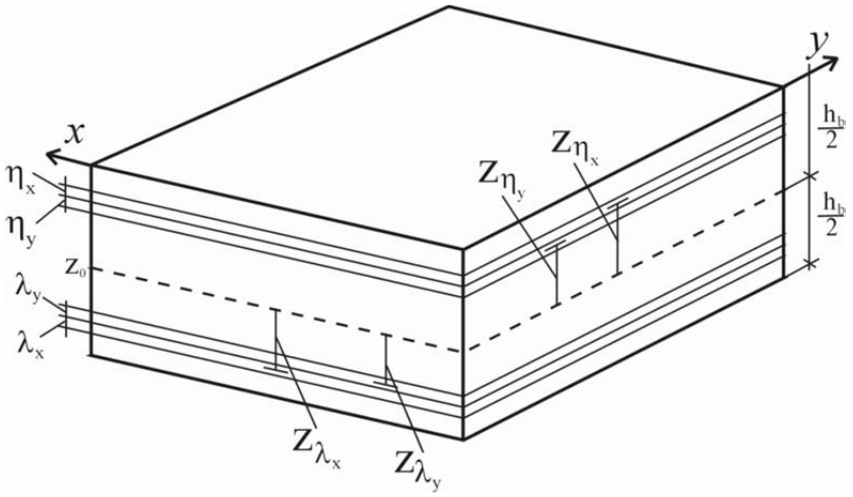

Рисунок 2. Замена арматурных стержней эквивалентным слоем

Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты *x* определяется законами изменения площади поперечного сечения арматурных стержней в направлении координаты *x*. Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты *y* определяется аппроксимацией площадей арматурных стержней в направлении *y* некоторой функцией, задающей закон изменения толщины эквивалентного слоя в направлении *y*.

Обозначим η_x, η_y – толщины эквивалентных армирующих слоев в верхней части пластинки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно *x, y*; λ_x, λ_y – толщины эквивалентных армирующих слоев в нижней части пластинки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно *x, y*; z_{η_x}, z_{η_y} – ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев в верхней части пластинки; $z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$ – ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев в нижней части пластинки.

Далее будем полагать, что под влиянием коррозионного износа будет изменяться сечение арматурных стержней, приводя к изменению толщин η_x, η_y, λ_x, λ_y эквивалентных армирующих слоев, не изменяя при этом величины координат центров тяжести $z_{\eta_x}, z_{\eta_y}, z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$. Таким образом, будем полагать, что под влиянием коррозионного износа толщина эквивалентных армирующих слоев изменяется, а их положение по толщине пластинки остается неизменным.

С учетом введенных гипотез, выражения для части моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, примут вид:

$$
\begin{aligned}
M_x^a &= \sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)\lambda_x z_{\lambda_x} + \sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)\eta_x z_{\eta_x},\\
M_y^a &= \sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)\lambda_y z_{\lambda_y} + \sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)\eta_y z_{\eta_y},\\
N_x^a &= \sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)\lambda_x + \sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)\eta_x,\\
N_y^a &= \sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)\lambda_y + \sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)\eta_y.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Здесь $\sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *x* и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_x} от срединной поверхности; $\sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *x* и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_x} от срединной поверхности; $\sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *y* и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_y} от срединной поверхности; $\sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *y* и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_y} от срединной поверхности.

С учетом отсутствия продольных усилий в сечении пластины, получим следующие окончательные выражения для M_x, M_y и H:

$$
\begin{aligned}
M_x &= D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y,\\
M_y &= D_{21}\chi_x + D_{22}\chi_y,\\
H &= D_3\chi_{xy},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где

$$
\begin{gathered}
D_{11} = \left[f_{11}\left(J_1^b + J_{x1}^a\right) + \left(J_2^b + J_{x2}^a\right) + f_{21}I_1^b\right], \qquad D_{12} = \left[f_{12}\left(J_1^b + J_{x1}^a\right) + f_{22}I_1^b + I_2^b\right],\\
D_{21} = \left[f_{21}\left(J_1^b + J_{y1}^a\right) + f_{11}I_1^b + I_2^b\right], \qquad D_{22} = \left[f_{22}\left(J_1^b + J_{y1}^a\right) + \left(J_2^b + J_{y2}^a\right) + f_{12}I_1^b\right],\\
D_3 = \left[2T_2^b - 2\frac{\left(T_1^b\right)^2}{T_0^b}\right],
\end{gathered}
\tag{21}
$$

в этих выражениях:

$$
\begin{gathered}
f_{11} = \frac{I_0^b I_1^b - \left(J_0^b + J_{y0}^a\right)\left(J_1^b + J_{x1}^a\right)}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2}, \qquad f_{12} = \frac{I_0^b\left(J_1^b + J_{y1}^a\right) - \left(J_0^b + J_{y0}^a\right)I_1^b}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2},\\
f_{22} = \frac{I_0^b I_1^b - \left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_1^b + J_{y1}^a\right)}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2}, \qquad f_{21} = \frac{I_0^b\left(J_1^b + J_{x1}^a\right) - \left(J_0^b + J_{x0}^a\right)I_1^b}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2}.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Жесткости, входящие в эти выражения, определяются следующими формулами:

- для бетона:

$$J_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z^k \partial z, \text{ к = 0,1,2.} \quad I_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z^k \partial z, \text{ к = 0,1,2.}$$

$$T_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z^k \partial z, \text{ к = 0,1,2;} \tag{23}$$

- для арматуры:

$$J_{xk}^a = E_a\left(\lambda_x z_{\lambda_x}^k + \eta_x z_{\eta_x}^k\right), \quad J_{yk}^a = E_a\left(\lambda_y z_{\lambda_y}^k + \eta_y z_{\eta_y}^k\right) \quad \text{к = 0,1,2.} \tag{24}$$

В формулах:

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} = -\frac{\chi_x\left(f_{11} + f_{21}\right) + \chi_y\left(f_{12} + f_{22}\right)}{\chi_x + \chi_y} \tag{25}$$

$$\alpha_j = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}, \quad \alpha_i = \frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}, \quad \beta_j = \frac{\Psi_j}{2\left(1+\nu_j\right)}, \quad \beta_i = \frac{\Psi_i}{2\left(1+\nu_i\right)} \tag{26}$$

Следует учитывать, что при выводе вышеприведенных выражений предполагается, что арматура и бетон работают совместно, невзирая на коррозионный износ арматуры.

2. Разрешающее уравнение изгибаемой армированной пластины на упругом основании, взаимодействующей с хлоридсодержащей средой

Подставляя в (1) выражения (20) с учетом (4) и выражение для *q* из модели грунтового основания, получим следующее разрешающее дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины на упругом основании в условиях хлоридной коррозии:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[D_3\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_{21}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]\right) - 2m\nabla^2 W + nW = p\left(x, y\right). \tag{27}$$

Для определения характеристик напряженно-деформированного состояния армированной пластины в каждый момент времени необходимо из решения уравнения диффузии (9) с соответствующими начальными и граничными условиями найти закон распределения концентрации *C* хлоридсодержащей среды по объему пластины в рассматриваемый момент времени. По уравнениям (14) можно определить уровень накопления повреждений в точках объема пластины к рассматриваемому моменту времени, по уравнениям (12), (13) – степень коррозионного поражения арматуры пластины к этому моменту времени. И в результате решить уравнение (27) с соответствующими граничными условиями, позволяющими получить для каждого конкретного случая однозначное решение. Имея решение этого уравнения, можно определить напряжения и деформации в любой точке армированной пластины в рассматриваемый момент времени.

Полученное дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины на упругом основании в сочетании с уравнениями проникания хлоридсодержащей среды, уравнениями накопления повреждений в бетоне и уравнениями коррозионного износа арматуры позволяет рассчитывать пластины при разном характере нагружения, при разных схемах опирания пластины

по контуру, разных программах воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды (среда сверху, снизу, среда с обеих сторон и среда действует на часть поверхности), а также определять время до разрушения пластины. Заметим, что в качестве условий разрушения выступает условие либо достижения предельного уровня поврежденности (Π = 1) в любой точке бетонного массива, либо достижения предельного уровня напряжений в арматуре вследствие ее коррозионного износа и взаимодействия с поврежденным окружающим бетоном.

Выводы

1. Полученные в статье уравнения позволяют описывать процесс деформирования и разрушения (трактуемого как накопление повреждений) армированных пластин на упругом основании, подвергающихся действию агрессивной хлоридсодержащей среды. Эти уравнения можно использовать для моделирования поведения железобетонных дорожных плит, подвергающихся воздействию агрессивных сред – антиобледенителей, применяемых для борьбы с гололедом. Если исключить из уравнений влияние упругого основания, то они могут использоваться для моделирования поведения железобетонных плит пролетных строений мостовых сооружений.

2. Характерной особенностью приведенных уравнений является то, что при их получении использовался деформационный подход, согласно которому поведение и арматуры и заполнителя описывалось нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями, причем в случае заполнителя учитывалась и характерная обычно для бетона неодинаковость сопротивления материала растяжению и сжатию.

3. Приведенные детерминированные уравнения с использованием метода статистического моделирования (Монте-Карло) могут быть использованы и для вероятностного моделирования процессов деформирования и коррозионного разрушения армированных пластин.

4. Во второй части статьи будет рассмотрено применение метода последовательных возмущений параметров в сочетании с методом сеток для решения приведенных уравнений. Будут приведены численные результаты, полученные с помощью разработанного программного комплекса и иллюстрирующие влияние хлоридсодержащей среды на поведение железобетонной пластины.

Исследование проведено при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России из федерального бюджета в рамках реализации федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение №14.B37.21.1222, а также в соответствии с грантом РФФИ №12-01-31130 Мол_а «Нелинейные модели деформирования и методы определения долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами и полями».

Литература

1. Глушков Г.И., Бабков В.Ф., Тригони В.Е. [и др.] Жесткие покрытия аэродромов и автомобильных дорог / Под ред. Глушкова. М.: Транспорт, 1994. 349 с.
2. Гвоздев А.А. Прочность, структурные изменения и деформации бетона. - М.: Стройиздат, 1978. С. 223-253.
3. Москвин В.М., Иванов Ф.М., Алексеев С.Н., Гузеев Е.А. Коррозия бетона и железобетона, методы их защиты. М.: Стройиздат, 1980. 536 с.
4. Алексеев С.Н., Иванов Ф.М., Модры С., Шиссль П. Долговечность железобетона в агрессивных средах. М.: Стройиздат, 1990. 320 с.
5. Овчинников И.Г., Раткин В.В., Землянский А.А. Моделирование поведения железобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридсодержащих сред. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2000. 232 с.
6. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
7. Полак А.Ф. Расчет долговечности железобетонных конструкций. Уфа: Изд-во Уфимск. нефт. ин-та, 1983. 116 с.

8. Mullek R.F. The Possibility of Evolving a Theory for Predicting the Service Life of Reinforced Concrete Structures // Mater. et Constr. 1985. Vol. 18. №108. Pp. 463-472.

9. Wright J., Frohnsdorf G. Durability of Buildings Materials: Durability Research in US and the Influence of RILEM on Durability Research // Mater. et Constr. 1985. Vol. 18. №105. Pp. 205-214.

10. Frangopol D.M., Lin K.Y., Estes A. Reliability of reinforced concrete girders under corrosion attack // Journal of Structural Engineering. ASCE. 1997. Vol. 123. №3. Pp. 286-297.

11. Enright M.P., Frangopol D.M. Service Life Prediction of Deteriorating Concrete Structures // Journal of Structural Engineering. ASCE. 1998. Vol. 124. №3. Pp. 309–317.

12. Biondini F., Bontempi F., Frangopol D. M., Malerba P. G. Cellular Automata Approach to Durability Analysis of Concrete Structures in Aggressive Environments // Journal of Structural Engineering. ASCE. 2004. Vol. 130. №11. Pp. 1724-1737.

13. Kong J.S., Ababneh A.N., Frangopol D.M., Xi Y. Reliability analysis of chloride penetration in saturated concrete // Probabilistic Engineering Mechanics. 2002. Vol. 17. №3. Pp. 305-315.

14. Frangopol D.M., Kallen M.-J., Van Noortwijk J.M. Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: review and future directions // Progress in Structural Engineering and Materials. 2004. Vol. 6. №4. Pp. 197-212.

15. Biondini F., Bontempi F., Frangopol D.M., Malerba P.G. Reliability of material and geometrically non-linear reinforced and prestressed concrete structures // Journal of Pure and Applied Algebra. 2004. Vol. 82. №13. Pp. 1021-1031.

16. Гузеев Е.А., Бондаренко В.М., Савицкий Н.В. Интегральный метод оценки напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов в случае воздействия агрессивной среды и силовой нагрузки // Труды НИИЖБ. М., Стройиздат, 1984. С. 20-27.

17. Попеско А.И. Работоспособность железобетонных конструкций, подверженных коррозии. СПб.: СПб гос. архит.-строит. ун-т, 1996. 182 с.

18. Бондаренко В.М., Прохоров В.Н. К вопросу об оценке силового сопротивления железобетона повреждению коррозионными воздействиями // Известия вузов. Строительство. 1998. №3. С. 30-41.

19. Леонович С.Н. Трещиностойкость и долговечность бетонных и железобетонных элементов в терминах силовых и энергетических критериев механики разрушения. Минск: Тыдзень, 1999. 264 с.

20. Соломатов В.И., Селяев В.П. Химическое сопротивление композиционных строительных материалов. М.: Стройиздат, 1987. 264 с.

21. Saetta A., Scotta R., Vitaliani R. Coupled Environmental-Mechanical Damage Model of RC Structeres // Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 1999. Vol. 125. Issue 8. Pp.4930-940.

22. Овчинников И.Г., Петров В.В. Определение долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. №2. С. 13-18.

23. Овчинников И.Г., Петров В.В. Прогнозирование работоспособности элементов конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных рабочих сред // Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СПИ, 1984. С. 3-15.

24. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.

25. Овчинников И.И., Наумова Г.А. Накопление повреждений в стержневых и пластинчатых армированных конструкциях, взаимодействующих с агрессивными средами. Волгоград: ВГАСУ, 2007. 272 с.

**Илья Игоревич Овчинников, г. Саратов, Россия*

Тел. раб.: (8452) 99-89-08; эл. почта: bridgeart@mail.ru

Fatigue assessment of tubular structures

Post-graduate student R.V. Guchinsky;
D.Sc., professor S.V. Petinov*,
Saint-Petersburg State Polytechnical University

Key words: Fatigue damage accumulation; «Strain-Life» approach; S-N criteria; Fatigue of tubular structures; FEA modeling of tubular and pipeline structures

General

An essential component of current rules for fatigue design of steel structures, e.g., [4, 6, 9], etc. is the linear damage summation, Palmgren-Miner, rule. It fits the widely used approaches, when the S-N criteria, or «Strain-Life» criteria for fatigue crack initiation are applied, and also when the residual fatigue life should be assessed in the crack propagation phase.

The damage assessment is recommended to carry out in the common form when the S-N criteria for fatigue are applied:

$$D = \sum_i n_i / N_i = C^{-1} \sum_i n_i \cdot (S_i)^m = (N^* / C) \sum_i p_i \cdot (S_i)^m \le \eta \,, \tag{1}$$

where i is the number of equivalent[1] cyclic stress components in the stress block, n_i is the number of equivalent stress cycles in stress block components, N^* is the number of stress «cycles» which experiences the structure through the service life, $p_i = n_i / N^*$ is the fraction of the stress cycles n_i in the life-long loading history, N_i is the number of cycles to failure at constant stress range S_i, η is the «usage factor», total time of exposure to fluctuating loading related to prescribed service life, C and *m* are parameters of a fatigue failure criterion, e.i.:

$$N(S) = C / S^m \,. \tag{2}$$

Bolotin [1] considered characterization of the loading history by continuous function of distribution of probabilities and proposed transformation of the damage summation scheme (1) into the integral form by defining the number of stress cycles n_i in the step-wise block form as the following:

$$n_i = N^* \cdot p(S) dS \,, \tag{3}$$

where N^* is the total number of load (stress) fluctuations over the intended service life (or a specified period of time), $p(S)$ is the probability of the stress range to occur in a range of dS. Respectively, the sum (1) is expressed as

$$D = \sum_i n_i / N_i = N^* \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} (p(S) / N(S)) dS \,. \tag{4}$$

This relationship can be readily used to estimate the total fatigue damage, which may be accumulated through service life of an industrial or marine structure or, alternatively, the number of stress excursions, N^*, over the intended service life, fatigue life, instead of the summation format (1).

By this reason development of a controversial procedure, i.e. transforming of the right-hand part of (4) into the common form (1) may seem needless. This may be true, when the S-N criteria are applied for fatigue analysis of structures and loading history is given by the stress probability distribution function.

However, the mentioned transforming may be helpful in assessment of residual fatigue life of redundant structures where cracks are allowed within the safe limits, especially when reduction of irregular loading history into equivalent cyclic loading should be done as recommended by present codes [4, 6, 7]. Also, it may be a necessary component of fatigue analysis based on «Strain-Life» approach

[1] The term «equivalent» is applied here since the irregular loading is substituted by cyclic loading successions

which includes an appropriate Strain-Life criterion and the Neuber's formula-based technique of evaluation the local strain range [17].

The procedure is exemplified in case of application of the «Strain-Life» approach in this paper. Therefore it may be reasonable first to display the technique of reducing the long-term stress distribution into a set of cyclic loading successions (histogram) equivalent by fatigue damaging to the random loading «history» through the service life.

Description of the procedure

Application of the damage summation procedure (1) presumes, as said in above, expressing the long-term stress range probability distribution function in the form of stress histogram, consisting of blocks of equivalent cyclic loading successions at stress ranges S_i with number of stress repetitions n_i. It is noted [4] that the number of equivalent stress successions, «steps», should be selected «large enough to ensure reasonable numerical accuracy, and should not be less than 20…». However, the explicit recommendations on evaluation of representative stress ranges S_i and respective number of stress cycles n_i in every of the block «steps» are missing.

To solve this problem, a procedure is proposed, as follows. In the context of recommended reducing the long-term distribution to the block-type composition of equivalent cyclic loading successions, first the whole range of service stress in the accepted stress distribution should be subdivided into several sub-ranges, steps, the number of which may be provisional, not necessarily equal 20. Then the partial damage corresponding to every of the i steps in the block-type damage summation (1) should be calculated using the general form (4):

$$d_i = N * \int_{S_{\min,i}}^{S_{\max,i}} (p(S)/N(S))dS\,. \tag{5}$$

in which $S_{\min,i}$, $S_{\max,i}$ are the minimum and maximum stress ranges of the «i» step of the block form (1).

Further, the number of equivalent stress cycles in every of the i steps is found as

$$n_i = N * \int_{S_{\min,i}}^{S_{\max,i}} p(S)dS\,. \tag{6}$$

Since the partial damage is defined in the linear summation procedure (1) as $d_i(S_i) = n_i(S_i)/N(S_i)$, in which S_i may be regarded an equivalent cyclic stress range of the «i» step, this stress range is obtained using the partial damage definition and fatigue criterion (2) as:

$$S_{i,eq} = (Cd_i / n_i)^{1/m}\,. \tag{7}$$

The loads, e.g., on bridge structures are typically classified into permanent loads due to self-weight of structural members, fixed equipment, variable loads caused by traffic, wind, diurnal and season changes of ambient temperature, and accidental loads caused by feasible vehicle impacts. Depending on the technique of recording and representation of service variable loads, the loading history may be given, alternatively, in the form of stress histogram or of stress continuous probability distribution function.

In marine applications, e.g., the wave loads and, respectively, local stress probability distributions are typically approximated in the form of the two-parameter Weibull «law» ([4, 17], etc.):

$$Q(S > S_1) = \exp(-(S_1 / a_s)^k)\,. \tag{8}$$

which is read as the probability to exceed an arbitrary stress range S_1; a_s, k are the scale and shape of the distribution parameters, respectively. The probability density function, $p(S)$, of the Weibull distribution (8) is given by:

$$p(S) = -\frac{dQ}{dS} = \frac{kS^{k-1}}{a_s^k}\exp(-(S/a_s)^k)\,. \tag{9}$$

Substituting (9) into (6), one finds the number of equivalent stress cycles in every of the i steps:

$$n_i = \frac{kN^*}{a_s^k} \int_{S_{\min,i}}^{S_{\max,i}} S^{k-1} exp(-(S/a_s)^k) dS . \quad (10)$$

And respective partial damage values, when the *S-N* criterion (2) is applied are defined as:

$$d_i = \frac{kCN^*}{a_s^k} \int_{S_{\min,i}}^{S_{\max,i}} S^{m+k-1} exp(-(S/a_s)^k) dS . \quad (11)$$

Further, the equivalent stress ranges for every of the block scheme steps i in (1) should be found from equation (7). And then the total fatigue damage is calculated substituting (10) and (7) into the sum (1):

$$D = \sum_i n_i / N_i = \frac{1}{C} \sum_i n_i S_{i,eq}^m = \frac{N^* S_{o,eq}^m}{C} \sum_i p_i \overline{S}_{i,eq}^m , \quad (12)$$

where $\overline{S}_{i,eq}^m = S_{i,eq}^m / S_{0,eq}^m$, in which the reference stress range, $S_{0,eq}$, is selected from the set of obtained values (12), components of the block scheme.

In the following, the above described procedure is implemented in fatigue assessment of brace and chord welded joint detail of the tubular frame bridge structure when the «Strain-Life» approach is applied.

Application to fatigue assessment of a bridge tubular frame welded joint detail

The steel tubular girder structure of a composite bridge is shown in Fig.1. The previous experience of marine community indicated development of high stress concentration in welded joints of chords and braces, of stabilizing columns and braces, i.e., in welded joints of tubular components, menacing reliability of structures.

Figure 1. Composite bridge with tubular frame and integral abutments ([15])

This is due to the large difference of stiffness of the connected components: the chord is typically loaded in direction of minimal stiffness whereas the brace is loaded along its longitudinal axis, i.e., in direction of maximum stiffness. The procedure of fatigue assessment of marine structures, focused, in particular, on design of tubular components is given, e.g., in DNV[2] Rules [4], in [6], etc.

The procedure consists commonly of the two basic components, design S-N curves of typified welded joints («categories of fatigue strength») and linear damage summation rule.

Characterization of fatigue properties of welded joints in tubular structures by S-N classes may be regarded an approximation, a simplified approach, since local conditions (e.g., loading composition) for the damage in details attributed to the same S-N class (category) may substantially differ.

[2] DNV – Det Norske Veritas, Norwegian Classification Society

This difference would result in uncertainty of assessment of bridge structure fatigue life. The rules for fatigue analysis of marine structures [4] employ S-N curves for base and weld materials only (with differentiation by corrosion protection); the shape of details in connection, specifics of the stress flow transfer through the joint is considered by evaluation of the stress concentration factors for the expected critical locations. The approach seems offering reduced range of uncertainties pertaining to the stress analysis of structure, and respectively, a more convincing evaluation of fatigue life.

Meanwhile the S-N criteria-based procedures operate with implication of linear elastic material behavior when stresses at critical locations are evaluated, whether the hot-spot or local stress via the respective stress concentration factors are used [7, 9, 10]. By this the physical nature of fatigue damage process in polycrystalline material structure, which realizes through cyclic microplasticity, is underestimated. This may result in excessive conservatism in estimation of fatigue life, in particular, in the range of the most frequent (moderate) service load excursions.

One more issue should be considered when the S-N criteria are applied: this is uncertainty in definition of the scale of fatigue damage in structure related to exhaustion of fatigue life. The S-N criteria are related almost to separation in two pieces of test specimens; the testing machines are supplied with devices which terminate test when stiffness of specimen would substantially drop down. By this moment fatigue crack may grow over large part of the specimen crossection (which is typically, according to the IIW[3] recommendations, 100 by 22 mm). When the S-N criterion is applied to fatigue analysis of welded joints with specific geometry and stress field, the respective crack size occurs uncertain. The rules [2, 4, 9] assume (but did not prove it) that exhaustion of design fatigue life of tubular welded joints may be related to a through-thickness crack. Ever since, this subject was not commented in the design codes.

In the sense of mentioned problems, the «Strain-Life» criteria-based approach may be preferred. It allows considering material cyclic plasticity, the leading mechanism of fatigue damage (although with problems in high-cycle range), and to almost exclude ambiguity of the damage indication: fatigue crack corresponding to properties of criteria is about the stress concentration zone. In welded joints the depth of the zone is around the radius of the weld toe, i.e. about 1 mm.

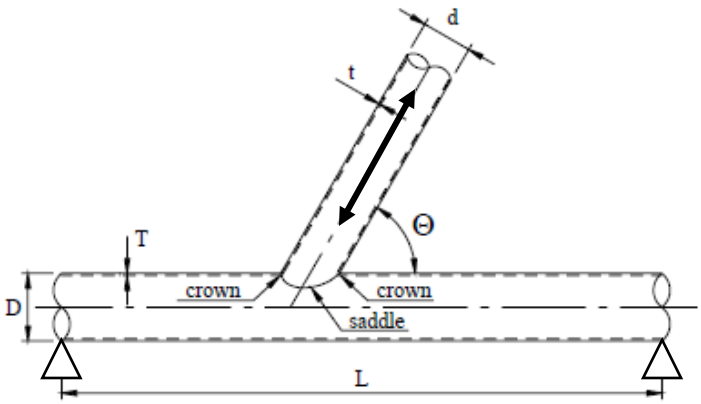

Figure 2. Scheme of the chord and brace welded joint

For illustration, an example of fatigue assessment of welded joint of tubular details, chord and brace, Fig. 2, is outlined. The scheme of loading is simplified: zero-to-tension random loading of the brace is assumed, with load (stress) range probability distribution function suggested as the Raleigh «law».

The number of load fluctuations through the service life is taken in accordance with recommendations of the code [6]: $N_d = 5 \cdot 10^6$.

Material of structure – higher strength steel of the 09G2 grade ($\sigma_y = 300\ MPa, \sigma_u = 450\ MPa$). Geometry of the detail characterize the following parameters: the chord diameter is $D = 330\ mm$; the wall thickness, $T = 18\ mm$; the brace diameter $d = 250\ mm$ and wall thickness $t = 18\ mm$. The brace angle is $\theta = 90^0$. It is assumed that the brace ending is adjusted to the chord shell shape and the weld is full penetration with weld throat 16 mm at the crown points and 8 mm at the saddle points depending on geometry of the joint circumference.

[3] IIW = International Institute of Welding

The «Strain-Life» approach in its simplest form consists of the two obtained empirically principal components: the Strain-Life criterion for fatigue of material under the scope of analysis, and generalized cyclic diagram giving the generalized description of elastic-plastic cyclic properties of the same material. Several versions of the criterion are known [3, 5, 11]; in the present analysis a simplified modified form [17] is selected:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_e = CN^{-\alpha} + 2\beta\sigma_{-1}K_t / E\,K_f\,, \tag{13}$$

where for the steel of the 09G2 grade $C = 0.340,\ \alpha = 0.654;\ \sigma_{-1} \approx 90,$ MPa, is the fatigue limit stress of the heat-affected zone, rolling skin removed [12, 17, 18]; β = 0.55, is the correction for the fatigue resistance decreasing under irregular loading [6]; K_t is the theoretical («elastic») stress concentration factor (SCF) and K_f is the fatigue notch factor.

The rules recommend formulae to calculate (SCF) addressed to the hot-spot stress approach, which is not applicable in the Strain-Life format. Respectively, the stress concentration factor values should be obtained for the critical locations in the joint («crown» and «saddle» points) by the finite element analysis (FEA).

Fatigue notch factor, K_f, may be approximated by Peterson's formula $K_f = 1 + (K_t - 1)/(1 + g/r)$ [16], where ***r*** is the notch root (weld toe) radius, assumed here as *r* = 1 mm, *g* is the «material structure parameter», a volume at the weld toe which depth approximately corresponds to fatigue crack transition from the shear into the normal opening mode [13]. For structural steels with the yield stress in the range 235 – 390 MPa this parameter may be defined by relationship: $g = 0.38(350/\sigma_u)^{1.16}$ [16, 17], where σ_u is the ultimate strength, MPa.

Modified criterion (13) provides somewhat conservative estimations of the damage in the «transition» number of load cycles, $N \approx 10^5$; however, to partly compensate it, the criterion is completed with corrections to the «elastic term», $\Delta\varepsilon_e$, to account for effects of material microplasticity at the stress concentration area, (K_t / K_f), and irregular loading, β, on the damage accumulation.

The cyclic strains at the weld toe are estimated by applying the Neuber's formula-based technique [17]. Basically, Neuber's formula presents heuristic relationship between stress and strain concentration factors when elastic-plastic material behavior is assumed [14]:

$$K_t^2 = K_\sigma K_\varepsilon\,, \text{ or } \quad \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = (K_t \cdot \Delta\sigma_n)^2 / E\,, \tag{14}$$

where $\Delta\sigma_n$ is the nominal stress range, $\Delta\sigma$ and $\Delta\varepsilon$ are the stress and strain ranges, respectively; E is the elasticity modulus.

Applicability of (14) for fatigue analyses was proved since 1960s for stress concentrations with rather unconstrained cyclic plasticity [5, 12, 17], etc. The usefulness of the (14) in engineering procedures is due to necessity of performing <u>only once elastic</u> analysis of a structure (for a given loading mode), in particular, by FEA. Current FEA packages allow cyclic elastic-plastic analysis; however, it has to be carried out many times to cover the whole range of service stresses, which turns a laborious issue.

The stress and strain ranges at a stress concentration in (14) are interrelated by the cyclic stress-strain diagram, which readily allows evaluation of the cyclic strain range at the notch, $\Delta\varepsilon$.

The technique of evaluation stress range $\Delta\varepsilon$ differing from typically recommended ([5, 8], etc.) is illustrated in Fig. 3.

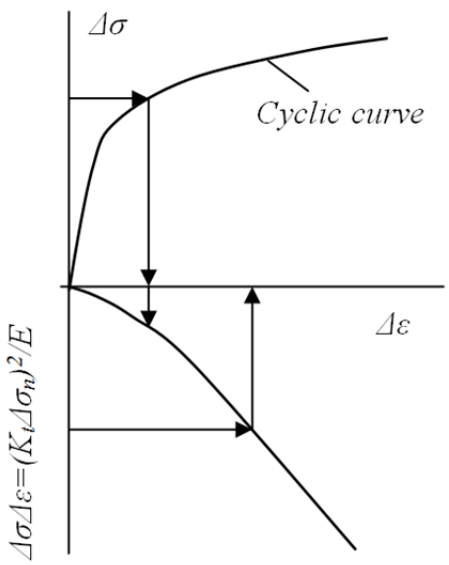

Figure 3. Evaluation of the local strain range by Neuber's formula and cyclic curve

Stress and corresponding strain ranges of the cyclic curve are multiplied and the products $\Delta\sigma\Delta\varepsilon$ are plotted with respect to the strain range $\Delta\varepsilon$ axis, as shown in Fig. 3.

As follows from (14), $\Delta\sigma\Delta\varepsilon = (K_t\Delta\sigma_n)^2 / E$; one needs to calculate nominal stress and stress concentration factor, and the respective strain range can be obtained from the graph.

If nominal stress can not be defined, e.g. when the beam theory is not applicable, the local stress at a critical location calculated on assumption of elastic behavior of material may be used instead of product $K_t\Delta\sigma_n$ in (14).

Stress analysis aimed at evaluation of the stress concentration factors at the mentioned critical locations was carried out using the ANSYS software. The finite-element (FE) model of the detail was designed so that the necessary stress resolution was attained at the weld toes[4] of the joint circumference. The minimum finite element size at the assumed rounded weld toe was taken equal 0.2 of the weld toe radius, in coherence with past experience of numerical and experimental studies of stress concentrations [17].

Fig.4 shows fragment of the FE-model of the joint at the crown point (points, indicating the two critical locations, high stressed areas). The dark line along the weld toe at the chord indicates the narrow highly stressed area, whereas the weld toe at the chord is essentially less stressed. The FE mesh and the results of analysis at the saddle point is shown in Fig. 5.

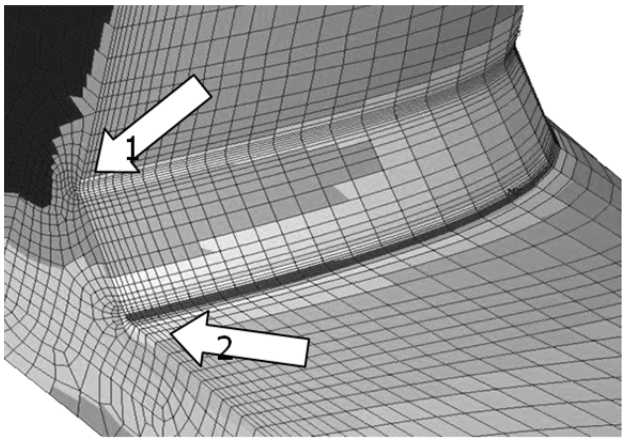

Figure 4. Crown point: (1) - weld toe at the brace shell, (2) – weld toe at the chord shell

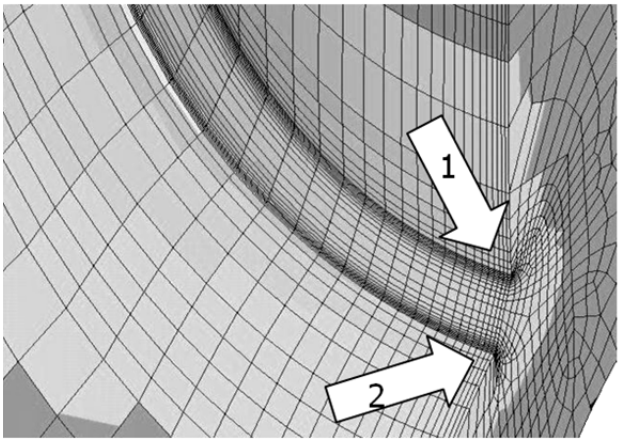

Figure 5. Saddle points of the joint: (1) – weld toe at the brace shell, (2) – weld toe at the chord shell

The values of stress concentration factor (SCF) are obtained by relating maximum equivalent (von-Mises) stresses at the mentioned critical locations found by FEA to the nominal stress in the brace. The results are presented in Table 1. For comparison, respective SCF values are calculated using approximate formulae [4] given in the below; however, the Rules define so-called «hot-spot» stress concentration factors attributed to the general geometry of a detail, and the weld shape is not considered. The local stress increase due to the weld shape may be included into the definition of the «hot-spot design S-N curve»; otherwise, the hot-spot SCFs may be corrected to account for effect of the weld shape multiplying by the «weld shape» stress concentration factor, recommended as $K_w = 1.6$ [4, 9].

The hot-spot SCF formulae [4] and calculated values are shown in Table 2, where α = 2L/D =18; β = d/D = 0.75; γ = D/2T =10; η = t/T = 1.0.

Table 1. Stress concentration factors (SCF) at the critical locations

Location	SCF, FEA		Rules [3], Hot-spot SCF		HSS SCF, corrected	
	Crown	Saddle	Crown	Saddle	Crown	Saddle
Brace	7.0	12.9	3.433	6.351	5.49	10.16
Chord		22.24	5.404	9.513	8.64	15.22

[4] Weld toes at the chord shell and at the brace shell

Table 2. Hot-spot SCF formulae [4]

Critical «hot-spot» location	Hot-spot SCF
Chord saddle	$K_{tcs} = \gamma\eta^{1.1}(1.11\text{-}3(\beta\text{-}0.52)^2) = 9.513$
Chord crown	$K_{tcc}=\gamma^{0.2}\eta(2.65+5(\beta\text{-}0.65)^2) + \beta\eta(0.25\alpha\text{-}3)=5.404$
Brace saddle	$K_{tbs} = 1.3 + \gamma\eta^{0.52}\alpha^{0.1}(0.187 - 1.25\beta^{1.1}(\beta - 0.96)) = 6.351$
Brace crown	$K_{tbc} = 3 + \gamma^{1.2}(0.12\exp(-4\beta) + 0.01\beta^2 - 0.045) + \beta\eta(0.1\alpha - 1.2) = 3.433$

As seen from Table 1, the maximum local stress occurs in the saddle point related to the chord shell, the respective weld toe, $K_t = 22.24$. Corrected HSS SCF at the same location is also very high, $K_{tcs} = 15.22$, although it is somewhat smaller than obtained by FEA.

It is assumed in the present study that alternating axial loading history of the brace is described by the Raleigh nominal stress range distribution with parameters in (8): $k = 2$ and scale parameter $a_s = 2\sqrt{2}\sigma_s$, where σ_s is the standard deviation of the stress amplitudes. The latter is taken rather provisionally, equal to $\sigma_s = 1.75$ MPa, although considering very high stress concentration at the chord saddle point. The once in the stress history maximum nominal stress range is $S_{\max} = \sigma_{s,nom}\sqrt{-8\ln Q} \approx 19.44$ MPa provided that probability to exceed this value corresponds to the number of load fluctuations through the service life, i.e., $Q = 1/N_d = 2\cdot 10^{-7}$.

According the procedure the Raleigh distribution of the nominal stress should be transformed into the step-wise equivalent histogram. The whole range of the nominal stress is subdivided into 6 steps, sub-ranges: 0-3.24; 3.24 -6.48; 6.48-9.72; 9.72-12.96; 12.96-16.2 and 16.2-19.44 MPa. To estimate the equivalent number of cyclic loadings in every of the sub-ranges, the above parameters of the Raleigh distribution are substituted into (10):

$$n_i = \frac{kN*}{a_s^k}\int_{S_{\min,i}}^{S_{\max,i}} S^{k-1}exp(-(S/a_s)^k)dS = (N_d/4\sigma_s^2)\int_{S_{\min,i}}^{S_{\max,i}} S\,exp(-(S^2/8\sigma_s^2))dS$$

The respective equivalent stress ranges for every of the sub-ranges are calculated using the appropriate design S-N curve of the F_3 class [4] (load-carrying welded joint) with parameters: $m = 3.0,\ C = 3.51\cdot 10^{11}$: $S_i^{eq} = (d_i C/n_i)^{1/m}$, where partial damage values d_i are found by using (11). The equivalent number of cyclic loadings in every of the sub-ranges and corresponding equivalent nominal stress ranges are presented in Table 3.

Table 3. The equivalent stress histogram parameters, $\sigma_s = 1.75\ MPa$ (Raleigh distribution) S-N curve of the F_3 class with parameters: $m = 3.0,\ C = 3.51\cdot 10^{11}$

S, sub-ranges	**n_i, cycles**	**S_{eq} nominal, MPa**
0 – 3.24	$1.742\cdot 10^6$	2.313
3.24 – 6.48	$2.357\cdot 10^6$	4.876
6.48 – 9.72	$7.951\cdot 10^5$	7.764
9.72 – 12.96	$1.005\cdot 10^5$	10.758
12.96 – 16.2	$5.156\cdot 10^3$	13.818
16.2 – 19.44	110	16.942

To prove the procedure, S-N curve of the B_2 class (parent material, [4]) was used to obtain equivalent stress ranges for every of sub-ranges of the stress histogram. The results are presented in Table 4. It may be seen the difference between equivalent stress values practically is negligible. It means

that evaluation of the equivalent stress ranges in composing the service stress histogram may be based on selection of any of the design S-N criteria; it should be noted the one-slope approximation is applied.

Table 4. The equivalent stress histogram parameters, $\sigma_s = 1.75\ MPa$ ***(Raleigh distribution) S-N curve of the B₂ class with parameters:*** $m = 4.0,\ C = 7.67 \cdot 10^{14}$.

S, sub-ranges	**n_i, cycles**	**S_{eq} nominal, MPa**
0 – 3.24	$1.742 \cdot 10^6$	2.395
3.24 – 6.48	$2.357 \cdot 10^6$	4.956
6.48 – 9.72	$7.951 \cdot 10^5$	7.813
9.72 – 12.96	$1.005 \cdot 10^5$	10.790
12.96 – 16.2	$5.156 \cdot 10^3$	13.838
16.2 – 19.44	110	16.947

Following the procedure, the equivalent nominal stress ranges are multiplied by the maximum stress concentration factor ($K_t = 22.24$, saddle point, weld toe at the chord) to find the product $\Delta\sigma\Delta\varepsilon$. According (14) $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = S_{eq,i}\Delta\varepsilon_i = (K_t \cdot S_{n,eq})^2 / E$; strain ranges in every of the histogram sub-ranges, $\Delta\varepsilon_i$, are estimated from the lumped (generalized) cyclic curve for the steel [17], fragment of which is given in Table 5.

Table 5. Stabilized lumped cyclic curve of the 09G2 grade steel

Δσ, MPa	105.0	210.0	303.2	363.2	435.0	482.1
Δε	0.0005	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025	0.0030
Δε Δσ	0.0525	0.2100	0.4548	0.7264	1.0875	1.4463

The strain range values $\Delta\varepsilon_i$ are applied to calculate the number of cycles prior to material failure at every of the stress histogram sub-ranges using the criterion (13) and respective values of partial damage. The results are given in Table 6.

Table 6. Histogram parameters, Neuber's strain ranges and partial damages

S_n, sub-ranges, MPa	**$S_{nom.eq}$, MPa**	**$\Delta\varepsilon_i$**	**n_i, cycles**	**N_i, cycles**	**d_i**
0 – 3.24	2.313	-	$4.617 \cdot 10^6$	-	-
3.24 – 6.48	4.876	-	$3.539 \cdot 10^5$	-	-
6.48 – 9.72	7.764	0.0007927	$2.713 \cdot 10^4$	$1.188 \cdot 10^5$	0.2283
9.72 – 12.96	10.758	0.001138	$2.079 \cdot 10^3$	$2.109 \cdot 10^4$	0.0986
12.96 – 16.2	13.818	0.001507	159	$9.166 \cdot 10^3$	0.0173
16.2 – 19.44	16.942	0.001931	12	$5.017 \cdot 10^3$	0.0024

It follows from the results of analysis that the total damage D ≈ 0.347 which means that expected fatigue life of the detail may be almost 3 times longer compared to the designed, certainly, on condition the intensity of traffic loading would remain unchanged through the service life and the structure would be effectively protected from corrosion.

The nominal stress in the brace may seem too small; on condition the fatigue resistance would be expired by the end of designed life of the detail (D = 1) the maximum nominal stress may be increased approximately up to 30 MPa. Still, it remains small depending on the very high stress concentration at the joint. The local stress at the saddle point of the chord may be effectively lowered by increasing stiffness of the chord shell (thickness of the shell) in the joint area.

Conclusions

1. A procedure of the continuous long-term stress distribution explicit transformation to the step-vise block-type format is developed. It provides unambiguous technique of composing the histogram of service loading and allows reducing the number of equivalent cyclic stress fragments compared to those required by the rules for fatigue design scheme and provides accuracy of fatigue analysis of welded structures.

2. The procedure may seem unnecessary when the damage index is calculated by using the damage summation in the integral form (4). However, it is necessary when the damage should be analyzed by the means of the «Strain-Life» approach and application of the Neuber's formula based approach and may be helpful when the crack propagation has to be assessed.

3. Efficiency of the developed approach is illustrated in example of fatigue analysis of a detail of welded tubular structure. The analysis may be used to select sufficiently reliable versions of the detail.

The work was supported by the Russian Grant for Fundamental research 12-08-00943a

References

1. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 321 с.
2. Conti, F., Verney, L., Bignonnet, A. Fatigue Assessment of Tubular Welded Connections with the Structural Stress Approach // Fatigue Design 2009. Proceedings. 25-26 Nov. 2009. Senlis, France. Pp. 1-8.
3. Coffin, L.F., Tavernelli, J.F. Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low-Cycle Fatigue // Trans. ASME. 1962. Ser.D, 4. Pp. 533.
4. Det Norske Veritas. Fatigue Assessment of Offshore Steel Structures. Recommended Practice (RP-C203), Hovik, Norway. 2006.
5. Ellyin F. Fatigue Damage, Crack Growth and Life Prediction. Chapman & Hall, London. 1997. 486 p.
6. Kuhn B., et al. Assessment of Existing Steel Structures: Recommendations for Estimation of Remaining Fatigue Life. JRC – ECCS Joint Report. [Электронный ресурс] EUR 23252 EN – 2008. URL: *Eurocodes.jrc.ec.europa.eu/doc/background/EUR23252EN.pdf.*
7. Fricke W. Guideline for the Fatigue Assessment by Notch Stress Analysis for Welded Structure / Int. Institute of Welding. Cambridge, Abington, 2008. IIW-Doc. XIII-2240r-08/XV-1289r-08.
8. Glinka G. A Cumulative Model of Fatigue Crack Growth // Int. Journal of Fatigue, April, 1982. Pp. 59-67.
9. Hobbacher A. Recommendations for Fatigue Design of Welded Joints and Components / Int. Institute of Welding. Cambridge, Abington, 2007. IIW Document XIII-2151r1-07 / XV-1254r1-07.
10. Jones J.P., et al. Fighting Fatigue in Steel Bridges // TR News 259, November-December, 2008. Pp. 25-26.
11. Manson S.S. Fatigue: A Complex Subject - Some Simple Approximations // Experimental Mechanics. Vol. 7, №5. 1965. Pp. 193-226.
12. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. Пособие в 4 т. / Под общей ред. Панасюка В.В. Киев: Наукова думка, 1988.
13. Miller K.J. Materials Science Perspective of Metal Fatigue Resistance // Materials Science and Technology. 1993. Vol. 9. Pp. 453-462.
14. Neuber H. Theory of Stress Concentration for Shear Strained Prismatic Bodies with Arbitrary Non-Linear Stress-Strain Law // Journal of Applied Mechanics. 1961. Vol. 28. Pp. 544-550.
15. Niederkofler T. Eurocodes. Fatigue, Steel Bridges [Электронный ресурс] // Seminar at the Helsinki University of Technology, 2003. URL: http://www.stalforbund.com/Eurokoder/Fatique_Steel_Bridges.pdf.
16. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений: Пер. с англ. М.: Мир, 1977, 301 с.
17. Petinov, S.V. Fatigue Analysis of Ship Structures. Backbone Publishing Co., Fair Lawn, NJ, USA, 2003, 262 p.
18. Трощенко В.Т., Сосновский Л.А. Сопротивление усталости металлов и сплавов: Справочное пособие в 2 т. Киев: Наукова думка, 1987.

**Сергей Владимирович Петинов, Санкт-Петербург, Россия*
Тел. раб.: +7 (812) 552-6303; эл. почта: sergei.petinov@gmail.com

Расчет надежности оснований фундаментов по критерию прочности при ограниченной информации о нагрузке

Д.т.н., профессор В.С. Уткин;
инженер Е.А. Шепелина*;
ФГБОУ ВПО Вологодский государственный технический университет

Ключевые слова: основания фундаментов; давление; грунт; надежность; информация; случайная величина

01.07.2010 вступил в силу Закон РФ №384 «Технический регламент по безопасности зданий и сооружений», в котором содержатся требования по обеспечению механической (конструкционной) безопасности сооружений с ее обоснованным расчетом.

Основания и фундаменты – важнейшие несущие элементы зданий и сооружений. Кроме того, они являются сложными техническими системами, определяющими надежность конструкций в целом. Разрушение или значительные деформации оснований и фундаментов чаще всего приводят к отказу всего здания. Трещины в стенах нижних или верхних этажей образуются из-за неравномерной нагрузки на грунт основания и неоднородности грунта и свидетельствуют о неравномерной осадке фундамента.

Одной из мер безопасности зданий и сооружений является обеспечение надежности сооружения. В стандарте ГОСТ Р 54257-2010 «Надежность строительных конструкций и оснований» под надежностью понимается способность конструкций и оснований выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. Надежность механических систем (зданий и сооружений) определяется, прежде всего, надежностью отдельных несущих элементов систем и их структурой (последовательной, параллельной, смешанной) в понятиях теории надежности. Основание фундамента является одним из элементов здания или сооружения, и в то же время это последовательная система (в понятиях теории надежности), состоящая из условных элементов в виде критериев надежности по прочности и осадке фундамента.

Расчет надежности (обеспеченности безотказной работы) оснований в ряде случаев является непростой задачей. Для оценки надежности любой конструкции необходима статистическая информация о случайных параметрах в математических моделях предельных состояний. Информация о случайной величине считается полной, если по ней можно выявить законы распределения вероятностей случайных величин, зависимость и независимость между ними и с достаточной точностью оценить параметры распределений. В этом случае расчет надежности проводят по рекомендациям ГОСТ Р 54257-2010 вероятностно-статистическими методами. К сожалению, на практике информация часто оказывается объективно неполной. В такой ситуации применение методов определения надежности, построенных на теории вероятностей, стандартом ГОСТ Р 54257-2010 не рекомендовано, и каких-либо рекомендаций или предписаний не приводится.

Вероятностно-статистические методы расчетов надежности, в том числе оснований и фундаментов, получили определенное теоретическое обоснование и применение в инженерных расчетах надежности [1,2,3,4 и др.]. Суть этих методов для оснований фундаментов изложена в работе [1], а для других несущих элементов – в работах [2,3,4 и др.] Применительно, в частности, к основаниям фундаментов в этих методах определяется вероятность безотказной работы по расчетным математическим моделям предельных состояний. Например, по критерию прочности определяется вероятность события:

$$X \le Y, \tag{1}$$

где X – обобщенная нагрузка на грунт основания; Y – обобщенная прочность грунта основания. X и Y являются случайными величинами.

При неполной информации о случайных величинах X и Y используются другие методы расчетов надежности с более осторожным подходом, например, метод интервальных средних [5,6,7,8], возможностные методы [9,10], метод на основе распределений, полученных из неравенства Чебышева [11,12] и др.

Рядом авторов, включая авторов статьи, разработаны комбинированные методы [13,14,15,16,17,18], где в расчетной модели содержатся случайные величины (с полной информацией) и возможностные величины (с ограниченной статистической информацией). Не останавливаясь на этих методах, рассмотрим новый подход к расчетам надежности грунтового основания по критерию прочности грунта, используя распределение, названное нами усеченным интервальным распределением. Такая задача представляет практический интерес при рассмотрении различных воздействий на здание и, соответственно, на его основание при изменении функционального назначения всего здания или его части, при сравнительной оценке безопасности эксплуатации нескольких зданий одновременно, при ограниченном времени на расчет надежности основания и т.д. Особую значимость проблема оценки надежности оснований фундаментов имеет для многоэтажных зданий после некоторого времени их эксплуатации, когда заметно меняются нагрузка и давление на грунт основания и сами свойства грунта.

Рассмотрим расчет надежности оснований по критерию прочности грунта (по несущей способности), используя расчетную модель вида:

$$\widetilde{R} \le \widetilde{R}_{пр}, \tag{2}$$

где $\widetilde{R}$ – давление от фундамента на грунт основания, которое в силу ограниченности информации (показано ниже) будем описывать усеченным интервальным распределением [19];

$\widetilde{R}_{пр}$ – предельное сопротивление грунта основания, определяемое по формуле, известной из работы [20]:

$$R = \frac{\gamma_{C1}\gamma_{C2}}{k}\left[M_\gamma k_z b\widetilde{\gamma}_{II} + M_q d_1 \gamma'_{II} + (M_q - 1) d_b \widetilde{\gamma}'_{II} + M_C \widetilde{c}_{II}\right], \tag{3}$$

где $\gamma_{C1}, \gamma_{C2}, k, M_\gamma, M_q, M_c, k_z, b, d_1, d_b$ – детерминированные величины;

$\widetilde{\gamma}_{II}$ – удельные веса грунтов, залегающих ниже подошвы фундамента (при наличии подземных вод определяется с учетом взвешивающего действия воды);

$\widetilde{\gamma}'_{II}$ – удельные веса грунтов, залегающих выше подошвы фундамента;

$\widetilde{\gamma}_{II}$ и $\widetilde{\gamma}'_{II}$ являются случайными величинами;

$\widetilde{c}_{II}$ – удельное сцепление грунта, залегающего непосредственно под подошвой фундамента (случайная величина).

На сегодняшний день главная методологическая и практическая проблема заключается в определении давления на грунт под фундаментом эксплуатируемого здания $\widetilde{R}$ с учетом его изменчивости.

Как правило, определение давления на грунт основания осуществляется подсчетом весов элементов конструкций и нормативными значениями эксплуатационной нагрузки (мебель, оборудование, люди и т.д.). Этот метод для жилых зданий на стадии многолетней эксплуатации сопряжен с большими трудностями, затратами времени и денежных средств.

В связи с этим нами предлагается новый подход к определению давления R фундамента на грунт основания с учетом его изменчивости для зданий с проемами нижнего этажа без элементов их усиления. При этом выявляются два значения давления: наименьшее $q_{\min}$ и наибольшее $q_{\max}$. Наименьшее значение $q_{\min}$ принимается на стадии проектирования по результатам сбора нагрузок, содержащихся в проектной и другой документации здания или сооружения. Наибольшее значение $q_{\max}$ определяется косвенным путем по формуле:

$$q_{\max} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{Bi} A_i}{A_ф} + q_0, \tag{4}$$

где σ_{Bi} – предел прочности материала простенков первого этажа с учетом их деградации (наличие трещин и т.п. на момент обследования);

A_i – площадь поперечного сечения *i*-го простенка на всем периметре здания или на некоторой его части (представляющей опасность);

$A_ф$ – площадь подошвы фундамента соответственно по периметру здания или его части, т.е. в пределах всех учтенных A_i;

q_0 – нагрузка (полезная) на всем первом этаже или его части.

Нагрузки $q_{\min}$ и $q_{\max}$ примем точными крайними значениями случайной величины $\widetilde{R}$. Среднее значение нагрузки $q_{cp} = \overline{q}$ примем в виде $\overline{q} = (q_{\max} + q_{\min})/2$. Случайную величину – нагрузку $\widetilde{R}$ – при имеющейся статистике о ней предлагается характеризовать (описывать) усеченным интервальным распределением [19]. Сущность этого распределения рассмотрим в общем виде при описании «ограниченной» случайной величины, для общности обозначенной *X*, с известными значениями среднего m_x и точных границ (ограничений) изменчивости *a* и *b*. Хотя такая ограниченная информация не позволяет выявить точное распределение случайной величины в виде функции распределения $F_X(x)$, она дает возможность построить граничные функции распределения (нижнюю $\underline{F}_X(x)$ и верхнюю $\overline{F}_X(x)$) множества {*x*}. Эти граничные функции можно вывести с использованием теории продолжения В.П. Кузнецова [5] путем решения простых задач линейного программирования. В результате такого подхода были получены граничные функции распределения случайной величины X вида:

$$\underline{F}_X(x) = \begin{cases} 0, & если\ x \le m_X \\ \dfrac{x - m_X}{x - a}, & если\ m_X \le x \le b; \\ 1, & если\ x \ge b \end{cases}$$

(5)

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} 0, & если\ x \le a \\ \dfrac{b - m_X}{b - x}, & если\ a \le x \le m_X. \\ 1, & если\ x \ge m_X \end{cases}$$

В графическом виде усеченное интервальное распределение имеет вид, показанный на рис. 1.

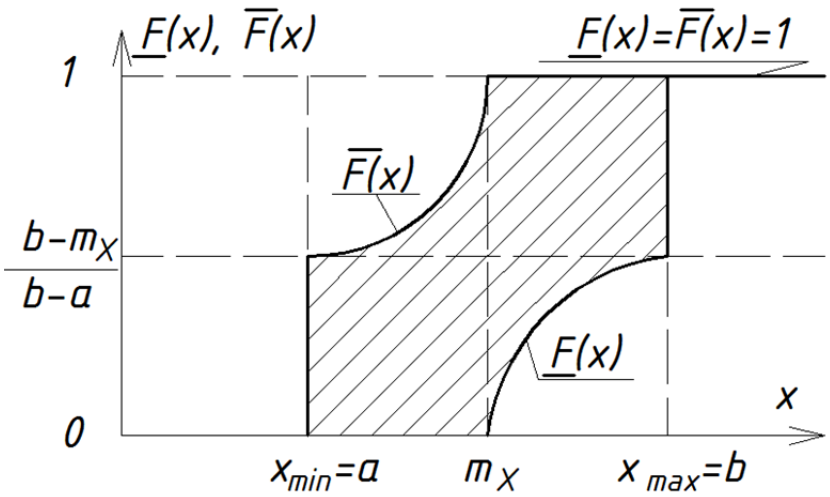

Рисунок 1. Множество функций распределения *F(x)*, ограниченное функциями $\overline{F}_X(x)$ и $\underline{F}_X(x)$. m_x – среднее значение случайной величины *X*

Истинная, но неизвестная функция распределения $F_X(x)$ находится в границах интервала $\underline{F}_X(x) \le F_X(x) \le \overline{F}_X(x)$ в заштрихованной области рис. 1. Ордината точки пересечения кривой $\underline{F}_X(x) = \dfrac{x - m_X}{x - a}$ и прямой $x = b$ равна $\dfrac{b - m_X}{b - a}$ (см. рис. 1). Ордината точки пересечения кривой $\overline{F}_X(x) = \dfrac{b - m_X}{b - x}$ и прямой $x = a$ будет $\dfrac{b - m_X}{b - a}$ (см. рис. 1). Эти значения ординат показаны на рис. 1.

Соответствующие условные функции плотностей граничных функций распределения находятся как производные от функций $\overline{F}_X(x)$ и $\underline{F}_X(x)$ по аргументу *x*, которые принимают вид:

$$\underline{\rho}_X(x) = \begin{cases} 0, & если\ x < m_X \\ \dfrac{m_X - a}{(a - x)^2}, & если\ m_X \le x \le b \\ \dfrac{m_X - x}{b - a}\delta(x - b), & если\ x = b \\ 0, & если\ x > b \end{cases};$$

(6)

$$\overline{\rho}_X(x) = \begin{cases} 0, & если\ x < a \\ \dfrac{b - m_X}{b - a}\delta(x - a), & если\ x = a \\ \dfrac{b - m_X}{(b - x)^2}, & если\ a \le x \le m_X \\ 0, & если\ x < m_X \end{cases},$$

где $\delta(x - b)$ и $\delta(x - a)$ – функции Дирака или импульсные функции, сконцентрированные в точке $x = b$ и точке $x = a$.

Представим, что в результате анализа удается определить давление на грунт основания в $q_{\min}$ и $q_{\max}$, а также установить (испытаниями и расчетами по формуле (3)) прочностные характеристики грунта в виде множества сопротивлений грунта $\{R_{np}\}$ в соответствии с требованиями стандарта ГОСТ 53778-2010 «Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния».

Используя эти данные, рассмотрим методику расчета надежности основания фундамента по критерию прочности грунта по условию (2) с ограниченной статистической информацией о нагрузке на грунт основания $X = \widetilde{R}$ и, как один из вариантов, с полной информацией о предельном сопротивлении грунта основания $Y = \widetilde{R}_{np}$.

Случайные величины $\widetilde{\gamma}_{II}$, $\widetilde{\gamma}'_{II}$ и $\widetilde{c}_{II}$ в (3) будем описывать, как и в работе [1], нормальным (гауссовским) законом распределения [1,2,3,4] с функцией плотности вероятности, например, для случайной величины *Y*:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_y}} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2S_y^2}}. \quad (7)$$

Следовательно, и $\widetilde{R}_{np}$, как сумма (композиция) случайных величин $\widetilde{\gamma}_{II}$, $\widetilde{\gamma}'_{II}$ и $\widetilde{c}_{II}$, будет по [2,3,4] характеризоваться нормальным распределением с плотностью вероятностей:

$$f(R_{np}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_R}} e^{-\frac{(\widetilde{R}_{np} - m_R)^2}{2S_R^2}}, \tag{8}$$

где по методу линеаризации принято

$$m_R = \frac{\gamma_{C1}\gamma_{C2}}{k}\left[M_\gamma k_z b m_{\gamma_{II}} + M_q d_1 m_{\gamma'_{II}} + (M_q - 1) d_b m_{\widetilde{\gamma}'_{II}} + M_C m_{c_{II}}\right],$$

где $m_{\gamma_{II}}$, $m_{\gamma'_{II}}$, $m_{c_{II}}$ – статистические математические ожидания случайных величин $\widetilde{\gamma}_{II}$, $\widetilde{\gamma}'_{II}$ и $\widetilde{c}_{II}$.

Среднее квадратическое отклонение $S_{R_{np}}$ случайной величины $\widetilde{R}_{np}$, опираясь на исследования [2,3], представим в краткой форме:

$$S_{R_{np}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial \gamma_{II}}\right)_m^2 S_{\lambda_{II}}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \gamma_{II}}\right)_m^2 S_{\gamma_{II}}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial c_{II}}\right)_m^2 S_{c_{II}}^2}, \tag{9}$$

где индекс *m* у скобок указывает на то, что выражения в скобках производных случайных величин заменяются их математическими ожиданиями.

Из классической теории надежности [2,3] известно, что для независимых случайных величин $\widetilde{R}$ и $\widetilde{R}_{np}$ в (1) при обозначениях $X = \widetilde{R}$ и $Y = \widetilde{R}_{np}$ вероятность отказа Q (события $X > Y$) определяется по формуле:

$$Q = \iint_V f_X(x) \cdot f_Y(y) dxdy,$$

а вероятность безотказной работы (события $X \le Y$) по формуле:

$$P = \iint_S f_X(x) \cdot f_Y(y) dxdy, \tag{10}$$

где V – область отказа; S – область безотказной работы; $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – функции плотностей распределения вероятностей соответственно для X (нагрузки) и Y (прочности).

При описании случайной величины (давления на грунт основания) $\widetilde{R} = X$ усеченным интервальным распределением [20] с функциями границ распределений $\underline{F}_X(x)$ и $\overline{F}_X(x)$ по (4) и соответствующими функциями плотностей вероятностей $\underline{f}_X(x)$ и $\overline{f}_X(x)$ при обозначении $y = x$ [3], как величин одной физической природы, будем иметь:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \iint_S f_Y(y) \cdot \underline{f}_X(x) dxdy = \int_0^\infty f_Y(x) \cdot \underline{F}_X(x) dx; \\ \overline{P} &= \iint_S f_Y(y) \cdot \overline{f}_X(x) dxdy = \int_0^\infty f_Y(x) \cdot \overline{F}_X(x) dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Для случайной величины $X = \widetilde{R}$, как отмечено ранее, имеем $R_{\min} = q_{\min}$, $R_{\max} = q_{\max}$, а среднее значение примем в виде $\overline{R} = \overline{q} = \dfrac{q_{\min} + q_{\max}}{2}$.

Соответственно, по усеченному интервальному распределению для $\widetilde{R}$ и случайной величине $\widetilde{R}_{пр}$ с функцией плотности распределения $f_Y(y)$ получим значения вероятностей $\underline{P}$, $\overline{P}$ (нижнее и верхнее) безотказной работы основания.

При обозначении *y*=*x* и подстановке в развернутом виде функций распределения $\underline{F}_X(x)$ и $\overline{F}_X(x)$ по (5) получим:

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} f_Y(x) \cdot \underline{F}_X(x)dx = \int_{m_X}^{b_x} f_Y(x) \frac{x - m_X}{x - a_x} dx + \int_{b_x}^{\infty} f_Y(x)dx;$$
$$\overline{P} = \int_0^{\infty} f_Y(x) \cdot \overline{F}_X(x)dx = \int_{a_x}^{m_X} f_Y(x) \frac{b_x - m_X}{b_x - x} dx + \int_{m_X}^{\infty} f_Y(x)dx; \qquad (12)$$

где для $\overline{P}$ принято $\overline{F}_X(x)$, так как с ростом *X* область безотказной работы убывает. Для $\underline{P}$ принята функция $\underline{F}_X(x)$.

Таким образом, надежность основания фундамента будет характеризоваться интервалом вероятностей $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$. На рис.2. условно представлены усеченная интервальная функция распределения для $X = \widetilde{R}$ (в виде границ $\underline{F}_X(x)$ и $\overline{F}_X(x)$) и функция плотности (7) для $Y = \widetilde{R}_{пр}$.

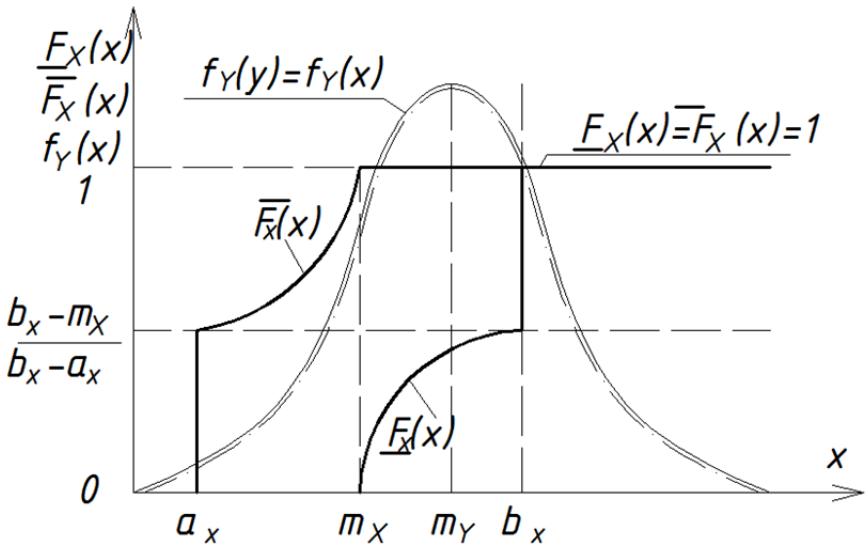

Рисунок 2. Функции $\underline{F}_X(x)$, $\overline{F}_X(x)$, $f_Y(x)$

Из рис. 2 видно, что условные плотности распределения вероятностей $\underline{f}_X(x)$ и $\overline{f}_X(x)$ на участке $x < a_x$ и $x > b_x$ равны нулю, так как $\underline{F}_X(x)$ и $\overline{F}_X(x)$ равны единице.

Пример. Пусть известны значения $a = q_{\min} = 20H/см^2$, $b = q_{\max} = 30H/см^2$, $m_X = 25H/см^2$, $m_Y = 29H/см^2$, $S_Y = 3H/см^2$. Функции распределения для нагрузки $X = \widetilde{R}$

примем по усеченному интервальному закону с границами $\underline{F}_X(x)$ и $\overline{F}_X(x)$, а для прочности грунта основания $Y = \widetilde{R}_{пр}$ примем по нормальному распределению, как в работе [1].

По формуле (11) найдем:

$$\underline{P} = \int_{20}^{25} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-29)^2}{2\cdot 3^2}} \cdot \frac{30-25}{30-x} dx + \int_{25}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-29)^2}{2\cdot 3^2}} dx = 0{,}982;$$

$$\overline{P} = \int_{25}^{30} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-29)^2}{2\cdot 3^2}} \cdot \frac{x-25}{x-20} dx + \int_{30}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-29)^2}{2\cdot 3^2}} dx = 0{,}552.$$

Надежность основания будет характеризоваться интервалом [0,552;0,982].

В качестве оперативной надежности принимается значение вероятности из интервала $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$ в зависимости от ответственности конструкции, а также исходя из опыта специалиста. В пессимистическом варианте значение надежности принимают равным $\underline{P}$.

Известно, что истинное значение надежности находится внутри расчетного интервала надежности $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$. Следовательно, интервал надежности $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$ содержит элемент неопределенности, в связи с чем приходится принимать ответственное решение о значении надежности, исходя из расчетного интервала надежности. Решение будет более осторожным, если принять надежность равной или меньшей $\underline{P}$. Однако при $P_{пр} > \underline{P}$ потребуется повышение фактической надежности, что приведет к необоснованным экономическим потерям, связанным с проведением мероприятий по усилению основания фундамента. В связи с этим специалист может пойти на риск и принять решение о надежности конструкции из интервала $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$, равной предельной допустимой $P_{пр}$. Возникает вопрос: к какому значению риска приведет такое решение? Предлагаем следующую методику расчета значения риска в случае принятия решения о надежности основания фундамента или любого другого несущего элемента по расчетному интервалу надежности $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$. По сути, интервал $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$ характеризует случайную величину $\widetilde{P}$, которая ограничена значениями $\underline{P}$ и $\overline{P}$, т.е. $\underline{P} \le \widetilde{P} \le \overline{P}$. Для описания такой случайной величины $\widetilde{P}$ с крайне ограниченной информацией о ней предлагается использовать усеченное интервальное распределение [19], показанное для поставленной задачи на рис. 3, с учетом того, что среднее значение вероятности $m_p = 0{,}5(\underline{P} + \overline{P})$.

Из рис. 3 видно, что при $P_{пр} > \overline{P}$ вероятность отказа равна 1, что недопустимо по условию безопасности. При $P_{пр} < \underline{P}$ вероятность отказа равна нулю. При $P_{пр} = m_p$ обеспеченность безопасности характеризуется интервалом [0;1] или средней вероятностью, равной 0,5, что также недопустимо. При $P^* = P_{пр}$, как показано на рис. 3 (где P^* – принятое значение надежности из интервала $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$), значение риска будет определяться длиной отрезка cd.

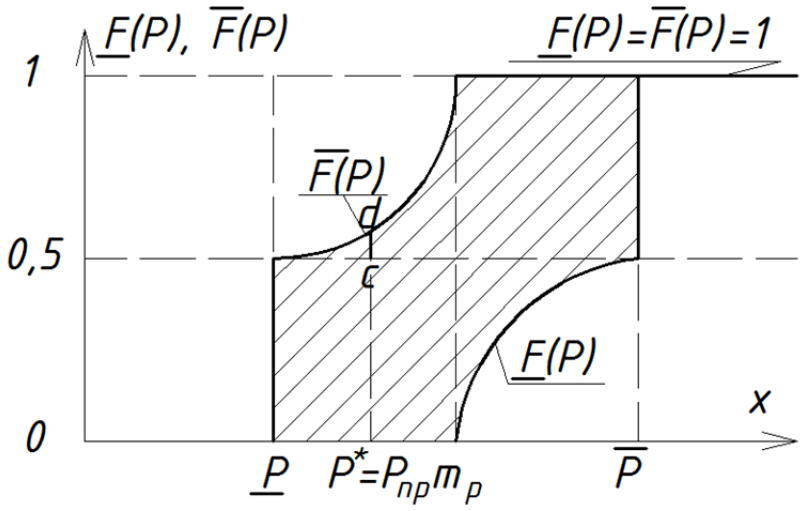

Рисунок 3. Функции распределения $\underline{F}(P)$, $\overline{F}(P)$. m_p – среднее значение

Такой подход к оценке риска принятия решения о надежности основания фундамента из интервала $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$ вносит обоснованную уверенность в действия специалиста и обеспечивает экономическую выгоду.

Значение отрезка (риска) cd определяется с учетом (5) и (6) по формуле

$$P = \frac{\overline{P} - m_p}{\overline{P} - P^*} - 0{,}5. \qquad (13)$$

Пример. По условию предыдущего примера требуется найти значение риска принятия решения о надежности основания фундамента равной $P_{пр} = 0{,}65$. Из примера известны $\underline{P} = 0{,}552$, $\overline{P} = 0{,}982$ и $m_p = 0{,}5 \cdot (0{,}552 + 0{,}982) = 0{,}767$. По условию $\underline{P} = 0{,}552 < P_{пр} = 0{,}65$ видно, что надежность основания фундамента недостаточна для безопасного функционирования. Найдем значение риска принятия надежности $P^* = 0{,}65$.

Решение.

$$P = \frac{\overline{P} - m_p}{\overline{P} - P^*} - 0{,}5 = \frac{0.982 - 0{,}767}{0{,}982 - 0{,}65} - 0{,}5 = \frac{0{,}215}{0{,}332} - 0{,}5 = 0{,}148.$$

Если такой риск недопустим по безопасности, то придется усиливать основание фундамента. Понятия допустимости и недопустимости риска в предложенном примере зависят от целого ряда условий и требуют специального исследования, выходящего за пределы данной статьи. Рассмотренный риск не связан с известным понятием риска аварии конструкции [21,22].

Выводы

1. Предложена новая методика расчета надежности основания фундамента P_1 по критерию прочности грунта основания при крайне ограниченной информации о давлении на грунт основания в расчетной модели.
2. Аналогичный подход может быть использован для оценки надежности основания P_2 по критерию осадки фундамента. В целом надежность основания, как последовательной системы, $P_C = P_1 \cdot P_2$.
3. Предложенная методика расчета надежности основания фундамента применима на стадиях проектирования и эксплуатации зданий и сооружений и может быть использована для расчетов надежности других несущих конструкций и их элементов.

Литература

1. Ермолаев Н.Н., Михеев В.В. Надежность оснований сооружений. Л.: Стройиздат, 1976. 152 с.
2. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций / Пер. с нем. О.О. Андреева. М.: Стройиздат, 1994. 288 с.
3. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М.: Стройиздат, 1978. 239 с.
4. Райдер В.Д. Теория надежности в строительном проектировании: монография. М.: АСВ, 1998. 304 с.
5. Кузнецов В.П. Интервальные статические модели: монография. М.: Радио и связь, 1991. 544 с.
6. Tonon F., Bernardini A., Mammino A. Determination of parameters range in rock engineering by means of Random Set Theory // Reliability Engineering and System Safety. 2000. №70(3). Pp. 241-261.
7. Tonon F., Bernardini A., Mammino A. Reliability analysis of rock mass response by means of Random Set Theory // Reliability Engineering and System Safety. 2000. Vol. 70(3). Pp. 263-282.
8. Walley P. Measures of uncertainty in expert systems // Artificial Intelligence. 1996. №83. Pp. 1-58.
9. Уткин В.С. Определение надежности строительных конструкций: учебное пособие. Вологда: ВоГТУ, 2010. 155 с.
10. Baudrit C., Dubois D. Practical representations of incomplete probabilistic knowledge // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. 51. Pp. 86-108.
11. Уткин В.С. Расчет надежности деталей машин с использованием неравенств // Вестник машиностроения. 2012. №1. С. 7-10.
12. Уткин Л.В., Жук Ю.А., Селиховкин И.А. Модель классификации на основе неполной информации о признаках в виде их средних значений // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. №2. С. 95-105.
13. Уткин В.С. Новые методы расчетов надежности строительных конструкций: учебное пособие. Вологда: ВоГТУ, 2011. 79 с.
14. Уткин Л.В., Ярыгина О.В. Расчет надежности железобетонных элементов на продавливание при ограниченной информации о параметрах // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. Вып. 235. №2. С. 63 – 68.
15. Kozine I., Utkin L.V. An approach to combining unreliable pieces of evidence and their propagation in a system response analysis // Reliability Engineering and System Safety. 2004. №85(1-3). Pp. 103-112.
16. Utkin L.V., Kozine I. On new cautious structural reliability models in the framework of imprecise probabilities // Structural Safety. 2010. №32(6). Pp. 411-416.
17. Utkin L.V. An uncertainty model of the stress-strength reliability with imprecise parameters of probability distributions // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (Applied Mathematics and Mechanics). 2004. №84(10-11). Pp. 688-699.
18. Utkin L.V. A method for processing the unreliable expert judgments about parameters of probability distribution // European Journal of Operational Research. 2006. №175(1). Pp. 385-398.
19. Utkin V.S., Utkin L.V. ISSN 1068-798X. Russian Engineering Research. 2012. Vol. 32. №9-10. Pp. 627-630.
20. Свод правил: СП 50-101-2004 «Проектирование и устройство оснований и фундаментов зданий и сооружений». Введ. 20.05.2011. М.: ФГУП ЦПП, 2011. 70 с.
21. Мельчаков А.П. Расчет и оценка риска аварий и безопасности ресурса строительных объектов (Теория, методики и инженерные приложения): учебное пособие. Челябинск: ЮУрГУ, 2006. 49 с.
22. Улицкий В.М., Лисюк М.Б. Оценка риска и обеспечения безопасности в строительстве // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2003. №5. С. 160-166.

**Елена Александровна Шепелина, г. Вологда, Россия*

Тел. раб.: (8172) 53-35-31; эл. почта: lenashepelina12@mail.ru

Оценка устойчивости бетонных сооружений на нескальном основании

Д.т.н., профессор В.Н. Бухарцев*;
аспирант Ву Мань Хуан,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: устойчивость бетонных сооружений; предельное состояние; критерий Кулона; сдвиг с поворотом; условия равновесия; закон распределения нормальных напряжений

Один из основных вопросов, которые необходимо решить при проектировании подпорных бетонных сооружений на нескальных грунтах основания, – это вопрос обеспечения устойчивости этих сооружений против сдвига. От правильного решения этой задачи в значительной мере зависит эксплуатационная надежность сооружений и их долговечность. Особое значение эта проблема имеет для гидротехнического строительства, поскольку напорные гидротехнические сооружения обладают повышенной опасностью и, следовательно, несут большую социальную и экономическую ответственность. К таким сооружениям относятся, например, плотины, здания ГЭС, подпорные стены и т.п.

В настоящее время в мировой практике для оценки устойчивости массивных бетонных сооружений чаще всего используется расчетный метод, в котором предполагается, что при нарушении устойчивости сооружение перемещается по плоскости подошвы прямолинейно поступательно [1–7 и др.]. Этот метод основан на схеме предельных состояний, в которой сопоставляются активные сдвигающие силы, действующие на незаглубленное сооружение, и реактивные силы предельного сопротивления, способные мобилизоваться на поверхности сдвигов – области контакта подошвы сооружения с основанием. При этом предполагается, что линии действия равнодействующей активных сдвигающих сил и равнодействующей реактивных сил предельного сопротивления совпадают, отсюда следует линейная постановка задачи.

При оценке устойчивости заглубленного сооружения в число реактивных сил следует включить также отпор грунта, возникающий на поверхностях, ограничивающих сооружение по контуру.

Под предельным состоянием понимается такое состояние сооружения, при котором в каждой точке поверхности сдвигов возникают предельные по Кулону касательные напряжения.

Для выполнения расчета устойчивое сооружение приводится в предельное состояние либо путем увеличения действующих нагрузок (обычно изменяются только модули сил без изменения линий их действия), либо изменением параметров прочности грунта основания, характеризующих сопротивление грунта сдвигу. По этому вопросу высказывались разные точки зрения [8–12 и др.]. В первом способе приведения расчетной схемы в предельное состояние коэффициент запаса отвечает на вопрос: во сколько раз модули всех сил, действующих на сооружение, должны быть увеличены, чтобы сооружение достигло предельного равновесия? Такой прием, называемый схемой «разрушающих нагрузок», используется иногда в промышленно-гражданском строительстве и машиностроении.

В гидротехническом строительстве чаще используется второй способ приведения расчетной схемы в предельное состояние, при котором коэффициент запаса отвечает на вопрос: во сколько раз следует уменьшить значения параметров прочности грунта основания, чтобы сооружение достигло предельного равновесия? Такая постановка вопроса в гидротехническом строительстве более уместна, поскольку нагрузки на гидротехническое сооружение от собственного веса, давления воды и т. д. не могут меняться на 20 – 30%, а расчетные значения параметров прочности грунта, вычисляемые по малым выборкам опытных данных, определяются с меньшей точностью из-за большого разброса значений опытных данных. При этом коэффициент запаса определяется часто как отношение расчетных значений параметров прочности грунта, определяемых по экспериментальным данным, к критическим значениям, соответствующим предельному состоянию (предложение В. Феллениуса).

Довольно часто возникает опасность потери устойчивости сооружения по другой схеме, когда линии действия равнодействующей активных сдвигающих сил и равнодействующей реактивных сил предельного сопротивления не совпадают. Такая форма потери устойчивости наступает при эксцентричном приложении сдвигающей силы по отношению к центру кручения подошвы сооружения. Причиной этому может быть смещение сдвигающей силы даже при однородном строении основания и симметричной форме подошвы, либо смещение центра кручения при неоднородном строении основания, разные части которого имеют разные прочностные характеристики, либо когда поступательному сдвигу препятствует неподвижная опора. Во всех перечисленных случаях при потере устойчивости происходит сдвиг сооружения с поворотом в плоскости подошвы, что обусловливает плоскую постановку задачи.

Для оценки устойчивости против сдвига сооружения с поворотом в [13] предложен другой метод, который является обобщением вышеупомянутого, соответствующего частному случаю, когда эксцентриситет сдвигающей силы равен нулю. Поэтому все нормативные требования, касающиеся определения нагрузок на сооружение и характеристик прочности грунта основания, равно как и нормативные запасы устойчивости сооружения, установленные для поступательного сдвига, могут быть распространены и на сдвиг с поворотом.

Этот метод, рекомендованный СНиП [14] и пособием к ним [15] для оценки устойчивости бетонных сооружений против сдвига с поворотом, используется для дальнейшего исследования. Он применим для оценки устойчивости бетонных сооружений, имеющих плоскую подошву любой формы, при любой нагрузке и геологическом строении основания, грунты которого подчиняются критерию прочности Кулона.

Вместе с тем, несмотря на схожесть расчетных предпосылок, между этими двумя методами существует и серьезное различие. Оценка устойчивости сооружения в линейной постановке, т.е. при поступательном сдвиге, не зависит от распределения нормальных напряжений по подошве сооружения, поскольку в расчете фигурируют только силы. Оценка устойчивости сооружения в плоской постановке, т.е. по схеме сдвига с поворотом, существенно зависит от распределения нормальных напряжений по подошве сооружения.

Рекомендации нормативных документов не в полной мере охватывают потребности проектировщиков при решении вопросов, связанных с оценкой устойчивости подобного рода сооружений. В этих документах приведены лишь указания по оценке устойчивости сооружений с прямоугольной подошвой, только для частного случая нагружения силой, параллельной оси симметрии подошвы (оси инерции сечения подошвы). Поэтому разработка более общей методики оценки устойчивости сооружений против сдвига с поворотом, пригодной для любой плоской формы подошвы сооружения, является актуальной задачей. Актуальность ее обусловлена тем, что сдвиг с поворотом в плоскости подошвы угрожает многим гидротехническим сооружениям.

В основе метода лежит широко распространенное положение о том, что при повороте любого тела, наступающем вследствие нарушения предельного равновесия, касательные напряжения, которые действуют на элементарных площадках в окрестности каждой точки плоскости подошвы, ориентированы ортогонально радиус-векторам, проведенным к центрам тяжести этих площадок из полюса поворота. Сложное движение (линейно-поступательное с поворотом) эквивалентно, как известно, только повороту относительно некоторой оси, ортогональной плоскости подошвы, проходящей через полюс *p*, положение которого определяется в результате расчета. Предполагается также, что при нарушении устойчивости сооружение перемещается по плоскости подошвы без захвата грунта основания. Справедливость этих расчетных предпосылок подтверждена экспериментальными исследованиями А.Ф. Попова [13].

Другим важным результатом исследований А.Ф. Попова является положение о том, что поскольку на гидротехнические сооружения не действуют нагрузки в виде крутящих моментов и уровень напряжений характеризуется значениями числа моделирования $N_\sigma \leq 0{,}5 - 1{,}0$, оценку устойчивости таких сооружений можно определять без учета нелинейности эпюры нормальных напряжений. Равномерное или неравномерное распределение нормальных напряжений по плоскости подошвы можно принять линейным.

Решение этой задачи в общей постановке при линейном распределении нормальных напряжений по плоской подошве произвольной формы подробно описано в ранее опубликованной работе авторов [16]. В ней представлена система разрешающих уравнений, сформулированы расчетные предпосылки, приведены результаты интегрирования выражений, входящих в дифференциальные уравнения.

Предложенную в работе [16] методику можно распространить и на более общий случай нелинейного распределения нормальных напряжений, возникающих на контакте сооружения с основанием. Для этого формулу внецентренного сжатия, используемую при линейном распределении напряжений, следует дополнить некоторой функцией, позволяющей с достаточным для практики приближением описать упомянутые напряжения, получаемые экспериментально. Этот дополнительный член в расширенной таким образом формуле должен описывать отклонения значений напряжения от плоской эпюры, самоуравновешенные для всей плоскости подошвы.

Для сооружений с прямоугольной подошвой, имеющих наибольшее распространение, это можно сделать, представив дополнительный член в виде эллиптического параболоида. Тогда расширенная формула для определения нормальных напряжений у подошвы сооружения в главной центральной системе координат примет вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y + \mathfrak{E}\left(1 - \alpha\frac{F}{J_y}x^2 - \beta\frac{F}{J_x}y^2\right), \quad (1)$$

где F – площадь подошвы; N – сумма проекций всех действующих на сооружение сил на направление, ортогональное подошве; M_x и M_y – моменты всех сил относительно главных центральных осей, обозначенных индексами; J_x и J_y – осевые моменты инерции подошвы сооружения; $\mathfrak{E}$ – параметр, имеющий размерность напряжения; α и β – безразмерные числовые коэффициенты.

Параметр $\mathfrak{E}$ отражает отклонение значения нормального напряжения в центре тяжести подошвы от среднего значения. Знак этого параметра определяет знак кривизны эпюры напряжений: плюс соответствует выпуклой эпюре, минус – вогнутой.

Чтобы дополнительное слагаемое выражало самоуравновешенную составляющую напряжения, достаточно, чтобы

$$\int_F \left(1 - \alpha\frac{F}{J_y}x^2 - \beta\frac{F}{J_x}y^2\right)dF = 0. \quad (2)$$

После интегрирования это выражение принимает вид:

$$(1 - \alpha - \beta)F = 0, \quad (3)$$

откуда

$$\beta = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Два других интеграла

$$\int_F x\left(1 - \alpha\frac{F}{J_y}x^2 - \beta\frac{F}{J_x}y^2\right)dF \text{ и } \int_F y\left(1 - \alpha\frac{F}{J_y}x^2 - \beta\frac{F}{J_x}y^2\right)dF \quad (5)$$

для симметричной прямоугольной подошвы тождественно равны нулю, поскольку содержат нечетные функции, которые после интегрирования становятся четными.

Подставляя выражение (4) в (1), получим окончательный вид расширенной формулы для определения нормальных напряжений:

$$\sigma = \left(\frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y\right) + \mathfrak{E}\left(1 - \frac{F}{J_x}y^2\right) + \mathfrak{E}\alpha F\left(\frac{y^2}{J_x} - \frac{x^2}{J_y}\right). \quad (6)$$

В этой формуле выражения, заключенные в скобки, являются характеристическими функциями для распределения нормального напряжения: первая описывает плоскость, вторая – цилиндр с параболической направляющей, третья – сложную поверхность двоякой кривизны (седло). Параметры $\mathcal{E}$ и α, не имеющие пока механической интерпретации, позволяют создать комбинацию характеристических функций, приближенно описывающую вид эпюры напряжений в широком диапазоне механических характеристик грунтов.

Значения этих параметров можно определить по условию максимального приближения расчетных значений напряжения к экспериментальным значениям. Техника такого подбора значений параметров $\mathcal{E}$ и α проиллюстрирована на примере экспериментальной модели. Результаты экспериментальных исследований по определению напряжений вблизи контакта рассматриваемой модели с основанием заимствованы из работы [18]. Модель, представляющая собой жесткий штамп с прямоугольной подошвой (соотношение сторон 3:1), загружена полосовой распределенной нагрузкой интенсивностью q=13,9 тс/м, приложенной по оси симметрии подошвы вдоль длинной стороны (рис. 1). Длина короткой стороны подошвы модели – 1,42 метра. В силу симметрии подошвы и нагрузки в формуле (6) $M_x = M_y = 0$.

Основанием лабораторной модели служил разнозернистый песок с небольшим содержанием мелкого гравия диаметром до 5 мм. Удельный (объемный) вес песка – 1,65 тс/м^3, относительная плотность D = 0,5. В качестве измерительных приборов использовались мессдозы системы В.П. Бомбчинского, основанной на струнном методе измерения деформаций. Приборы устанавливались в грунте в контактной зоне основания, на небольшой глубине, что почти полностью исключает влияние микрорельефа на показания приборов.

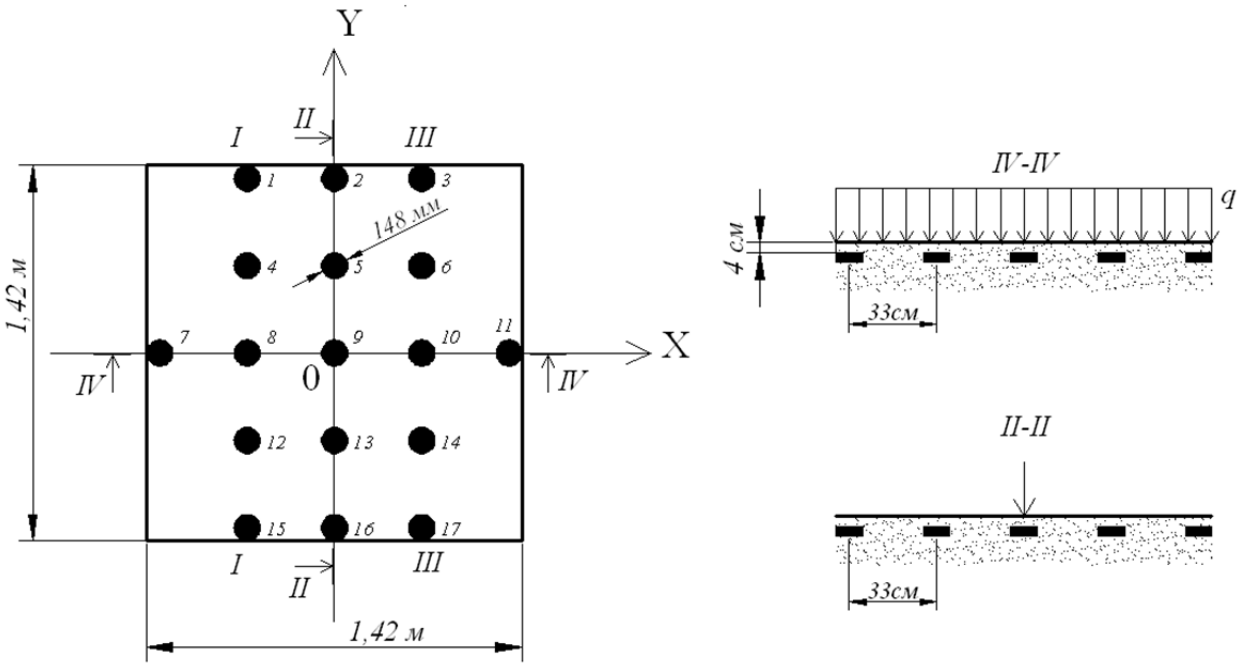

Рисунок 1. Схема расположения мессдоз по площади средней трети подошвы модели

Для максимального приближения расчетных значений напряжения к экспериментальным использован метод наименьших квадратов. Согласно этому методу сумма квадратов отклонений теоретических значений $\sigma = \sigma(x, y)$, вычисленных по формуле (6), от экспериментальных значений $\sigma_э$ должна быть наименьшей:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma - \sigma_э\right)_i^2 \to \min \qquad (7)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_1 + \mathcal{E}\Phi_2 + A\cdot\Phi_3\right)_i^2 = \sum \to \min,$$

где $\Phi_1 = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y - \sigma_э$; $\Phi_2 = 1 - \frac{F}{J_x}y^2$, $\Phi_3 = F\left(\frac{y^2}{J_x} - \frac{x^2}{J_y}\right)$;

$A = \text{¢} \cdot \alpha$; *n* – число точек, в которых выполнены измерения напряжения.

Необходимое условие экстремума функции двух параметров *A* и ¢ выражается уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{n} \Phi_{3i}\left(\Phi_1 + \text{¢}\Phi_2 + A \cdot \Phi_3\right)_i = 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{¢}} = 2\sum_{i=1}^{n} \Phi_{2i}\left(\Phi_1 + \text{¢}\Phi_2 + A \cdot \Phi_3\right)_i = 0. \end{cases} \quad (8)$$

После преобразования эти уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} \text{¢}\sum_{i=1}^{n} \Phi_{2i}\Phi_{3i} + A\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{3i}\right)^2 = -\sum_{i=1}^{n} \Phi_{1i}\Phi_{3i}, \\ \text{¢}\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{2i}\right)^2 + A\sum_{i=1}^{n} \Phi_{2i}\Phi_{3i} = -\sum_{i=1}^{n} \Phi_{1i}\Phi_{2i}. \end{cases} \quad (8^*)$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{2i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{3i} - \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{2i} \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{2i}\Phi_{3i}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_{2i}\Phi_{3i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{2i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{3i}\right)^2}, \\ \text{¢} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{3i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{2i} - \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{3i} \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{2i}\Phi_{3i}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_{2i}\Phi_{3i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{2i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{3i}\right)^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Параметр *α* определяется выражением:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{2i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{3i} - \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{2i} \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{2i}\Phi_{3i}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{3i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{2i} - \sum_{i=1}^{n}\Phi_{1i}\Phi_{3i} \cdot \sum_{i=1}^{n}\Phi_{2i}\Phi_{3i}}. \quad (10)$$

Результаты обработки лабораторных опытов сведены в таблицу 1, по которой построены эпюры нормальных напряжений по осям подошвы модели в двух направлениях (рис. 2).

Таблица 1. Результаты измерения $\sigma_{эi}$, тс/м^2; вычисления некоторых геометрических характеристик подошвы

№	x	y	$\sigma_{эi}$	Φ_1	Φ_2	Φ_3	$(\Phi_2)^2$	$(\Phi_3)^2$	$\Phi_1\Phi_2$	$\Phi_1\Phi_3$	$\Phi_2\Phi_3$
1	-0,33	0,66	6,3	-4,00218	-1,59234	2,520333	2,535556	6,35208	6,372835	-10,08682	-4,013235
2	0	0,66	5,5	-3,20218	-1,59234	2,592343	2,535556	6,720241	5,098961	-8,301137	-4,127898
3	0,33	0,66	4,6	-2,30218	-1,59234	2,520333	2,535556	6,35208	3,665853	-5,802249	-4,013235
4	-0,33	0,33	11	-8,70218	0,351914	0,576076	0,123844	0,331864	-3,06242	-5,013116	0,2027294
5	0	0,33	12,2	-9,90218	0,351914	0,648086	0,123844	0,420015	-3,48472	-6,417458	0,2280706
6	0,33	0,33	11,9	-9,60218	0,351914	0,576076	0,123844	0,331864	-3,37914	-5,531585	0,2027294
7	-0,66	0	14	-11,7022	1	-0,28804	1	0,082966	-11,7022	3,370672	-0,288038
8	-0,33	0	13,1	-10,8022	1	-0,07201	1	0,005185	-10,8022	0,777859	-0,07201
9	0	0	13,1	-10,8022	1	0	1	0	-10,8022	0	0
10	0,33	0	13,8	-11,5022	1	-0,07201	1	0,005185	-11,5022	0,828266	-0,07201
11	0,66	0	13,2	-10,9022	1	-0,28804	1	0,082966	-10,9022	3,140242	-0,288038
12	-0,33	-0,33	11,3	-9,00218	0,351914	0,576076	0,123844	0,331864	-3,16799	-5,185939	0,2027294
13	0	-0,33	12	-9,70218	0,351914	0,648086	0,123844	0,420015	-3,41433	-6,287841	0,2280706
14	0,33	-0,33	12,5	-10,2022	0,351914	0,576076	0,123844	0,331864	-3,59029	-5,87723	0,2027294
15	-0,33	-0,66	4,8	-2,50218	-1,59234	2,520333	2,535556	6,35208	3,984321	-6,306316	-4,013235
16	0	-0,66	5,8	-3,50218	-1,59234	2,592343	2,535556	6,720241	5,576664	-9,078839	-4,127898
17	0,33	-0,66	5,5	-3,20218	-1,59234	2,520333	2,535556	6,35208	5,098961	-8,070549	-4,013235
Σ	-	-	170,6	-	-2,44257	18,1464	20,9564	41,19259	-46,0122	-73,84204	-23,76177

Используя последнюю строчку таблицы и формулы (9), (10), получим:

$$\mathcal{E} = 3{,}930329 \text{ тс/м}^2, \ \alpha = 0{,}193324 .$$

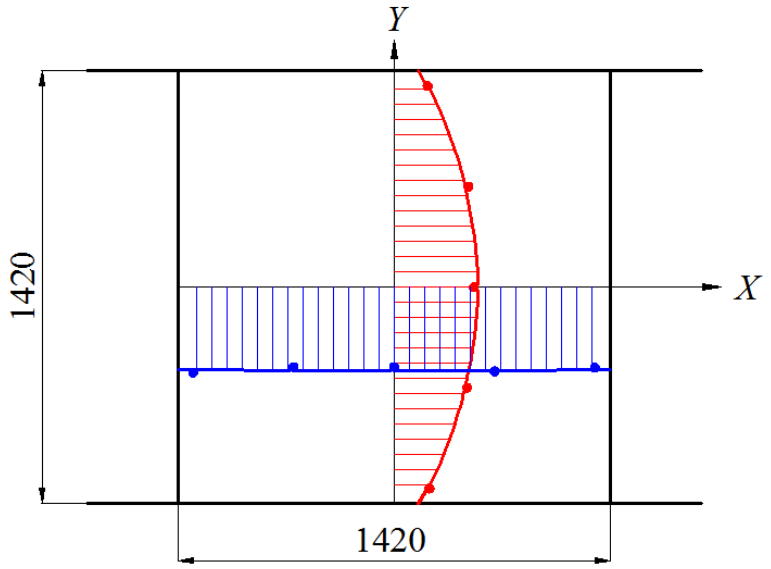

Рисунок 2. Сопоставление теоретических (сплошные линии) и экспериментальных (точки) данных

Несмотря на то, что экспериментальные данные не в полной мере репрезентативны, поскольку содержат сведения только о средней трети подошвы модели, все же наблюдается хорошая аппроксимация результатов эксперимента зависимостью (6). Результаты экспериментальных и теоретических исследований свидетельствует о том, что уже при соотношении 3:1 средняя часть фундамента работает в условиях, близких к плоской задаче.

Использование зависимости (6) вместо формулы внецентренного сжатия принципиально не меняет методику расчета по оценке устойчивости сооружений против сдвига с поворотом, изложенную в [16]. Добавляется еще один тип интегралов, относящийся к той же группе:

$$\int_F \frac{s^3 dF}{\sqrt{s^2+t^2}} \ . \tag{11}$$

Конкретные интегралы этого типа в удобной системе координат имеют вид:

$$\int_F \frac{x^3 dF}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \int_F \frac{y^3 dF}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

Другие интегралы, которые появляются при использовании расширенной формулы, выражаются через уже известные интегралы:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{x^2 y dF}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_F y\sqrt{x^2+y^2}\,dF - \int_F \frac{y^3 dF}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\ \int_F \frac{x y^2 dF}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_F x\sqrt{x^2+y^2}\,dF - \int_F \frac{x^3 dF}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Эти дополнительные интегралы также выражаются через конечное число элементарных функций. Для прямоугольной формы подошвы с координатами угловых точек $(\tilde{x}_1;\tilde{y}_1)$, $(\tilde{x}_2;\tilde{y}_2)$, $(\tilde{x}_3;\tilde{y}_3)$, $(\tilde{x}_4;\tilde{y}_4)$ результаты интегрирования этих выражений имеют вид:

$$\begin{aligned} &\int_F \frac{\tilde{x}^3 dF}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}} = \int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_3}\int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} \frac{\tilde{x}^3 d\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}} d\tilde{y} = \\ &= \frac{\tilde{x}_3^4}{12}\left[\ln\left|\frac{\tilde{y}_3+\rho_3}{\tilde{y}_4+\rho_4}\right| + \frac{\tilde{y}_3\rho_3}{\tilde{x}_3^2}\left(1-2\frac{\tilde{y}_3^2}{\tilde{x}_3^2}\right) - \frac{\tilde{y}_4\rho_4}{\tilde{x}_4^2}\left(1-2\frac{\tilde{y}_4^2}{\tilde{x}_4^2}\right)\right] - \\ &- \frac{\tilde{x}_1^4}{12}\left[\ln\left|\frac{\tilde{y}_2+\rho_2}{\tilde{y}_1+\rho_1}\right| + \frac{\tilde{y}_2\rho_2}{\tilde{x}_2^2}\left(1-2\frac{\tilde{y}_2^2}{\tilde{x}_2^2}\right) - \frac{\tilde{y}_1\rho_1}{\tilde{x}_1^2}\left(1-2\frac{\tilde{y}_1^2}{\tilde{x}_1^2}\right)\right]; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\int_F \frac{\tilde{y}^3 dF}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}} = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3}\int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_3} \frac{\tilde{y}^3 d\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}} d\tilde{x} = \\ &= \frac{\tilde{y}_3^4}{12}\left[\ln\left|\frac{\tilde{x}_3+\rho_3}{\tilde{x}_4+\rho_4}\right| + \frac{\tilde{x}_3\rho_3}{\tilde{y}_3^2}\left(1-2\frac{\tilde{x}_3^2}{\tilde{y}_3^2}\right) - \frac{\tilde{x}_4\rho_4}{\tilde{y}_4^2}\left(1-2\frac{\tilde{x}_4^2}{\tilde{y}_4^2}\right)\right] - \\ &- \frac{\tilde{y}_1^4}{12}\left[\ln\left|\frac{\tilde{x}_2+\rho_2}{\tilde{x}_1+\rho_1}\right| + \frac{\tilde{x}_2\rho_2}{\tilde{y}_2^2}\left(1-2\frac{\tilde{x}_2^2}{\tilde{y}_2^2}\right) - \frac{\tilde{x}_1\rho_1}{\tilde{y}_1^2}\left(1-2\frac{\tilde{x}_1^2}{\tilde{y}_1^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

В выражениях (13) и (14) все обозначения соответствуют обозначениям [16].

Форма представления нормального напряжения, действующего на подошву сооружения, выражением (6) позволяет приблизиться к экспериментальным значениям с любой приемлемой для практики точностью за счет введения дополнительных слагаемых. Остается решить проблему физической интерпретации дополнительных членов формулы. Лучше всего связать параметры σ и α с деформационными характеристиками грунта основания или, по крайней мере, с числом

моделирования для песчаных и глинистых грунтов. Видимо, параметр α можно связать с коэффициентом Пуассона, а параметр $\mathcal{E}$ – с модулем Юнга.

Для более сложной формы подошвы в расширенной формуле могут появиться дополнительные члены с бóльшим числом параметров. Для нахождения значений этих параметров нужны дополнительные экспериментальные исследования. Необходимость таких исследований определяется потребностями практики строительства.

Литература

1. Велле М.А. Устойчивость плотин на нескальных грунтах. Стройиздат. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 184 с.
2. Горбунов-Посадов М.И. Устойчивость фундаментов на песчаном основании. М.: Госстройиздат, 1962, 96 с.
3. Евдокимов П.Д. Устойчивость гидротехнических сооружений и прочность их оснований. М.–Л.: Энергия, 1966, 130 с.
4. Chen Y., Zhang L., Yang G., Dong Y., Chen J. Anti-sliding stability of a gravity dam on complicated foundation with multiple structural planes // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2012. Vol. 55. Pp 151-156.
5. Bretas E.M., Léger P., Lemos J.V. 3D stability analysis of gravity dams on sloped rock foundations using the limit equilibrium method // Computers and Geotechnics. 2012. Vol. 44. Pp. 147-156.
6. Teng-fei B., Miao Xu, Lan C. Stability Analysis of Concrete Gravity Dam Foundation Based on Catastrophe Model of Plastic Strain Energy // Procedia Engineering. 2012. Vol. 28. Pp. 825-830.
7. Wei Z., Xiaolin C., Chuangbing Z., Xinghong L. Failure analysis of high-concrete gravity dam based on strength reserve factor method // Computers and Geotechnics. 2008. Vol. 35. Issue 4. Pp. 627-636.
8. Kezdi A. Handbuch der Bodenmechanik. Band IV: Anwendung der Bodenmechanik in der Praxis. Berlin: VEB Verlag fur Bauwesen, 1976.
9. Чугаев Р.Р. Расчеты устойчивости инженерных сооружений на сдвиг // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1971. т. 96.
10. Чугаев Р. Р. Единый принцип установления коэффициента запаса устойчивости инженерных сооружений на сдвиг // Гидротехническое строительство. 1970. №8.
11. Huang Y. H. Stability coefficients for sidehill benches // Journal of the Geotechnical Engineering Division. 1977. Vol. 103. №5. Pp. 467-481.
12. Бухарцев В.Н., Можевитинов А.Л. О коэффициентах безопасности в расчетах устойчивости сооружений // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1977. т. 117. С. 14-18.
13. Можевитинов А.Л., Кузьмин С.А., Попов А.Ф. Расчет устойчивости сооружений на сдвиг эксцентричной силой // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1971. т. 95.
14. СП 23.13330.2011 Актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85 Основания гидротехнических сооружений. М.: Минрегионразвития РФ, 2011. 111 с.
15. Проектирование оснований гидротехнических сооружений. (Пособие к СНиП II-16-76) / ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. Л., 1984.
16. Бухарцев В.Н., Ву Мань Хуан. Оценка устойчивости бетонных сооружений на нескальном основании против сдвига с поворотом // Приволжский научный журнал. 2012. №3. С. 34-41.
17. Бухарцев В.Н., Ву Мань Хуан. Оценка устойчивости эксцентрично нагруженных бетонных сооружений на нескальном основании // Кафедра СКиМ, 75 лет на факультете. Сборник материалов научно-технического семинара. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. С. 45-51.
18. Липовецкая Т.Ф. Экспериментальные исследования распределения нормальных напряжений в подошве жестких фундаментов на мягких грунтах. Труда координационных совещаний по гидротехнике. Л.: Госэнергоиздат,1962. Вып. III. С. 22-51.

** Владимир Николаевич Бухарцев, Санкт-Петербург, Россия*

Тел.: +7(812) 297-59-88; эл. почта: gts.bu@cef.spbstu.ru

Предельная несущая способность ледяных балок

Аспирант Ли Лян*;
Д.ф.-м.н., профессор К. Н. Шхинек,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: предельная несущая способность; ледяная балка; нагрузка; наклонные гидротехнические сооружения; LS-DYNA

Задача о предельной несущей способности ледяных балок встречается на пути решения многих практических проблем: при определении ледовых нагрузок на наклонные гидротехнические сооружения и сооружения шельфа, при определении несущей способности ледяного покрова для движения транспорта, при расчете посадки самолетов на лед, при определении сопротивления льда движению судов [1]. При взаимодействии с гидротехническими и шельфовыми сооружениями лед рассматривается как плавающая пластина, или балка. Если фронтальная поверхность сооружения наклонная, то лед при наползании на нее изгибается. При этом в балке (пластине) возникают две зоны – сжатия и растяжения. Часто предполагается, что после достижения растягивающими напряжениями предела прочности (который у льда существенно меньше предела прочности при сжатии [2]) балка теряет свою несущую способность [3-4]. Предел прочности при растяжении введен как определяющий во все российские и международные нормы по расчету гидротехнических сооружений [2,5-6].

Установление предела прочности при растяжении в натурных условиях и в ледовых бассейнах основывается на методе «клавиш» [7]. При использовании этого метода во льду с трех сторон вырезается балка, скрепленная с полем по четвертой (короткой) стороне – «клавиша». К свободному концу «клавиши» прикладывается вертикальная нагрузка. По силе, соответствующей образованию трещины в растянутой зоне в балке, устанавливается «предельный изгибающий момент» в месте контакта с полем. По этому моменту рассчитывают предельное растягивающее напряжение, при котором произошло разрушение – предел прочности при растяжении. Однако это не совсем точно. Даже в рассмотренном случае после образования трещины в растянутой зоне момент, образованный сжимающими напряжениями в сжатой зоне балки, продолжает сопротивляться изгибу. Это особенно существенно, если в балке, кроме изгиба, присутствует сжатие [8-11].

D.S. Sodhi [12] провел опыты с ледяной балкой, отделенной от ледяного поля только с двух сторон и нагруженной вертикальной силой в середине (рис. 1). Эта нагрузка постепенно увеличивалась. Регистрировались нагрузка, пересчитываемая на момент напряжения в заделке, и прогиб (деформация) в центре балки.

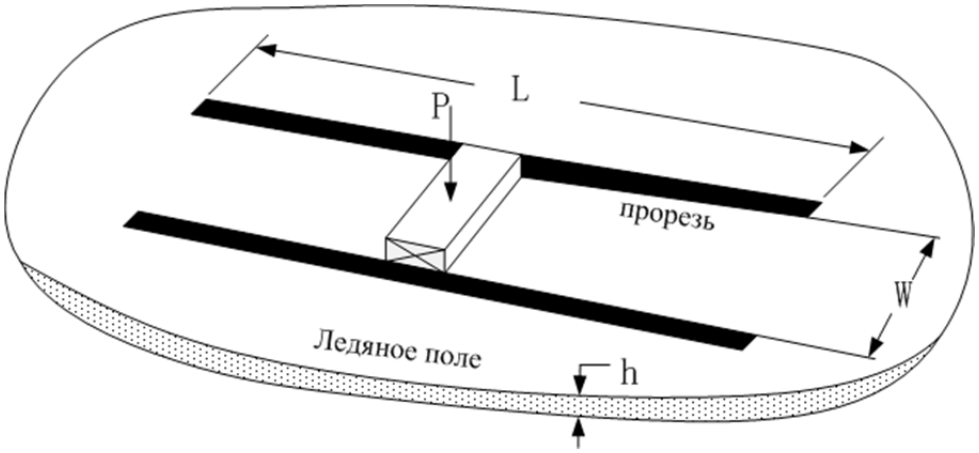

Рисунок 1. Схема опыта D.S. Sodhi [11]

Опыт показал, что в рассматриваемых условиях после разрушения в растянутой области возникают большие напряжения в сжатой зоне, приводящие к образованию пластического шарнира [13] и, как следствие, микротрещины (рис. 2). Концентрация напряжений в отмеченных на рис. 2 зонах приводит к образованию момента, сопротивляющегося изгибу, и повышению несущей способности балки.

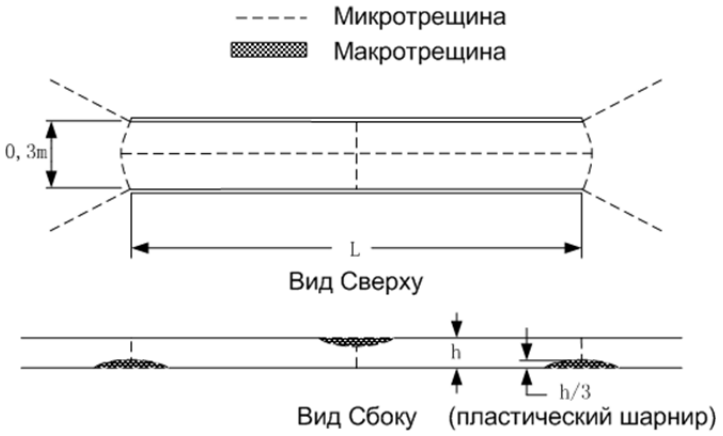

Рисунок 2. Зоны образования пластических шарниров

Рассмотренная постановка в определенной степени моделирует ситуацию, возникающую при движении ледоколов. Для гидротехнических сооружений более характерна другая ситуация: лед наползает на сооружение и изгибается. При этом возникает как изгибающий момент, так и продольная сила, вызванная реакцией сооружения на воздействие льда. Наличие этой силы повышает предельную несущую способность льда и, соответственно, нагрузки на сооружение [14-15]. Таким образом, можно предположить, что принятая в нормах нагрузка на сооружения дает ошибку, что может повлечь опасные последствия. Следует заметить, что наблюдения в натурных условиях, проведенные Т. Карной [16], подтвердили, что после разрушения льда растяжением от изгиба нагрузка на сооружение продолжает нарастать.

Целью настоящей работы является более правильное определение предельной несущей способности льда для уточнения нагрузок на сооружение.

Постановка задачи

Рассматривается поле напряжений в плавающей в воде ледяной балке. Один конец балки находится в контакте с жесткой стенкой (моделирующей ледяное поле), к другому приложена вертикальная и горизонтальная силы (моделирующие нагрузки, возникающие на границе с сооружением). Требуется установить предельную несущую способность балки и нагрузки на сооружение. Лед рассматривается как упруго-идеально-пластическая среда (пластичность по Треска [17]) при сжатии и упруго-хрупкая при растяжении. Пределы упругости при растяжении и при сжатии определяются согласно [18]. При достижении предела прочности по растяжению в точке балки материал мгновенно разрушается: держащая сила в этой точке обращается в ноль.

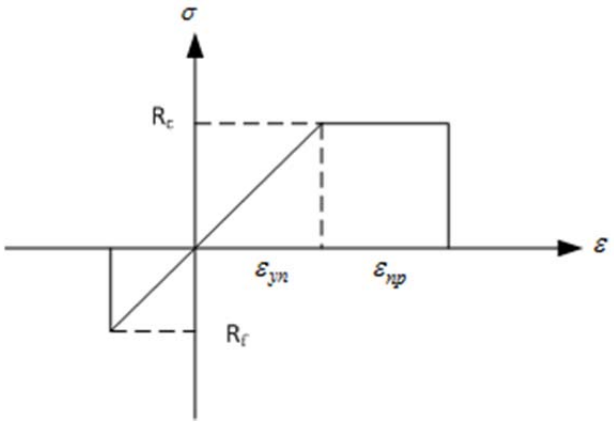

Рисунок 3. Принятая диаграмма «растяжение-сжатие»: $\varepsilon, \varepsilon_{yn}, \varepsilon_{np}$ – деформация, упругая деформация и предельная пластическая деформация соответственно; σ – напряжение (сжимающие напряжения приняты положительными); R_f, R_c – пределы прочности при растяжении и сжатии соответственно

Принятая диаграмма «напряжение-деформация» представлена на рис. 3. При достижении предела по сжатию материал переходит в пластическое состояние, которое сохраняется до момента достижения предельной пластической деформации, принятой для льда – 0.35% [19].

Для оценки поля напряжений в плавающей в воде ледяной балке использован программный комплекс LS-DYNA. В настоящее время известно несколько подходов к описанию движения деформируемой сплошной среды. К ним относятся лагранжевый, эйлеровый и лагранжево-эйлеровый подходы. В программе LS-DYNA используются уравнения сохранения массы, количества движения и внутренней энергии, а также замыкающее эту систему определяющее соотношение [20].

Уравнение сохранения массы:

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div}(v) = 0, \tag{1}$$

где ρ – плотность; v – скорость.

Уравнение сохранения количества движения:

$$\ddot{\rho} = \rho g + div(\sigma), \tag{2}$$

где $\ddot{\rho}$ – ускорение; σ – тензор напряжений Коши; g – ускорение свободного падения.

Уравнение сохранения энергии:

$$\rho \dot{u} = \sigma : D + \rho r - \nabla q, \tag{3}$$

где $\dot{u}$ – скорость изменение внутренней энергии; D – тензор деформации скорости; r – интенсивность объемного теплового источника; q – тепловой поток; ∇ – оператор Гамильтона; $<<\bullet>>$ – скалярное произведение; $<<\bullet\bullet>>$ – двойное скалярное произведение.

В основе пространственной дискретизации, используемой в LS-DYNA, лежит метод конечных элементов; в основе временной дискретизации – центральная дифференциальная схема интегрирования второго порядка точности.

Пространственная дискретизация уравнения сохранения количества движения предполагает переход от решения дифференциального уравнения (2) к решению уравнения

$$\int_V (\rho \ddot{x} - \rho g - \mathrm{div}(\sigma)) \cdot \Phi dv \tag{4}$$

с соответствующими граничными условиями. С использованием известных процедур метода конечных элементов решение уравнения (1.4) сводится к решению дифференциального уравнения

$$M\ddot{d} = F_i + F_e, \tag{5}$$

где $\ddot{d}$ – вектор узловых ускорений; M – матрица масс; F_i, F_e – векторы внутренних и внешних сил.

Вектор внутренних сил, который входит в уравнение (5), определяется третьим членом подынтегрального выражения (4)

$$\int_V \mathrm{div}(\sigma) \cdot \Phi dv = \int_B \mathrm{div}(\sigma n) \cdot \Phi db - \int_V \sigma : (\nabla \Phi) dv \tag{6}$$

и он равен

$$F_i = \int_V \sigma : (\nabla \Phi) dv. \tag{7}$$

Вектор F_i получается в результате суммирования внутренних сил для всех элементов, входящих в рассматриваемую систему.

Вектор внешних сил F_e, который входит в дифференциальное уравнение (5), учитывает распределенные по поверхности тела нагрузки, объемные силы, такие как силы тяжести, контактные силы, реакции связей и др.

Метод решения и проверка его правильности

Лед, будучи поликристаллическим материалом, является пластичным и хрупким. Модель материала *MAT_PLASTICITY_COMPRESSION_TENSION (MAT_124) [21,22] входит в пакет LS-DYNA для моделирования свойства льда. В упругопластической модели зависимость, представленная на рис. 3, используется в качестве определяющей. При достижении предела упругости R_c материал переходит в пластическую стадию, а после достижения предельной пластической деформации в ячейке материал разрушается. Исходные данные для расчета приведены в таблице 1.

Верификация полученных данных проведена путем сопоставления результатов расчета с опытами D.S. Sodhi [12]. Рассмотрена ледяная балка, расположенная между жесткими плоскостями (окружающее поле). В центральном сечении балки приложена нагрузка, плавно возрастающая во времени. На рис. 4 приводятся результаты сопоставления расчета и эксперимента.

Таблица. 1. Исходные данные для расчета

Модель	изотропный упругопластический материал
Плотность, кг/м3	900
Модуль Юнга, Па	5,0E+9
Коэффициент Пуассона.	0,3
Пластическая деформация разрушения, %	0.35
Прочность на сжатие, МПа	2,5
Прочность на растяжение, МПа	0,9

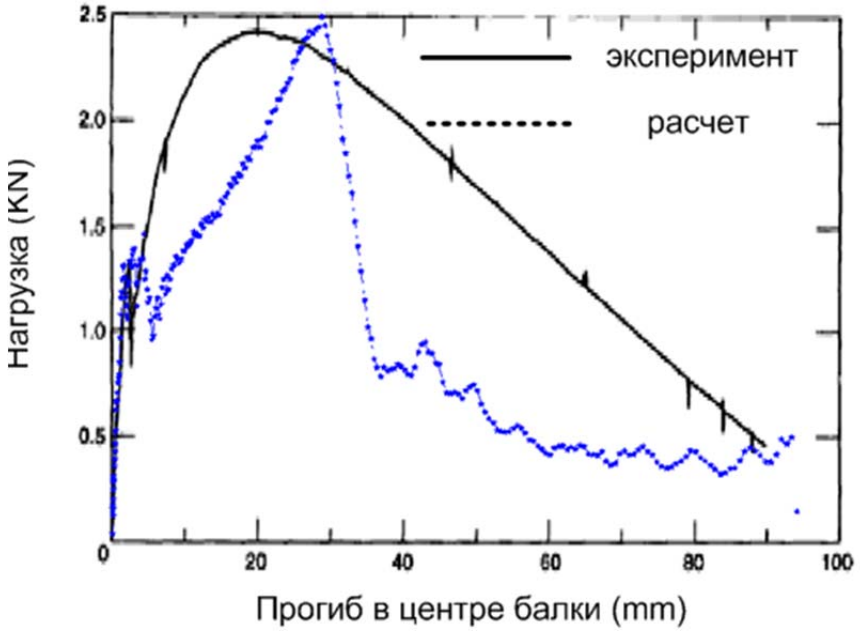

Рисунок 4. Сопоставление результатов расчетов и экспериментов

Из рис. 4 следует, что и эксперимент, и расчет имеют два максимума. Первый соответствует моменту, когда растягивающие напряжения достигают предела прочности при растяжении: происходят быстрое разрушение льда в растянутой зоне и спад нагрузки. В сжатой зоне продолжается деформирование материала – вначале упругое, а затем пластическое. Это происходит до тех пор, пока в точке среды не достигается предельная пластическая деформация, после чего несущая способность в этой точке пропадает. Значения максимумов нагрузки в эксперименте и расчете совпадают, однако спад по достижении предельной деформации в расчетах происходит быстрее, что объясняется недостаточной точностью описания поведения материала после разрушения. Мгновенный спад нагрузки (рис. 2) после достижения соответствующих пределов является грубым приближением. К сожалению, в литературе этот процесс почти не рассматривается, и мы не имеем достаточно обоснованных данных для его уточнения.

На рис. 5 приводятся расчетные напряжения в срединном поперечном сечении балки в разные моменты времени. Сжимающие напряжения приняты положительными.

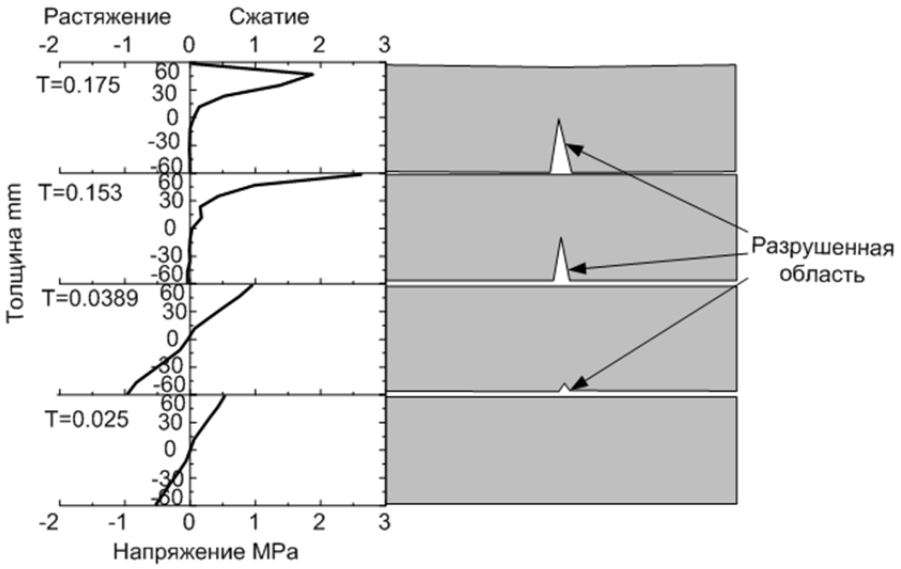

Рисунок 5. Напряжения в разные моменты времени в поперечном сечении балки, совпадающем с сечением приложения внешней нагрузки (моделирование опыта Sodhi [12])

На рис. 5 видно, что в начальный момент времени растягивающие и сжимающие напряжения распределены по поперечному сечению антисимметрично (T = 0,025 с и T = 0,0389 с). После момента T=0,0389 с в точке, соответствующей свободной поверхности балки, в растянутой зоне достигается предел прочности по растяжению. После этого разрушение распространяется по растянутой зоне, и в момент времени T = 0.153 с разрушение распространилось по всей растянутой зоне. В этот момент напряжения в сжатой зоне достигли предела прочности в точках свободной поверхности. В этой зоне начинается пластическое течение, а потом и разрушение. Далее пластическая деформация распространяется по сжатой зоне. Это сопровождается постепенным ростом напряжений в точках поперечного сечения, пластическим течением при достижении предела текучести и постепенной потерей несущей способности.

Влияние свойств льда на несущую способность ледяной балки

Полученный выше результат свидетельствует о приемлемости принятой в численных расчетах модели, что позволяет использовать данную методику для практических расчетов. Однако в первую очередь следует оценить влияние свойств льда на конечный результат.

Основными параметрами льда, влияющими на несущую способность, являются: прочность на сжатие, прочность на растяжение и предельная пластическая деформация. Результаты расчетов для различных значений прочности при растяжении представлены на рис. 6. Все остальные расчетные параметры льда неизменны.

Из рис. 6 следует, что вариация прочности льда при изгибе (растяжении) в широких пределах влияет на значение первого пика нагрузки, но практически не оказывает влияния на предельную несущую способность.

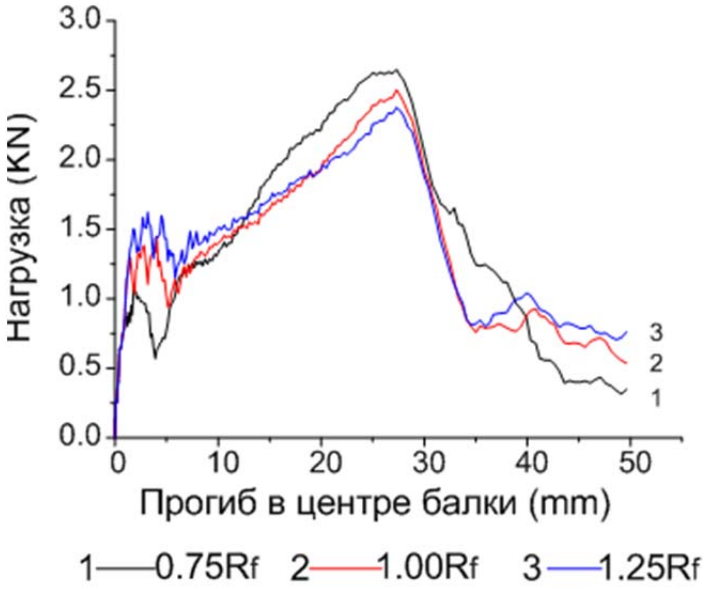

Рисунок 6. Определение процесса деформирования и нагрузок при различных прочностях льда на растяжение при прочих постоянных параметрах (R_f – прочность на растяжение из табл. 1)

На рис. 7 представлено изменение несущей способности при различных предельных пластических деформациях при прочих постоянных параметрах. Из рис. 7а следует, что предельная пластическая деформация в основном оказывает влияние на спад нагрузки и, вероятно, слабо влияет на максимальное значение несущей способности. Из рис. 7б следует, что после достижения прочности на сжатие градиент спада напряжения влияет на несущую способность. Таким образом, основной характеристикой льда в дальнейшем будет предел прочности при сжатии.

На рис. 8 приводятся результаты расчетов безразмерной предельной несущей способности в зависимости от отношения длины балки к ее толщине. На рис. 8 видно, что безразмерные результаты расчета согласуются с данными экспериментальных исследований Sodhi. Следует также отметить, что безразмерная нагрузка P/Rc*L*h уменьшается с увеличением безразмерной длины L/h.

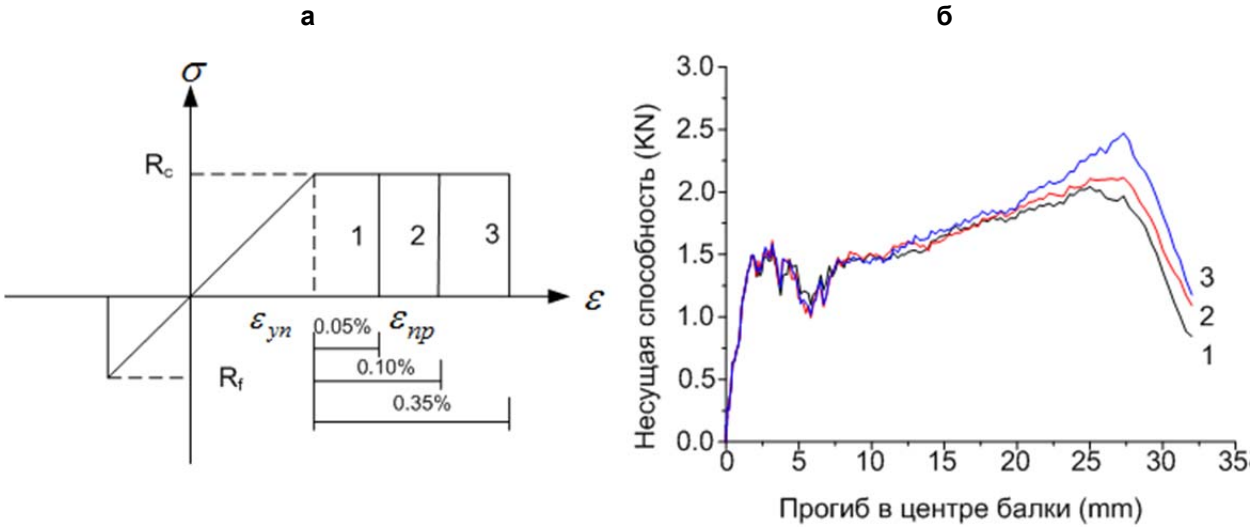

Рисунок 7. Определение процесса деформирования и нагрузок при различных предельных пластических деформациях при прочих постоянных параметрах. Пластическая деформация не меняется, законы разгрузки – разные:
а) разные предельные пластические деформации при сохранении прочности на сжатие;
б) 1 – предельная пластическая деформация при сохранении прочности на сжатие;
2,3 – разные предельные пластические деформации на спаде нагрузки;
1 – 0,35%, 2 – 0,50%, 3 – 0,80%

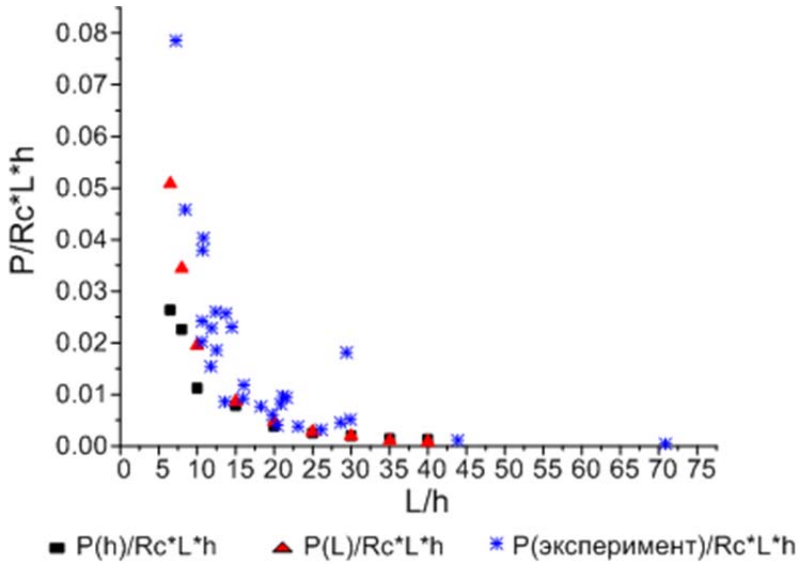

Рисунок 8. Зависимость безразмерной предельной несущей способности балки от отношения длины балки к ее толщине:
P(h) – нагрузка при постоянной длине балки L и переменной толщине h;
P(L) – нагрузка при постоянной толщине h и переменной длине L;
P(эксперимент) – значение нагрузки, взятое из опыта Sodhi

Наклонные гидротехнические сооружения

Расчетная схема, используемая обычно при расчетах воздействия льда на наклонные гидротехнические сооружения, приведена на рис. 9. В этом случае ледяное поле должно преодолевать реакцию сооружения, силу трения, влияние массы блоков льда, которые образовались при разрушении и находятся на поверхности сооружения, силы, возникающей при их проталкивании, силы инерции и т.д. В расчетах лед обычно рассматривается как балка на гидравлическом основании, находящаяся под действием сил плавучести и толкающей силы окружающего льда с одной стороны и силы реакции сооружения на действие льда с другой стороны. Силы реакции раскладываются на вертикальную и горизонтальную составляющие. Для рассматриваемой балки вычисляются распределение изгибающего момента и напряжения вдоль балки с учетом продольной составляющей нагрузки. Предполагается, что в сечении, где растягивающее напряжение достигает предела, балка начинает разрушаться. Обычно в качестве предельного момента используется момент, возникающий при изломе свободно плавающей балки. Результаты, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что наличие продольных усилий значительно увеличивает предельный момент и, соответственно, несущую способность. Если в рассмотренном выше случае продольная сила возникала вследствие ограниченности возможности горизонтального расширения балки, то в схеме, представленной на рис. 9, она есть результат воздействия горизонтальной проекции реакции сооружения и блоков льда, находящихся на поверхности сооружения.

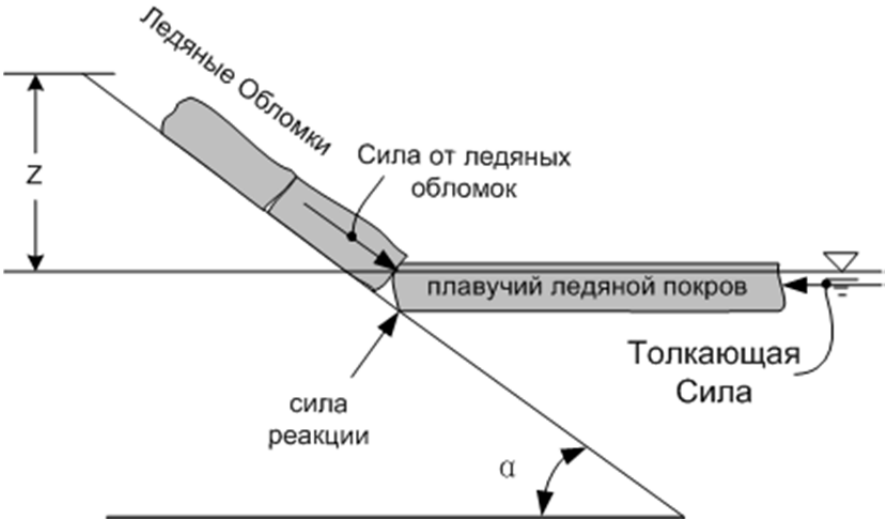

Рисунок 9. Стандартная схема расчета взаимодействия льда с сооружением с наклонной гранью

Для определения этого момента изучается предельная несущая способность консольной ледяной балки. К свободному концу этой балки приложены вертикальная и горизонтальная нагрузки. Определяются распределение напряжений в балке и тот изгибающий момент, при котором балка окончательно теряет несущую способность.

Решается следующая задача. К свободному концу плавающей балки длиной L и толщиной h приложена постоянная горизонтальная сила F и постепенно возрастающая во времени вертикальная сила P(T). Определяется момент времени, когда балка окончательно разрушится, и предельный изгибающий момент, действующий в это время. Исходные данные по свойствам льда соответствуют указанным в табл. 1.

На рис. 10 видно, что в начальный момент времени сжимающие напряжения распределены равномерно в поперечном сечении (T = 0,120 с). С увеличением вертикальной нагрузки в момент T = 2,150 с в растянутой зоне достигается предел прочности на изгиб и образуется трещина. Далее трещина прорастает, и в момент T = 2,165 с в сжатой зоне достигается предел прочности на сжатие. Следует отметить, что область разрушения растяжением в этот момент занимает почти 75% площади балки.

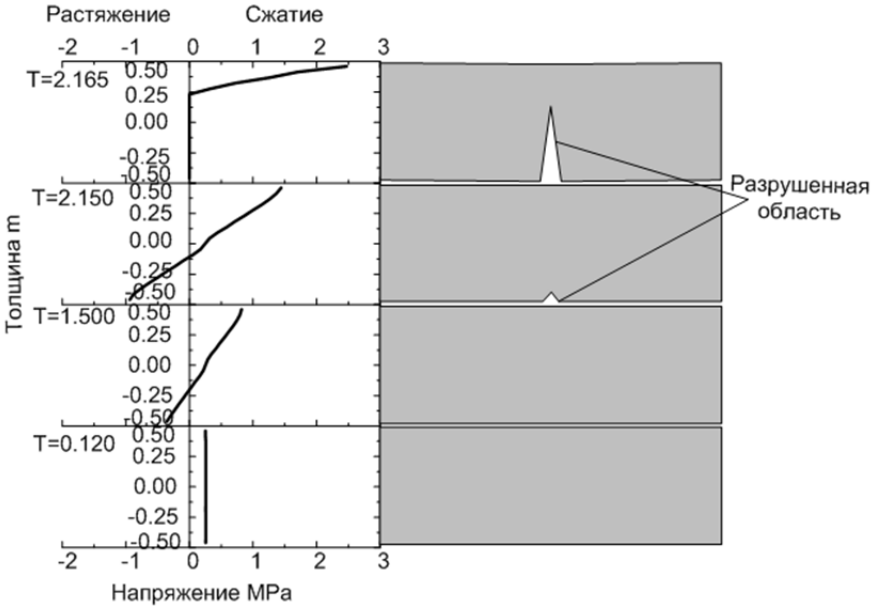

Рисунок 10. Распределение напряжений во льду около заделки в разные моменты времени (h = 0,92 м; F = 0.25 МПа)

На рис. 11 приводится зависимость безразмерного параметра Mп/My от отношения L/h. Каждая кривая соответствует действию той же вертикальной силы, для которой найдено My, и постоянной продольной силы Fr = (0,1;0,2;0,3) Rc. Видно, что L/h практически не влияет на значение безразмерного предельного момента, а значение продольной силы оказывает сильное влияние. Рис. 12 более подробно иллюстрирует влияние горизонтальной нагрузки на предельный момент. Вначале эта нагрузка приводит к увеличению несущей способности, но после достижения определенного предела несущая способность уменьшается, так как под действием значительной продольной силы разрушение начинается в сжатой зоне.

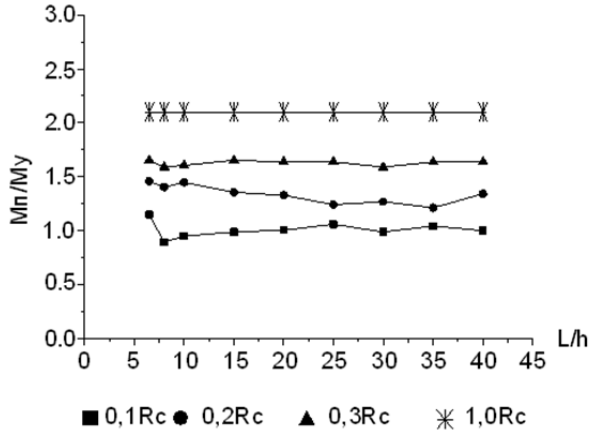

Рисунок 11. Зависимость безразмерных параметров Mп/My от отношения L/h

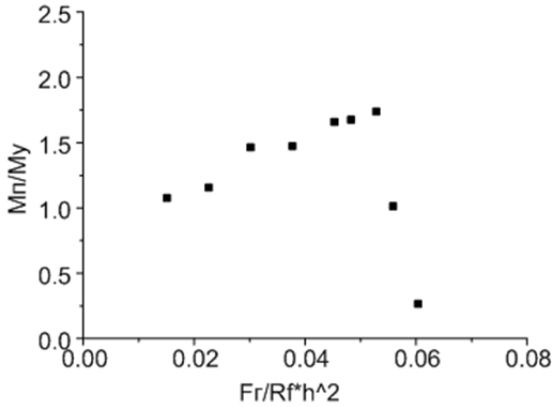

Рисунок 12. Зависимость безразмерных параметров Mп/My от отношения Fr/Rf*h^2 для консоли

My – момент действующий на балку при упругой работе при достижении в крайнем волокне напряжения, равного прочности при растяжении;
Mп – предельный момент, вызываемый той же предельной силой при дополнительном действии продольной нагрузки; L и h – длина и толщина балки;
Rc и Rf – пределы прочности льда при сжатии и растяжении соответственно.
Принято Rc/Rf=2,7

После разрушения ледяная балка оказывается разделенной на две части – блок льда и оставшаяся часть балки. Контакт между блоком и оставшейся частью ледяной балки рассматривается как пластический шарнир. Под действием оставшейся части ледяной балки блок продолжает скользить по поверхности сооружения. По мере движения блок может подвергнуться дальнейшему разрушению.

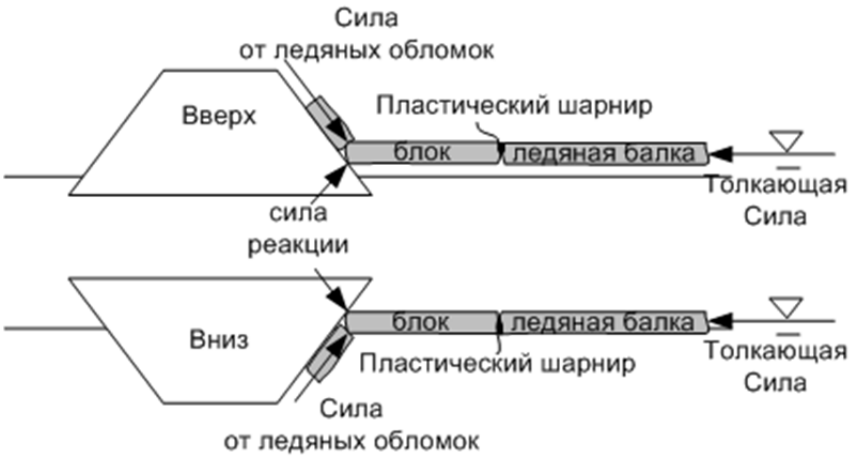

Рисунок 13. Расчетная схема для взаимодействия блоков льда и сооружений

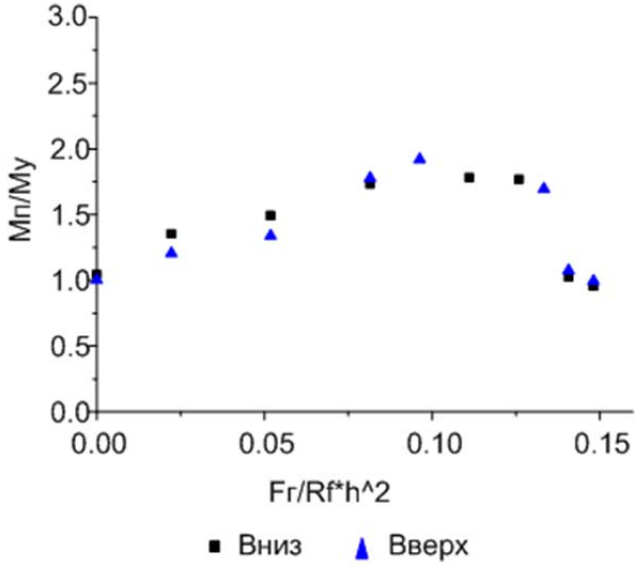

Рисунок 14. Зависимость безразмерных параметров Mп/My от отношения Fr/Rf*h^2 для блока

Рис. 13 и рис. 14 иллюстрируют аналогичную ситуацию при взаимодействии льда с сооружениями с бортами, сужающимися вверх и вниз. Рис. 12 и рис. 14 показывают, что принятые методики недооценивают предельный несущий момент, следовательно, нагрузки на сооружения могут вырасти до двух раз.

Заключение

Совпадение результатов расчетов по программному комплексу LS-DYNA и опытных данных указывает на эффективность и надежность метода математического моделирования. Обнаружено слабое влияние прочности при изгибе на предельную несущую способность и предельной пластической деформации на спад нагрузки.

Выявленные распределения напряжений в разные моменты времени в поперечном сечении балки отражают механизм разрушения льда и могут быть использованы для вычисления предельного момента сопротивления изгибу после образования трещины в растянутой зоне.

Полученные результаты показывают, что прочность на сжатие оказывает определяющее влияние на предельный изгибающий момент. Поэтому расчетные нагрузки на наклонные гидротехнические сооружения могут значительно вырасти.

Литература

1. Ashton G.D. River and Lake Ice Engineering. Littleton, Colorado: Water Resources Publication, 1986. 276 p.
2. ISO/FDIS 19906:2010(E). Petroleum and natural gas industries – Arctic offshore structures. Final draft.
3. Matskevitch D.G., Shkhinek K.N. Ice Action onto Multilegged Structures due to Change of Water Level // International Journal of Offshore and Polar Engineering. 1992. №3. Pp. 222-227.
4. Афанасьев В.П. Определение прочности льда при расчете гидротехнических сооружений // Гидротехническое строительство. 1968. №5. С. 48-51.
5. СНиП 2.06.04-89* (1995) Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения.
6. Шхинек К.Н. Ледовые нагрузки на арктические платформы // Гидротехническое строительство. 1994. №3. С. 33-36.
7. Бутягин И.П. Прочность льда и ледяного покрова. Новосибирск : Наука, 1966. 153 с.
8. Matskevitch D.G., Shkhinek K.N. Computer-based Simulation of the Ice Fracture Near a Vertical Pile // International Journal of Offshore and Polar Engineering. 1992. №2. Pp. 123-128.
9. Сухоруков К.К. Мелкомасштабная структура внутренних напряжений сплоченного ледяного покрова // Метеорология и гидрология. 1995. №8. С. 63-74.
10. Сухоруков К.К. Структура внутренних напряжений в дрейфующих ледяных полях Арктики и Антарктики // Известная РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. №2. С. 257-265.
11. Сухоруков К.К. Особенности напряженного состояния морского льда при разрушении // Метеорология и гидрология. 1997. №3. С. 78-90.
12. Sodhi D.S. Vertical penetration of floating ice sheets. International Journal of Solid and Structures.1998. Vol. 35. №32-32. Pp. 4275-4294.
13. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. т. 2. М. : Наука, 1965. 480 с.
14. Никитин В.А., Сухоруков К. К. Прочность морских ледяных полей и ледовые нагрузки // Метеорология и гидрология. 1998. №12. С. 88-95.
15. Никитин В.А., Ковалев С.М. Прочность морского ледяного покрова // Метеорология и гидрология. 2002. №12. С. 62-69.
16. Kärnä T., Jochmann P. Field observations on ice failure modes // Proceedings of 17th International Conference on POAC. Trondheim, Norway, June 16-19. 2003. Vol. 2. Pp. 839-849.
17. Лосет С., Шхинек К.Н., Гудместад О., Хойланд К. Воздействие льда на морские и береговые сооружения. СПб.: Лань, 2010. 272 с.
18. Лавров В.В. О строительных нормах прочности льда на сжатие // Гидротехническое строительство. 1967. №2. С. 39-42.
19. Kim H., Kedward, K.T. Modeling Hail Ice Impacts and Predicting Impact Damage Initiation in Composite Structures // AIAA Journal. 2000. Vol. 38. No.7. Pp. 1278-1288.
20. Муйземнек А.Ю., Богач А.А. Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе Ls-Dyna. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. 106 с.
21. Carney K.S., Benson D.J., Bois P.D., Lee R. A Phenomenological High Strain Rate Model with Failure for Ice // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Pp. 7820-7839.
22. Hallquist J.O. Ls-Dyna Theoretical manual. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 2006. 680 p.

** Ли Лян, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: +7(921)949-96-83; эл. почта: hitliliang@gmail.com

О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа

Д.т.н., профессор А.А. Лукашевич*;
д.ф.-м.н., профессор Л.А. Розин,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: контактная задача; односторонние связи; трение; пошаговый анализ; рабочая схема; дискретная модель; контактный элемент

Конструктивно нелинейные задачи с односторонними связями и трением при неизвестной заранее зоне контакта часто встречаются при расчете различного рода конструкций и сооружений. Например, технологические и деформационные швы, имеющие место в массивных сооружениях, могут раскрываться и закрываться как с проскальзыванием, так и со сцеплением контактирующих поверхностей при различных сочетаниях внешних нагрузок. То же самое может происходить на контакте подошвы сооружения с основанием, либо на отдельных опорах, допускающих отрыв или проскальзывание опирающейся на них конструкции. Вместе с тем именно состояние контактной зоны нередко является определяющим при оценке напряженно-деформированного состояния, прочности и работоспособности конструкций и сооружений.

В настоящее время численное решение контактных задач осуществляется, как правило, на основе различных схем метода конечных элементов (МКЭ). При этом континуальные задачи контакта упругих тел сводятся к конечномерным задачам с дискретными (односторонними) связями. Разработке различных численных методов расчета систем с односторонними связями на базе МКЭ посвящено множество исследований, среди которых отметим работы А. В. Вовкушевского с соавторами [1, 2], П. Вригерса [3, 4], Н. Кикучи, Д. Одена [5], Т. А. Ларсена [6, 7] и многих других.

Для моделирования односторонних связей также могут применяться специальные контактные конечные элементы (ККЭ). ККЭ вводятся на участках возможного контакта взаимодействующих тел, тем самым дискретизируя некоторый тонкий слой (фиктивный или реальный) между контактирующими поверхностями. Этот контактный слой объединяет взаимодействующие тела в единую систему, и благодаря приданным ему особым свойствам, которые учитываются посредством численного анализа, он может удовлетворять необходимым условиям контакта. Такой подход позволяет свести конструктивную нелинейность, то есть задачи с односторонними связями и трением, к рассмотрению нелинейного дискретного контактного слоя. Различные схемы контактных конечных элементов использовались в работах М. В. Зернина [8], А. Н. Подгорного [9] и других авторов.

Для численного решения контактных задач с односторонними связями применяются как методы нелинейного программирования, сводящиеся в конечном счете к методам итераций (по предельным силам трения [10, 11], по зазорам [1]), так и инкрементальные (пошаговые) методы [12, 13]. Положительной стороной пошагового процесса является то, что на его основе может быть получено решение контактной задачи на любой ступени нагружения. Кроме того, такой подход может быть достаточно эффективен для задач с усложненными условиями контакта и нагружения, учет которых приближает расчетную схему к реальной работе сооружения. Это, например, контактное трение при зависящих от решения нормальных силах взаимодействия; учет деформаций и начальной прочности односторонних связей; учет последовательности возведения и загружения конструкции и динамического действия нагрузки. Поскольку перечисленные выше факторы делают решение подобных задач зависящими от характера и истории загружения, представляется целесообразным моделировать контактное взаимодействие и, соответственно, строить решение на основе метода пошагового анализа.

В настоящей работе при решении односторонних контактных задач используются непосредственно конечно-элементные модели и алгоритмы их численной реализации. Так, для моделирования контакта предлагается использовать контактные конечные элементы в виде стержневой системы – плоской или пространственной рамы [14]. Данные ККЭ взаимодействуют с обычными конечными элементами двумерных либо трехмерных задач и обеспечивают контакт между узлами сетки, расположенными на граничных поверхностях контактирующих тел (рис. 1).

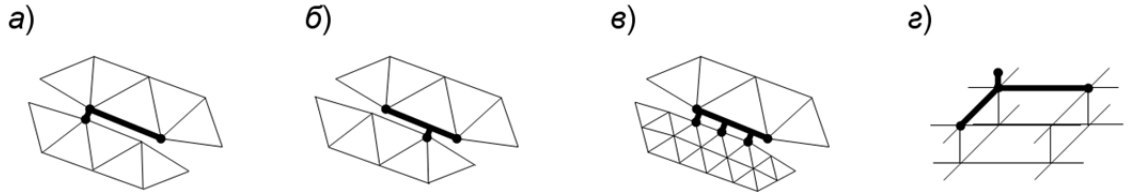

Рисунок 1. Семейство контактных конечных элементов рамного типа

При использовании указанных контактных элементов нет необходимости в совпадении координат узлов контактирующих поверхностей, т. е. могут применяться несогласованные сетки. ККЭ могут вводиться как сразу, так и последовательно, по мере установления контактов между граничными поверхностями тел, выполняя тем самым функции регистрации состояния участков контакта (или отрыва) соприкасающихся поверхностей, а также моделируя различные условия контакта (отрыва, сцепления, проскальзывания и т. д.). Кроме того, посредством ККЭ могут учитываться различные свойства односторонних связей, такие как упругая податливость, физическая нелинейность, начальная прочность и др. Моделирование условий контакта осуществляется посредством изменения физических свойств контактного слоя, которые выражаются через жесткостные характеристики отдельных стержней рамных ККЭ.

Рассмотрим, в частности, плоскую контактную задачу для линейно упругих тел V^+ и V^-, между граничными поверхностями которых (S_c^+, S_c^-) имеют место односторонние связи с кулоновским трением. Для моделирования состояния контакта в дискретной расчетной модели МКЭ используем предложенные плоские рамно-стержневые контактные элементы (рис. 2).

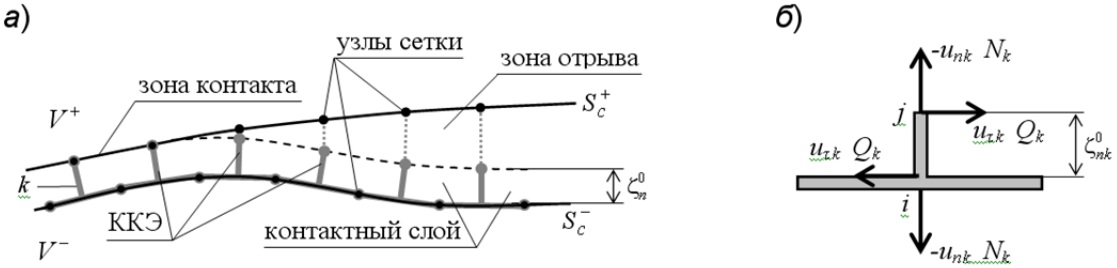

Рисунок 2. Схема контактного взаимодействия при помощи рамных ККЭ

Граничные условия на контакте при этом выражаются через усилия и деформации в каждом отдельном ККЭ:

$$\left.\begin{array}{l} u_{nk} \le 0, \quad N_k \le 0, \quad u_{nk} N_k = 0 \\ |Q_k| \le |Q_{pk}| = -f_k N_k, \quad Q_k u_{\tau k} \ge 0, \quad (Q_k - Q_{pk}) u_{\tau k} = 0 \end{array}\right\} \; k \in S_c. \qquad (1)$$

Здесь N_k, Q_k – продольная и поперечная силы в *k*-м ККЭ; $u_{nk}, u_{\tau k}$ – взаимное смещение противолежащих узлов на S_c^+ и S_c^- ($S_c = S_c^+ \cup S_c^-$) соответственно по нормали и по касательной; *f* – коэффициент трения.

Численная реализация контактных условий (1) осуществляется посредством пошагового анализа процесса нагружения и изменения состояния контакта в рассматриваемой рамно-стержневой модели. Момент перехода от одного состояния к другому представляет собой события выключения или включения односторонней связи, проскальзывания или зацепления. Метод пошагового анализа является наиболее эффективным для рассматриваемого класса контактных задач. Кроме того, появляется возможность управления дискретным контактным слоем в зависимости от поведения рассматриваемой системы, текущего состояния контактной зоны, уровня напряженно-деформированного состояния, этапа возведения и загружения сооружения и т. д.

Статическое нагружение моделируется посредством пошагового приложения заданной нагрузки. Будем предполагать, что между двумя последовательными событиями система деформируется по линейному закону – в этом случае в пределах каждого шага строится решение линейно упругой задачи, а события на контакте определяются согласно схеме простого нагружения. В результате решение конструктивно нелинейной контактной задачи будет представляться в виде решения последовательности некоторого числа линейных задач при последовательном же изменении рабочих схем сооружения. Порядок расчета в данном случае состоит из пробных и основных шагов нагружения. Из анализа пробного шага определяется момент наступления очередного события. В результате основного шага устанавливается новое состояние контакта и, в свою очередь, назначается следующий пробный шаг, исходя из анализа изменения рабочей схемы. Это позволяет уточнять величину не только текущего шага нагружения, но и прогнозировать дальнейшие шаги и, таким образом, строить оптимальный, с точки зрения продолжительности и трудоемкости, процесс нагружения [15].

Момент наступления события проскальзывания (т. е. величина основного (*s*+1)-го шага) для *k*-й связи, находящейся до этого в состоянии контакта со сцеплением ($k \in S_{1c}$, $S_{1c} = S_{1c}^{+} \cup S_{1c}^{-}$), определяется следующим выражением:

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1}\left(\frac{Q_{pk}^{s} - Q_k^{s}}{\Delta\tilde{Q}_k^{s+1} - \Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}}\right), \quad k \in S_{1c}. \tag{2}$$

Переход из состояния скольжения в состояние сцепления на (*s*+1)-м шаге определяется условием: $\left(\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1} \big/ \Delta u_{\tau k}^{s}\right) < 0$, $\Delta u_{\tau k}^{s} \neq 0$, $k \in S_{2c}$.

Моменты выключения (отрыва) или включения (контакта) для *k*-й связи, находящейся до этого в состоянии контакта ($k \in S_{2c}$, $S_{2c} = S_{2c}^{+} \cup S_{2c}^{-}$) или в состоянии отрыва ($k \in S_{3c}$, $S_{3c} = S_{3c}^{+} \cup S_{3c}^{-}$):

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1}\left(\frac{-N_k^{s}}{\Delta\tilde{N}_k^{s+1}}\right), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}; \qquad \Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1}\left(\frac{-u_{nk}^{s}}{\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}}\right), \quad k \in S_{3c}. \tag{3}$$

Здесь величины $\Delta\tilde{Q}_k^{s+1}$, $\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}$, $\Delta\tilde{N}_k^{s+1}$, $\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1}$, $\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}$ – приращения контактных усилий и взаимных перемещений для *k*-го ККЭ на пробном шаге $\Delta\tilde{\lambda}^{s+1}$.

Возможные случаи изменения предельной силы трения Q_{pk} на (*s*+1)-м шаге, а также соответствующие схемы уточнения текущего основного шага и корректировки контактных усилий (для *k*-го ККЭ) приводятся ниже.

1. Приращение предельной поперечной силы превышает приращение поперечной силы в *k*-м ККЭ, что соответствует условию допредельного трения – устанавливается состояние сцепления и выполняется перерасчет шага.

2. Приращение предельной поперечной силы меньше, чем приращение поперечной силы – состояние скольжения на *k*-м контакте сохраняется и производится корректировка значений поперечных сил в ККЭ:

$$Q_k^{s+1} = Q_k^{s} + \Delta Q_{ck}^{s+1}, \quad \Delta Q_{ck}^{s+1} = \Delta Q_{pk}^{s+1} + \delta Q_k^{s}, \quad k \in S_{2c}, \tag{4}$$

где $\delta Q_k^{s} = Q_{pk}^{s} - Q_k^{s}$ – невязка поперечных сил; ΔQ_{pk}^{s+1} – приращение предельной поперечной силы на шаге $\Delta\lambda_{\mathrm{P}}^{s+1}$ (при заданной точности вычислений ε_p):

$$\Delta\lambda_{\mathrm{P}}^{s+1} = \min(\Delta\lambda_k^{s+1}), \quad \Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{\,s+1}\left|\frac{\varepsilon_{\mathrm{P}}\ Q_{pk}^{s}}{\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}}\right|, \quad k \in S_{2c}\text{, где } \left|\frac{\Delta Q_{pk}^{s+1}}{Q_{pk}^{s}}\right| \le \varepsilon_{\mathrm{P}}\,. \tag{5}$$

К соответствующим контактным узлам на граничных поверхностях взаимодействующих тел прикладываются компенсирующие силы:

$$F_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{pk}^{s+1} - \delta Q_k^{s}, \quad k \in S_{2c}\,. \tag{6}$$

3. Если предельная поперечная сила на шаге уменьшается: $\left|\tilde{Q}_{pk}^{s+1}\right| - \left|Q_{pk}^{s}\right| < 0$, то уточнение шага и корректировка контактных усилий производится согласно (4)–(6).

При динамическом действии нагрузки конструктивная нелинейность проявляется в смене рабочих схем сооружения во времени. Момент времени изменения состояния контакта (т. е. наступление очередного события) в этом случае определяется путем пошагового (по времени) анализа рамно-стержневой контактной модели при использовании соответствующих аппроксимирующих выражений для перемещений, скоростей и ускорений на шаге Δ*t*. При этом корректируется продолжительность временного шага и производится его перерасчет. В результате устанавливается новое состояние контакта на данный момент времени и, таким образом, меняется текущая рабочая схема сооружения.

Запишем конечно-элементную формулировку для динамической контактной задачи. Матричное уравнение движения здесь представляется в виде, позволяющем свести решение конструктивно нелинейной динамической задачи к решению последовательности линейных динамических задач на основе пошагового по времени анализа состояния контакта для рассматриваемой дискретной модели МКЭ:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{U}}^{\,t+\Delta t} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{U}}^{\,t+\Delta t} + \mathbf{K}\,\Delta\mathbf{U}^{\,t+\Delta t} = \mathbf{P}^{\,t+\Delta t} - \mathbf{K}\,\mathbf{U}^{\,t}. \tag{7}$$

Для численного интегрирования уравнений (7) используется конечно-разностная схема Ньюмарка [16]. В любой момент времени в пределах текущего шага Δ*t* значения перемещений, скоростей и ускорений рассчитываются по формулам:

$$\begin{gathered}\ddot{\mathbf{U}}(t') = \ddot{\mathbf{U}}^{\,t} + \frac{(t'-t)}{\Delta t}\left[\ddot{\mathbf{U}}^{\,t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}^{\,t}\right]; \quad \dot{\mathbf{U}}(t') = \dot{\mathbf{U}}^{\,t} + \frac{(t'-t)}{2}\left[\ddot{\mathbf{U}}^{\,t} + \ddot{\mathbf{U}}^{\,t'}\right]; \\ \mathbf{U}(t') = \mathbf{U}^{\,t} + (t'-t)\,\dot{\mathbf{U}}^{\,t} + \frac{(t'-t)^2}{4}\left[\ddot{\mathbf{U}}^{\,t} + \ddot{\mathbf{U}}^{\,t'}\right].\end{gathered} \tag{8}$$

Кроме того, при наличии односторонних связей и кулоновского трения должны выполняться граничные условия на контакте, записанные для момента времени *t*:

$$\left.\begin{array}{l} u_{nk}^{t} \le 0, \quad N_k^{t} \le 0, \quad u_{nk}^{t} N_k^{t} = 0 \\ \left|Q_k^{t}\right| \le \left|Q_{pk}^{t}\right|, \quad Q_k^{t}\,\dot{u}_{\tau k}^{t} \ge 0, \quad (Q_k^{t} - Q_{pk}^{t})\dot{u}_{\tau k}^{t} = 0 \end{array}\right\} \quad k \in S_c\,. \tag{9}$$

Здесь $\dot{u}_{\tau k}^{t}$ – скорость взаимного касательного перемещения противолежащих узлов *k*-го ККЭ в момент времени *t*. Состояния на контакте будут определяться следующими условиями: при сцеплении $u_{nk}^{t} = 0$, $N_k < 0$, $\dot{u}_{\tau k}^{t} = 0$, $\left|Q_k^{t}\right| < \left|Q_{pk}^{t}\right|$; при проскальзывании $u_{nk}^{t} = 0$, $N_k^{t} < 0$, $\dot{u}_{\tau k}^{t} \ne 0$, $\left|Q_k^{t}\right| = \left|Q_{pk}^{t}\right|$; при отрыве $u_{nk}^{t} < 0$, $N_k^{t} = 0$.

Численное решение динамической контактной задачи, таким образом, будет заключаться в проведении процесса пошагового интегрирования по времени уравнений (7) при выполнении условий на контакте в виде (9). Соответствующие выражения для определения момента времени $\hat{t}_k$ наступления ближайшего события – проскальзывания, зацепления, отрыва или контакта для *k*-й связи – здесь имеют следующий вид [17]:

$$\widehat{t}_k = t + \Delta t\left(\frac{Q_{pk}^t - Q_k^t}{(Q_k^{t+\Delta t} - Q_k^t) - (Q_{pk}^{t+\Delta t} - Q_{pk}^t)}\right),\ k \in S_{1c};\quad \widehat{t}_k = t + \Delta t\left(\frac{-\dot{u}_{\tau k}^t}{\dot{u}_{\tau k}^{t+\Delta t} - \dot{u}_{\tau k}^t}\right),\ k \in S_{2c};$$
$$\widehat{t}_k = t + \Delta t\left(\frac{-N_k^t}{N_k^{t+\Delta t} - N_k^t}\right),\ k \in S_{1c}, S_{2c};\qquad \widehat{t}_k = t + \Delta t\left(\frac{-u_{nk}^t}{u_{nk}^{t+\Delta t} - u_{nk}^t}\right),\ k \in S_{3c}. \tag{10}$$

С помощью аппроксимирующих выражений (8) дополнительно может быть произведено итерационное уточнение момента времени $\widehat{t}_k$, затраты времени счета при этом возрастают незначительно.

Приведенные модели ККЭ и методы их расчета нетрудно распространить на решение задач с односторонними связями при учете физических свойств контактного слоя, а также других дополнительных факторов. Так, при учете упругой податливости в односторонних связях [18] граничные условия (1) примут следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} u_{nk} + u_{nk}^{\text{c}} \le 0;\quad N_k \le 0;\quad (u_{nk} + u_{nk}^{\text{c}})N_k = 0 \\ |Q_k| \le |Q_{pk}| = -f_k N_k;\quad Q_k(u_{\tau k} + u_{\tau k}^{\text{c}}) \ge 0;\quad (Q_k - Q_{pk})(u_{\tau k} + u_{\tau k}^{\text{c}}) = 0 \\ u_{nk}^{\text{c}} = N_k / C_{nk};\quad u_{\tau k}^{\text{c}} = -Q_k / C_{\tau k} \end{array}\right\}\ k \in S_c. \tag{11}$$

Здесь u_{nk}^{c}, $u_{\tau k}^{\text{c}}$ – продольная и поперечная деформации *k*-го ККЭ (соответствующие обжатию и сдвигу упруго-податливого контактного слоя с начальной толщиной ζ_n^0); $C_{nk} = A_k / \rho_{nk}$, $C_{\tau k} = A_k / \rho_{\tau k}$, $\rho_n = (1 - \mu_{\text{c}}^2)\zeta_n^0 / E_{\text{c}}$, $\rho_\tau = 2(1 + \mu_{\text{c}})\zeta_n^0 / E_{\text{c}}$ – характеристики жесткости и податливости ККЭ соответственно в нормальном и касательном направлениях; A_k – площадь контакта, относящаяся к ККЭ. Физическая нелинейность контактного слоя здесь также может быть сведена к внутренней нелинейности самих рамных контактных элементов – при этом нелинейные свойства слоя будут задаваться через нелинейные характеристики отдельных стержней ККЭ.

При учете начальной прочности контактного шва на разрыв и срез условия на контакте запишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} u_{nk} + u_{nk}^{\text{c}} \le 0,\quad N_k + \dfrac{|Q_k|}{\alpha_R} \le N_{Rk},\quad (u_{nk} + u_{nk}^{\text{c}})(N_k + \dfrac{|Q_k|}{\alpha_R} - N_{Rk}) = 0 \\ |Q_k| \le Q_{Rk} - \alpha_R N_k,\quad Q_k(u_{\tau k} + u_{\tau k}^{\text{c}}) \ge 0,\quad (Q_k - Q_{Rk} + \alpha_R N_k)(u_{\tau k} + u_{\tau k}^{\text{c}}) = 0 \end{array}\right\}\ k \in S_c. \tag{12}$$

Здесь N_{Rk}, Q_{Rk} – предельные контактные усилия растяжения и сдвига для *k*-й дискретной односторонней связи (т. е. *k*-го ККЭ).

Подчеркнем, что условия (12) справедливы только до момента разрушения связей в данной точке контакта, после чего будут действительны условия (11), описывающие односторонние связи с трением. Внеся соответствующие дополнения в алгоритм, обеспечиваем в одном пошаговом процессе одновременный учет прочности контактного шва, а также раскрытия или трения его поверхностей на участках, где сцепление разрушено.

Приведенные расчетные модели и методы реализованы в комплексе вычислительных программ, предназначенных для решения статических и динамических задач контактного взаимодействия. С их помощью выполнены расчеты ряда конструкций и сооружений с односторонними связями при учете соответствующих условий контакта и характера внешних воздействий [19, 20].

Ниже рассмотрена задача о взаимодействии водобойной плиты плотины с грунтовым основанием при гидродинамическом воздействии потока воды, сбрасываемой с верхнего бьефа плотины. Расчетная схема плиты (рис. 3) соответствуют одному из объектов Волжского гидроузла.

Целью расчетов являлась оценка влияния пульсационной составляющей давления воды в сбрасываемом потоке на контактное взаимодействие водобойной плиты с основанием.

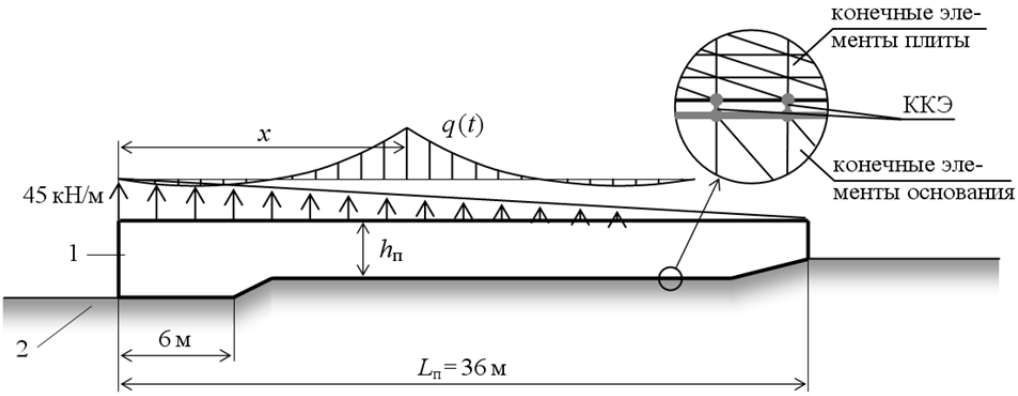

Рисунок 3. Схема рассчитываемой плиты и приложенных нагрузок

При расчете учитывались нагрузки, обусловленные собственным весом плиты, гидродинамическим воздействием со стороны потока воды, фильтрационным противодавлением. Пульсационная составляющая давления воды в сбрасываемом потоке учитывалась в виде динамической импульсной нагрузки. Чтобы изучить зависимость решения от характеристик гидродинамического воздействия, было просчитано поведение плиты при различном положении импульса на водобойной плите ($x/L_п$), а также при разных его направлениях и продолжительности (рис. 4). Получены зависимости предельных значений толщины плиты от положения импульса (рис. 5). Сплошной линией показана огибающая относительных значений толщины плиты, отвечающих условию недопущения отрыва и сдвига плиты относительно основания (здесь $h_{кр}$ = 3,48 м – критическая глубина, соответствующая расчетному удельному расходу воды). Пунктирная линия соответствует предельной толщине плиты при приложении только статических нагрузок. На основе анализа полученных результатов сделаны предложения, касающиеся конструктивных решений рассмотренного сооружения с учетом характера действующих на плиту нагрузок [20].

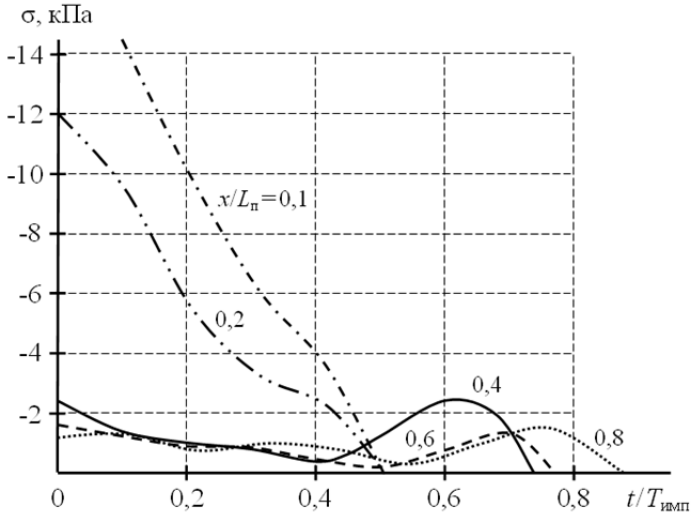

Рисунок 4. Контактные напряжения на левом краю подошвы водобойной плиты перед моментом отрыва

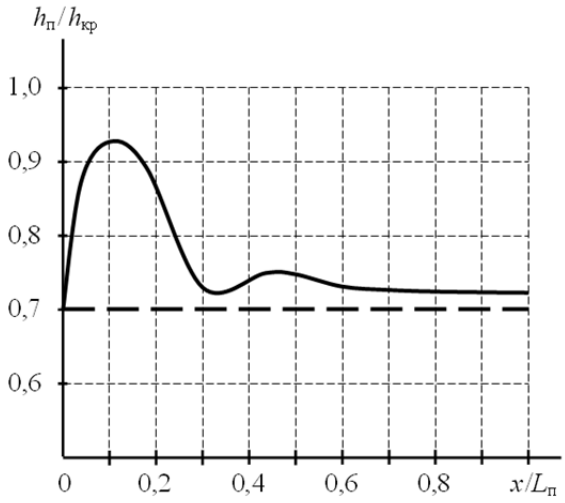

Рисунок 5. Зависимость предельной толщины плиты $h_п$ от положения импульса $x/L_п$

Таким образом, предложенная модель контакта и численный метод ее расчета обеспечивают возможность анализа контактного взаимодействия упругих систем и имеют преимущества в тех случаях, когда решение задачи зависит от характера и истории загружения сооружения. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать заключение об эффективности и надежности разработанного подхода при учете сложных условий контакта и нагружения, что имеет существенное значение для решения прикладных задач строительной механики.

Литература

1. Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
2. Вовкушевский А. В., Розин Л. А., Рукавишников В. А. Разработка методов расчета сооружений с учетом сложных контактных взаимодействий // Известия вузов. Строительство. 1994. №12. С. 25–29.
3. Wriggers P., Nackenhorst U. Analysis and Simulation of Contact Problems.Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 394 p.
4. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 521 p.
5. Kikuchi N., Oden J. T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. SIAM Studies in Applied and Numerical Methematics. Philadelphia. 1988. Vol. 8. 509 p.
6. Laursen T. A., Kim T. Y., Dolbow J. E. A Mortared Finite Element Method for Frictional Contact on Arbitrary Surfaces // Computational Mechanics. 2007. №39. Pp. 223–235.
7. Laursen T. A., Yang B. A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations // Computational Mechanics. 2008. №41. Pp. 189–205.
8. Зернин М. В. [и др.] Моделирование контактного взаимодействия с использованием механики «контактной псевдосреды» // Прочность и надежность машин. Вестник БГТУ. 2007. №4(16). С. 62-72.
9. Подгорный А. Н. [и др.] Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.
10. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития // Прикладная математика и механика. 2009. №3. С. 492–502.
11. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
12. Francawilla A., Zienkiewicz O. C. A note on numerical computation of elastic contact problem // International Journal For Numerical Methods in Engineering. 1975. Vol. 9. №4. Pp. 913–924.
13. Люминарский И. Е. Расчет упругих систем с односторонними связями. М.: Изд-во МГИУ, 2006. 308 с.
14. Лукашевич А. А. Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач // Известия вузов. Строительство. 2007. №12. С. 18–23.
15. Лукашевич А. А. Решение контактных упругих задач с трением Кулона при пошаговом нагружении // Известия вузов. Строительство. 2008. №10. С. 14–21.
16. Бате Л., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
17. Розин Л. А., Лукашевич А. А. Численное решение контактных задач с трением при динамических воздействиях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2010. №4 (110). С. 288–294.
18. Розин Л. А., Смирнов М. С. Решение контактных задач теории упругости с податливостью в односторонних связях // Известия вузов. Строительство. 2000. №5. С. 27–31.
19. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Расчет сооружений с учетом последовательного возведения и наличия односторонних связей на контактах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №4-1(89). С. 74–78.
20. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Решение задачи о взаимодействии водобойной плиты крепления с основанием при пульсации давления в сбрасываемом потоке // Гидротехническое строительство. 2010. №4. С. 52–55.

** Анатолий Анатольевич Лукашевич, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: +7(911)821-25-53; эл. почта: a.luk@bk.ru

Эндохронная теория пластичности, обобщающая теорию Сандерса-Клюшникова

Д.ф.-м.н., профессор Ю.И. Кадашевич;
к.ф.-м.н., доцент С.П. Помыткин*,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров

Ключевые слова: пластичность; теория; эндохронный подход; определяющие соотношения; квазистатистический вариант

При расчетах напряженно-деформированного состояния оснований фундаментов и конструкций [1] основное внимание уделяется механическим и реологическим свойствам грунтов [2-5]. Поскольку реальные грунты и породы обладают определенными механическими особенностями, а именно сугубо нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями, а также возможностью деформаций развиваться во времени, в этих расчетах используются самые разные феноменологические [6] и физические теории упругости [3], пластичности [7, 8] и ползучести [9, 10]. Одним из направлений исследования зон пластических деформаций в материалах и грунтах является эндохронный подход [11-17].

Активное развитие эндохронной теории неупругости началось с 80-х годов прошлого века [18, 19]. Современное состояние эндохронного подхода кратко изложено в обзоре [20]. Опубликовано достаточно много оригинальных работ, пытающихся связать эндохронный подход с хорошо известными классическими теориями (деформационная теория пластичности, теория скольжения, теория пластического течения, теория процессов, физическая теория неупругости и т.д.). В предлагаемой читателям статье делается попытка построить эндохронный вариант теории пластичности с присущими ей достоинствами и недостатками на основе работ Дж. Сандерса [21] и В.Д. Клюшникова [22]. Отметим, что оригинальный взгляд на эндохронную теорию пластичности, отличающийся от предлагаемой работы и от недавно опубликованной статьи [23], можно найти в ряде работ отечественных ученых [24-26].

В работе Сандерса [21] было показано, как можно построить вариант теории пластического течения, если использовать понятия плоских поверхностей текучести. Оказалось, что такая теория близка как к прогнозам деформационной теории пластичности, так и к следствиям из теории скольжения [27]. В работе [22] В.Д. Клюшников изучил плоский случай нагружения. В статье [28] было намечено новое направление развития теории пластического течения, в предположении о том, что локальные поверхности текучести становятся плоскими. В предлагаемой статье на основе работ [21, 22] и [28, 29] авторами строится эндохронная теория пластичности.

В работе [28], исходя из предположения о том, что влиянием первого и третьего инвариантов тензора напряжений на закономерности пластического деформирования можно пренебречь, авторы строят определяющие соотношения теории течения в пятимерном пространстве Ильюшина [30], дополнительно постулируя, что поверхности текучести являются плоскими. Эти поверхности текучести движутся независимо друг от друга, удаляясь от начала координат, как только точка в пространстве напряжений достигает их границы. Определяющие уравнения такой теории имели следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{5}(\sigma_k - b\,\varepsilon_k^p)\cdot\cos\varphi_k = \tau\,, \tag{1}$$

$$\varepsilon_k^p = \varepsilon_i^p\cdot\cos\varphi_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{5}\cos^2\varphi_k = 1\,. \tag{2}$$

Здесь σ_k, ε_k^p – компоненты пятимерных векторов напряжений и пластических деформаций в пространстве Ильюшина; τ – предел текучести материала; ε_i^p – интенсивность вектора пластических деформаций; b – постоянный параметр.

В частности, для одноосного нагружения было показано, что

$$b\varepsilon_1^p = \sigma_1 \cos^2\varphi - \tau \cdot \cos\varphi, \tag{3}$$

$$\left\langle \varepsilon_1^p \right\rangle = \frac{\tau}{2\pi b}\left(\frac{\varphi_0}{\cos\varphi_0} - \sin\varphi_0\right), \tag{4}$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos\varphi_0}, \tag{5}$$

где $\left\langle \varepsilon_1^p \right\rangle$ – среднее значение пластической деформации; φ_0 – граничное значение угла φ, при котором плоскости поверхности текучести не перемещаются. Обратим внимание, что перемещаются поверхности текучести при значениях параметра в пределах $-\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0$. Асимптотика решения имеет вид:

$$\left\langle \varepsilon_1^p \right\rangle = \frac{1}{4b}\left(\sigma_1 - \frac{4\tau}{\pi}\right). \tag{6}$$

Согласно работам [18, 31] построим эндохронный вариант соотношений (1) – (2), если введем вместо вектора $b\varepsilon_k^p$ новый вектор r_k по формуле

$$r_k = \varepsilon_k - \frac{1-\alpha}{2G}\sigma_k. \tag{7}$$

В определение (7) входят α – параметр эндохронности ($0 \le \alpha \le 1$) и модуль сдвига G. Тогда получим, что

$$\sum_{k=1}^{5}(\sigma_k - b r_k)\cdot\cos\varphi_k = \tau, \qquad r_k = r_i \cdot \cos\varphi_k, \tag{8}$$

$$b r_i = \sum_{k=1}^{5}\sigma_k \cdot \cos\varphi_k - \tau, \qquad \sum_{k=1}^{5}\cos^2\varphi_k = 1. \tag{9}$$

Как и в классической теории эндохронного типа [31], здесь интересны три частных случая:

a) $\alpha = 0$, тогда $r_k = \varepsilon_k^p$;

b) $\alpha = 1$, тогда $r_k = \varepsilon_k$;

c) $\alpha \to 0$, тогда решение a) может отличаться от b), особенно при циклических нагружениях.

При построении эндохронной теории пластичности [18], [31] в определяющие соотношения специально вводился новый (малый) параметр $\alpha\dot{\sigma}$, чтобы обеспечить начальные условия деформирования $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$. При формулировке данного варианта теории вместо условия (5) будем использовать условие

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos\varphi_0}\cdot(1-\cos\varphi_0), \tag{10}$$

из которого следует, что при $\varphi_0 = 0$, $\sigma_1 = 0$. Фактически это означает, что r_i принимается в форме

$$b r_i = \sum_{k=1}^{5}(\sigma_k + \tau)\cdot\cos\varphi_k - \tau, \tag{11}$$

чтобы обеспечить работу соотношений, начиная со значения $\varphi = 0$.

При одноосном прямом нагружении имеем

$$b\,r_1 = [(\sigma_1 + \tau)\cdot\cos\varphi - \tau]\cdot\cos\varphi,$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos\varphi_0}\cdot(1-\cos\varphi_0) \qquad \text{при} \qquad \varphi_0 = 0,\ \ \sigma_1 = 0.$$

На рис. 1 приведено решение (кривая а), полученное согласно работе [22]. График б) на рис. 1 – результат использования формулы

$$\langle r_1 \rangle = \frac{\tau}{2\pi b}\left(\frac{1+\varphi_0 - \sin\varphi_0\cdot\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} - 1\right). \tag{12}$$

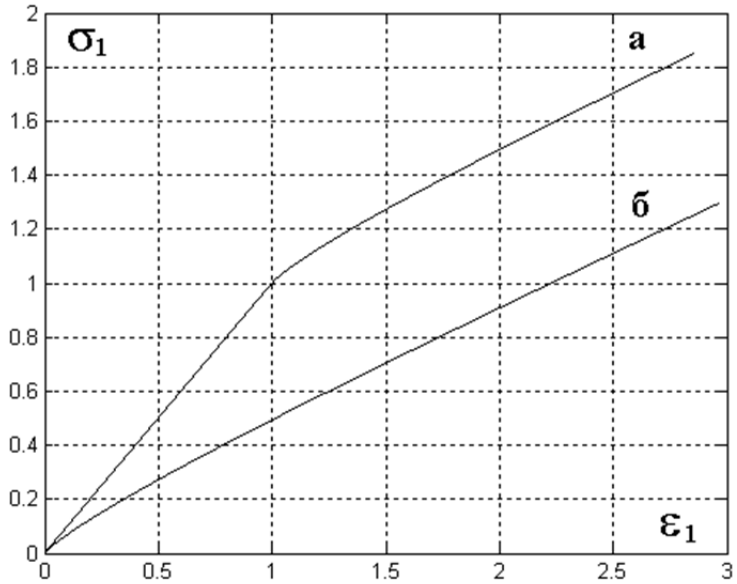

Рисунок 1. Кривые деформирования при прямом одноосном нагружении

На рис. 2 и рис. 3 приведены решения одноосной задачи, когда прямое нагружение σ_1 до величины $\sigma_1 = \sigma_1^0$ сменяется нагружением противоположного знака. Согласно идеям Сандерса [21], возникающие при этом пластические деформации образуются другими плоскими поверхностями текучести, расположенными в области от $\pi - \varphi$ до $\pi + \varphi$. Если же воспользоваться формулами вида (12), то решение примет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_1^0 + \frac{\tau}{\cos\varphi_0}\cdot(\cos\varphi_0 - 1) \qquad \text{при } \varphi_0 \ge 0,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \frac{\tau}{2\pi b}\cdot\left(1 + \frac{\sin\varphi_0\cdot\cos\varphi_0 - \varphi_0 - 1}{\cos\varphi_0}\right) \qquad \text{при } \varphi_0 \ge 0. \tag{13}$$

Здесь σ_1^0 и ε_1^0 – значения напряжения и деформации, достигнутые при прямом нагружении. Отметим, что характер кривых «напряжение-деформация», приведенных на рис.2 и рис.3, может вызвать вопросы у экспериментаторов. Однако они сознательно приводятся для того, чтобы подчеркнуть особенности подхода Сандерса-Клюшникова и необходимость дальнейшего уточнения и развития предложенного выше метода. Во всех расчетах принято, что $\varphi_0 \ge 0$, $\alpha = 1$, $2G = 1$, $\tau = 1$, $2\pi b = 1$.

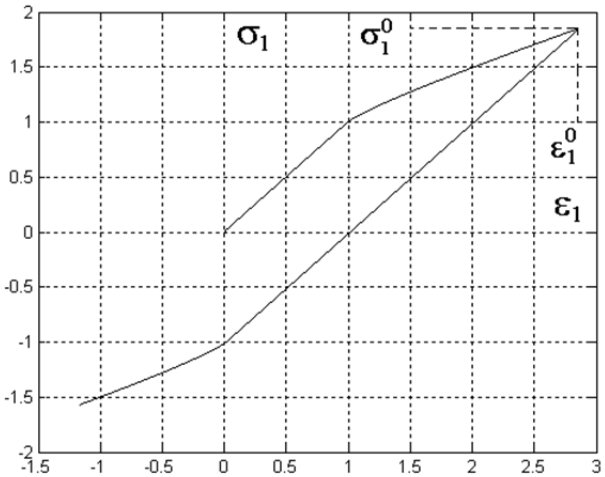

Рисунок 2. Циклическое нагружение гипотетического материала по схеме Сандерса-Клюшникова

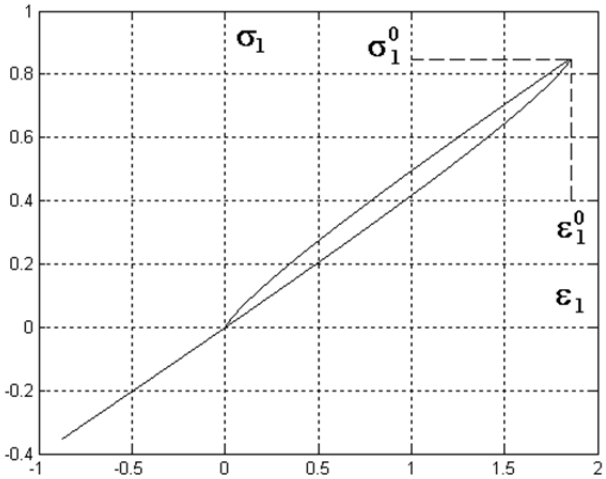

Рисунок 3. Прямое и обратное нагружение гипотетического материала согласно (13)

Подчеркнем, что знакопеременному и циклическому нагружению геоматериалов уделяется достаточно большое внимание инженеров и исследователей [32].

Таким образом, предложен новый эндохронный вариант теории неупругости, обобщающий подход Сандерса-Клюшникова. Приведенные примеры продемонстрировали, что определяющие соотношения новой теории инициируют дополнительные возможности в описании неупругого поведения материалов. Отмечено, что следствия, вытекающие из уравнений новой теории, должны быть проверены экспериментально для рекомендации их применения в практике инженерных расчетов. В дальнейших публикациях авторы намерены расширить число приведенных примеров за счет сложных траекторий нагружения и сопоставить результаты расчетов с имеющимися экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00157).

Литература

1. СНиП 2.02.01-83. Основания зданий и сооружений. М., 2003.
2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.
3. Цытович Н.А. Механика грунтов: краткий курс. М.: Книжный Дом «Либроком», 2013. 272 с.
4. Mitchell J.K., Soga K. Fundamentals of Soil Behavior. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005. 592 p.
5. Fang H.-Y., Daniels J.L. Introductory Geotechnical Engineering. An Environmental Perspective. London: Taylor and Francis, 2006. 546 p.
6. Nakai T. Constitutive Modeling of Geomaterials. Principles and Applications. CRC Press, 2010. 376 p.
7. Davis R.O., Selvadurai A.P.S. Plasticity and Geomechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 287 p.
8. Lade P.V. Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surface // International Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. №11. Pp. 1019-1035.
9. Динариев О.Ю., Николаевский В.Н. Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума // Доклады Академии Наук. 1993. Т. 331. С. 739-741.
10. Culling W.E.H. Soil creep and the development of Hillside Slopes // The Journal of Geology. 1963. Vol. 71. №2. Pp. 127-161.
11. Bazant Z.P., Shieh C.Z. Endochronic model for nonlinear triaxial deformations of concrete // Nuclear Engineering and Design. 1978. Vol. 47. №4. Pp. 598-619.

12. Wu H.C., Wang Z.K., Aboutorabi M.R. Endochronic modeling of sand in true triaxial test // Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 1985. Vol.111. Issue 10. Pp. 1257-1276.

13. Valanis K.C., Read H.E. A new endochronic plasticity model for concrete // Mechanics of Materials. 1986. №5. Pp. 277-295.

14. Imai G., Xie C. An endochronic constitutive law for static shear behaviour of over consolidated clays // Soils and Foundations. 1990. Vol. 30. Pp. 65-75.

15. Wang J.G., Fan J.H. An endochronic model for normally consolidated soils // Journal of Chongqing University. 1991. Vol. 14. №4. Pp. 1-7.

16. Bakhshiani A., Khoei A.R., Modif M. An endochronic plasticity model for powder compaction processes // Material Processing Technology. 2002. Vol. 125-126. Pp. 138-143.

17. Yeh W.C., Lin S.Y. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy // International Journal of Plasticity. 2006. Vol. 22. Pp. 16-38.

18. Valanis K.C. Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory // Archives of Mechanics. 1980. Vol. 32. Pp. 171-191.

19. Мосолов А.Б. Эндохронная теория пластичности. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1988. 44 с.

20. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Этапы развития эндохронной теории неупругости // Упругость и неупругость. М.: Издательство Московского университета, 2011. С. 151-154.

21. Sanders J.L. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions // Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics. Ann Arbor, MI, 14-18 June 1954. New York: ASME, 1955. Pp. 455-460.

22. Клюшников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 722-731.

23. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Описание эффектов второго порядка в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №6. С. 123-136.

24. Семенов А.С., Мельников Б.Е., Горохов М.Ю. Циклическая нестабильность при расчетах больших пластических деформаций // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. №3. С. 129-138.

25. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред // Вестник Ленинградского университета. Математика, механика, астрономия. 1990. №3(15). С. 87-91.

26. Быков Д.Л, Коновалов Д.Н. Применение инженерных моделей вязкоупругости в расчетах конструкций из высокоэластичных полимерных материалов при конечных деформациях // Упругость и неупругость. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 55-69.

27. Batdorf S.B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip: Technical Note №1871. NASA. April, 1949.

28. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1980. №3. С. 93-96.

29. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 908-922.

30. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Издательство АН СССР, 1963. 271 с.

31. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. №4. С. 99-105.

32. Bouckovalas G., Whitman R.V., Marr W.A. Permanent displacement of sand with cyclic loading // Journal of Geotechnical Engineering. 1984. Vol. 110. №11. Pp. 1606-1623.

**Сергей Павлович Помыткин, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: 946-52-79; эл.почта: sppom @yandex.ru

Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней

Д.т.н., профессор, В.В. Лалин*;
Д.ф.-м.н., профессор, Л.А. Розин;
аспирант Д.А. Кушова,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: большие перемещения и повороты; энергетически сопряженные усилия и деформации; функционал вариационной постановки; уравнения устойчивости

Традиционный подход в вариационной постановке задачи нелинейного деформирования стержней заключается в использовании вариационного уравнения в виде принципа возможных перемещений [1-17]. В настоящей работе на примере плоской задачи показывается, что с использованием энергетически сопряженных векторов усилий и деформаций [18] вариационную задачу можно сформулировать в виде задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. При этом появляется возможность двумя способами получить уравнения устойчивости: как уравнения в вариациях для исходной дифференциальной постановки и как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.

Постановка задачи

Рассматривается общая геометрически нелинейная теория упругих стержней, в которой учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения-сжатия, а на величины перемещений и поворотов не накладывается никаких ограничений. В плоской задаче каждая точка такого стержня обладает тремя степенями свободы – двумя поступательными и одной вращательной.

Выберем в качестве отсчетной ненапряженной конфигурации (ОК) первоначально прямолинейного стержня его расположение вдоль оси X правой декартовой системы координат X,Y,Z (рис. 1а) с ортами i, j, k соответственно. В ОК положение каждой точки стержня задается координатой x_0, $0 \le x_0 \le L$, где L – исходная длина стержня.

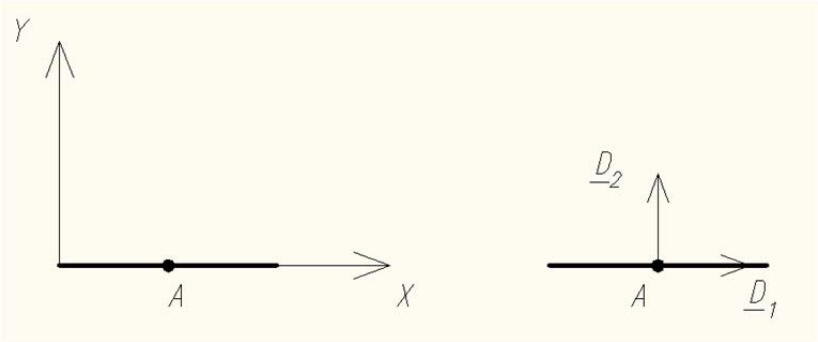

Рисунок 1а. Отсчетная ненапряженная конфигурация стержня (ОК)

Далее будет использоваться материальное (лагранжево) описание, в котором все характеристики напряженно-деформированного состояния зависят от переменной x_0, причем (…)' будет обозначать производную по x_0.

В теории Коссера – Тимошенко с каждой точкой стержня связан репер (правая ортонормированная тройка векторов), векторы которого в ОК обозначим D_i . Для первоначально прямолинейного без естественного закручивания стержня можно принять, что вектор D_1 направлен по оси стержня, векторы D_2, D_3 – по главным центральным осям инерции сечения (рис. 1а), причем $D_i = \text{const}\ (x_0)$, $D_1 = i$, $D_2 = j$.

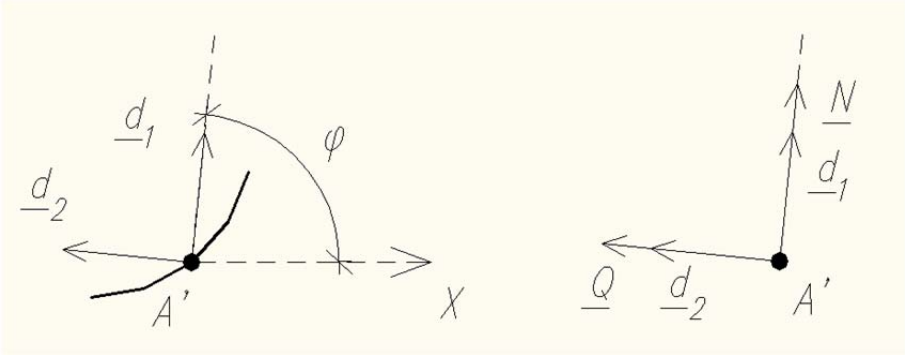

Рисунок 1б. Актуальная (деформированная) конфигурация стержня (АК)

На рис. 1б изображена актуальная (деформированная) конфигурация стержня (АК). Положение каждой точки стержня в АК задается вектором

$$r(x_0) = x\,(x_0)\,i + y\,(x_0)\,j.$$

Векторы репера в повернутом положении обозначены

$$d_i = d_i\,(x_0),$$

причем вектор d_1 не обязан совпадать с вектором t, единичным вектором, касательным к оси стержня в АК. В плоской задаче поворот репера определяется вектором

$$\Phi\,(x_0) = \varphi\,(x_0)\,k.$$

Функции x (x_0), y (x_0), φ (x_0) представляют собой три степени свободы в плоской задаче геометрически нелинейного деформирования стержня.

Истинные векторы усилий в АК в плоской задаче:

$$f(x_0) = N(x_0)\,d_1 + Q(x_0)\,d_2,\;\; M(x_0) = M(x_0)\,k,$$

соответствующие им векторы деформаций:

$$e(x_0) = r' - P\cdot r_0',\; \psi(x_0) = \varphi'\,k\,,$$

где N – продольная сила; Q – перерезывающая сила; M – изгибающий момент; $r_0 = x_0 i$ – радиус-вектор точек стержня в ОК; точкой обозначается скалярное произведение; $P(x_0)$ – тензор поворота, задающий поворот отсчетного репера D_i в актуальный репер d_i: $d_i = P \cdot D_i$; матричное представление тензора поворота в плоской задаче: $P=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$; обратный поворот из АК в ОК задается транспонированным тензором P^T.

В работе [18] показано, что при использовании отсчетного описания удобнее использовать повернутые из АК в ОК векторы усилий и деформаций: $F = P^T \cdot f$, $E = P^T \cdot e$ (повернутые векторы моментов и изгибных деформаций в плоской задаче совпадают с истинными). Повернутые векторы усилий и деформаций являются энергетически сопряженными в смысле следующего определения [18]:

$$\dot{W} = F\cdot\dot{E} + M\cdot\dot{\psi}\,,$$

где W=W(E, ψ) – линейная плотность энергии деформации упругого (в том числе и нелинейно-упругого) стержня, точкой сверху обозначена производная по времени.

Повернутые векторы усилий и деформаций в плоской задаче:

$$F(x_0) = N(x_0)\,i + Q(x_0)\,j\;,\;\; M(x_0) = M(x_0)\,k\,,$$

$$E(x_0) = \varepsilon\,i + \Gamma\,j\,,\; \psi(x_0) = \psi\,k = \varphi'\,k.$$

Выражения для компонент деформаций ε, Г через функции x (x_0), y (x_0), φ (x_0) приведены далее.

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически линейного стержня состоит из трех групп уравнений (1) – (3).

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} (N\cos\varphi - Q\sin\varphi)' + q_x = 0 \\ (N\sin\varphi + Q\cos\varphi)' + q_y = 0 \\ M' + x'(N\sin\varphi + Q\cos\varphi) + y'(Q\sin\varphi - N\cos\varphi) + m = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где q_x, q_y, m – распределенные силовые и моментная нагрузки соответственно.

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi - 1 \\ \Gamma = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ \psi = \varphi' \end{cases}. \quad (2)$$

Физические уравнения:

$$\begin{cases} N = k_1\varepsilon \\ Q = k_2\Gamma \\ M = k_3\psi \end{cases}, \quad (3)$$

где k_1 , k_2 , k_3 – жесткости стержня на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб соответственно.

Граничные условия:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ M(0) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} y(L) = 0 \\ M(L) = 0 \\ N(L) = -P \end{cases}. \quad (5)$$

Граничные условия (4) и (5) соответствуют схеме, приведенной на рис. 2.

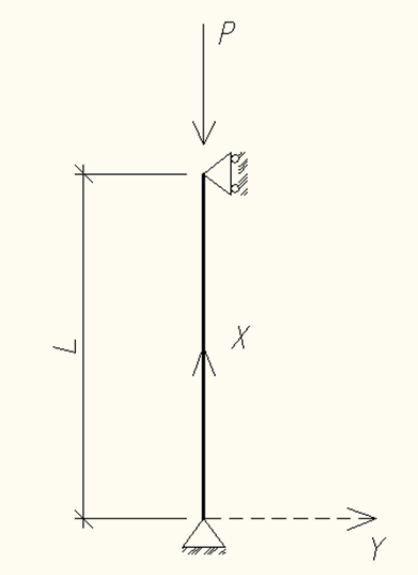

Рисунок 2. Расчетная схема стержня

Подразумеваем, что в уравнениях (4) – (5) внутренние усилия выражены через x, y, φ с помощью уравнений (2), (3).

Соответствующие (1) – (3) уравнения в вариациях [19]:

$$\begin{cases} (N\cos\overline{\varphi}-Q\sin\overline{\varphi})'-f'(\overline{N}\sin\overline{\varphi}+\overline{Q}\cos\overline{\varphi})+fq_y=0 \\ (N\sin\overline{\varphi}+Q\cos\overline{\varphi})'+f'(\overline{N}\cos\overline{\varphi}-\overline{Q}\sin\overline{\varphi})-fq_x=0 \\ M'+\overline{Q}\varepsilon-\overline{N}\Gamma+Q(\overline{\varepsilon}+1)-N\overline{\Gamma}=0 \\ \varepsilon=-\overline{x'}f\sin\overline{\varphi}+h_1'\cos\overline{\varphi}+\overline{y'}f\cos\overline{\varphi}+h_2'\sin\overline{\varphi} \\ \Gamma=-\overline{x'}f\cos\overline{\varphi}-h_1'\sin\overline{\varphi}-\overline{y'}f\sin\overline{\varphi}+h_2'\cos\overline{\varphi} \\ \psi=f' \\ N=k_1\varepsilon \\ Q=k_2\Gamma \\ M=k_3\psi \end{cases}. \quad (6)$$

Для получения уравнений (6) в исходных уравнениях (1) – (3) искомым функциям давалось приращение, зависящее от параметра α, и затем вычислялось значение производной по α в точке α=0.

В уравнениях (6) h_1, h_2, f – вариации координат x, y и угла поворота φ соответственно; N, Q, M, ε, Γ, ψ – соответствующие h_1, h_2, f вариации внутренних усилий и деформаций.

Величинами с чертой в формуле (6) и в дальнейшем обозначаются характеристики напряженно-деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1) – (5). То есть это характеристики того равновесного напряженно-деформированного состояния, устойчивость которого исследуется.

Вариационная формулировка статической задачи

Функционал Лагранжа:

$$\Pi(x,y,\varphi)=\int_0^L\left[\frac{1}{2}(k_1\varepsilon^2+k_2\Gamma^2+k_3\psi^2)-q_x(x-x_0)-q_y y-m\varphi\right]dx_0+ \\ +P(x(L)-L). \quad (7)$$

Первая вариация функционала:

$$\delta\Pi(x,y,\varphi,h_1,h_2,f)=\frac{d}{d\alpha}\Pi(x+\alpha h_1,y+\alpha h_2,\varphi+\alpha f)\Big|_{\alpha=0}= \\ =\int_o^L\{h_1'(N\cos\varphi-Q\sin\varphi)+h_2'(N\sin\varphi+Q\cos\varphi)+Mf'+f[N(y'\cos\varphi-x'\sin\varphi)- \\ -Q(x'\cos\varphi+y'\sin\varphi)]-q_xh_1-q_yh_2-mf\}dx_0+Ph_1(L) \quad (8)$$

Подразумеваем, что внутренние усилия M, Q, N выражены через x, y, φ с помощью уравнений (2), (3).

Решением вариационной задачи являются функции x, y, φ такие, что δП=0 при любых функциях h_1, h_2, f, удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи (1) – (5), то есть

$$\begin{cases} h_1(0)=0 \\ h_2(0)=h_2(L)=0 \end{cases}. \quad (9)$$

Интегрируя выражение (8) по частям и учитывая условия (9), можно показать, что уравнениями Эйлера вариационной задачи П→СТАЦ являются уравнения (1), в которых внутренние усилия выражены через x, y, φ.

Вариационная формулировка задачи устойчивости

Вторая вариация функционала:

$$\delta^2\Pi(\bar{x},\bar{y},\bar{\varphi},h_1,h_2,f)=\frac{d}{d\alpha}\delta\Pi(\bar{x}+\alpha h_1,\bar{y}+\alpha h_2,\bar{\varphi}+\alpha f)\Big|_{\alpha=0}. \quad (10)$$

Обозначим: $\delta^2\Pi\equiv\Phi\left(\bar{x},\bar{y},\bar{\varphi},h_1,h_2,f\right)$.

$$\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{\varphi},h_1,h_2,f)=\int_0^L\Big(N\varepsilon+Q\Gamma+\bar{N}f\Gamma+\bar{N}f(h_2'\cos\bar{\varphi}-h_1'\sin\bar{\varphi})+ \\ +\bar{Q}f(-h_2'\sin\bar{\varphi}-h_1'\cos\bar{\varphi})+\bar{Q}f\varepsilon+Mf'\Big)dx_0. \quad (11)$$

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи Ф→СТАЦ [19]. Найдем первую вариацию функционала Ф:

$$\delta\Phi=\frac{d}{d\alpha}\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{\varphi},h_1+\alpha d_1,h_2+\alpha d_2,f+\alpha g)\Big|_{\alpha=0}$$

$$\delta\Phi=\int_0^L\Big[k_1\varepsilon(d_1'\cos\bar{\varphi}+d_2'\sin\bar{\varphi}+g(\bar{y}'\cos\bar{\varphi}-\bar{x}'\sin\bar{\varphi})\Big]+N(d_1'\cos\bar{\varphi}+d_2'\sin\bar{\varphi}+ \\ +g(\bar{y}'\cos\bar{\varphi}-\bar{x}'\sin\bar{\varphi})+\Big[k_2\Gamma(d_2'\cos\bar{\varphi}-d_1'\sin\bar{\varphi}-g(\bar{y}'\sin\bar{\varphi}+\bar{x}'\cos\bar{\varphi})\Big]+ \\ +Q(d_2'\cos\bar{\varphi}-d_1'\sin\bar{\varphi}-g(\bar{y}'\sin\bar{\varphi}+\bar{x}'\cos\bar{\varphi})+\bar{N}g\Gamma+\bar{N}f[d_2'\cos\bar{\varphi}-d_1'\sin\bar{\varphi}- \\ -g(\bar{y}'\sin\bar{\varphi}+\bar{x}'\cos\bar{\varphi})]+\bar{N}g(h_2'\cos\bar{\varphi}-h_1'\sin\bar{\varphi})+\bar{N}f(d_2'\cos\bar{\varphi}-d_1'\sin\bar{\varphi})- \\ -\bar{Q}g(h_2'\sin\bar{\varphi}+h_1'\cos\bar{\varphi})-\bar{Q}f(d_1'\cos\bar{\varphi}+d_2'\sin\bar{\varphi})+\bar{Q}g\varepsilon+\bar{Q}f[d_1'\cos\bar{\varphi}+d_2'\sin\bar{\varphi}+ \\ +g(\bar{y}'\cos\bar{\varphi}-\bar{x}'\sin\bar{\varphi})]+k_3g'f'+Mg']dx_0 \quad (12)$$

После интегрирования по частям:

$$\delta\Phi=-\int_o^L\Big\{\Big[(N\cos\bar{\varphi}-Q\sin\bar{\varphi})'-f'(\bar{N}\sin\bar{\varphi}+\bar{Q}\cos\bar{\varphi})-f(\bar{N}\sin\bar{\varphi}+\bar{Q}\cos\bar{\varphi})'\Big]d_1+ \\ +\Big[\left(N\sin\bar{\varphi}+Q\cos\bar{\varphi}\right)'+f'(\bar{N}\cos\bar{\varphi}-\bar{Q}\sin\bar{\varphi})+f(\bar{N}\cos\bar{\varphi}-\bar{Q}\sin\bar{\varphi})'\Big]d_2+\Big[M'+\bar{Q}\varepsilon- \\ -\bar{N}\Gamma+Q(\bar{\varepsilon}+1)-\bar{N}\Gamma\Big]g\Big\}dx_0+[(N\cos\bar{\varphi}-Q\sin\bar{\varphi}-\bar{N}f\sin\bar{\varphi}-\bar{Q}f\cos\bar{\varphi})d_1+\Big(N\sin\bar{\varphi}+ \\ +Q\cos\bar{\varphi}+\bar{N}f\cos\bar{\varphi}-\bar{Q}f\sin\bar{\varphi}\Big)d_2+Mg]\Big|_0^L \quad (13)$$

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия δФ=0 при любых функциях d_1, d_2, g, которые удовлетворяют главным граничным условиям исходной задачи (1) – (5), являются следующие:

$$\begin{cases}(N\cos\bar{\varphi}-Q\sin\bar{\varphi})'-f'(\bar{N}\sin\bar{\varphi}+\bar{Q}\cos\bar{\varphi})-f(\bar{N}\sin\bar{\varphi}+\bar{Q}\cos\bar{\varphi})'=0\\ (N\sin\bar{\varphi}+Q\cos\bar{\varphi})'+f'(\bar{N}\cos\bar{\varphi}-\bar{Q}\sin\bar{\varphi})+f(\bar{N}\cos\bar{\varphi}-\bar{Q}\sin\bar{\varphi})'=0\\ M'+\bar{Q}\varepsilon-\bar{N}\Gamma+Q(\bar{\varepsilon}+1)-\bar{N}\Gamma=0\end{cases} \quad (14)$$

Учитывая, что величины с чертой удовлетворяют уравнениям (1), уравнения (14) можно привести к виду (6). То есть уравнения в вариациях для исходной нелинейной системы уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для вариационной задачи Ф→СТАЦ, где Ф – вторая вариация функционала Лагранжа (7) [19].

Таким образом, уравнения (6) или (14) являются точными уравнениями задачи устойчивости равновесия стержня для плоской задачи.

Подчеркнем, что полученная система уравнений устойчивости (6) является точной. При ее выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня.

Пример решения задачи устойчивости равновесия

Рассмотрим в качестве примера стержень, представленный на рис. 2.

Исходная равновесная конфигурация – прямолинейная, действует только сжимающая сила.

В обозначении известных нам величин заменим черту на индекс 0, лагранжеву координату будем обозначать x.

Для данного примера:

$$M_0 = 0, Q_0 = 0, \varphi_0 = 0, \Gamma_0 = 0, q_y = 0, y_0 = 0, q_x = 0.$$

$$N_0 = -P, \quad \varepsilon_0 = x_0{}' - 1 = \frac{N_0}{k_1}.$$

$$\cos\varphi_0 = 1, \quad \sin\varphi_0 = 0.$$

Таким образом, уравнения устойчивости (6) запишутся в виде:

$$\begin{cases} N' = 0 \\ -Pf' + Q' = 0 \\ M' + Q(\frac{-P}{k_1} + 1) + P(-x_0' f + h_2') = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = h_1' \\ \Gamma = -x_0' f + h_2' \\ \psi = f' \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} N = k_1 h_1' \\ Q = k_2(-x_0' f + h_2') \\ M = k_3 f' \end{cases}$$

Для удобства применим стандартные обозначения для вариаций:

$$h_1 = u, \ h_2 = v, \ f = \theta.$$

Тогда, для однородного стержня, жесткости которого не зависят от x, получим

$$\begin{cases} k_1 u_1'' = 0 \\ -P\theta' + k_2\left[v' - \left(\frac{-P}{k_1} + 1\right)\theta\right]' = 0 \\ k_3\theta'' + k_2\left[v' - \left(\frac{-P}{k_1} + 1\right)\theta\right]\left(\frac{-P}{k_1} + 1\right) + P\left(-\left(\frac{-P}{k_1} + 1\right)\theta + v'\right) = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

В полученной системе (16) первое уравнение описывает продольные деформации и не зависит от второго и третьего уравнений. Следовательно, устойчивость проверяется только из второго и третьего уравнений.

Из третьего уравнения (16):

$$\left(v' - \left(\frac{-P}{k_1} + 1\right)\theta\right) = \frac{k_3\theta''}{-\left[k_2\left(\frac{-P}{k_1} + 1\right) + P\right]}.$$

После подстановки во второе уравнение получим:

$$\theta''' + \lambda^2\theta' = 0, \tag{17}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{P\left[k_2\left(\frac{-P}{k_1} + 1\right) + P\right]}{k_2 k_3}. \tag{18}$$

Решение уравнения (17) имеет вид:

$$\theta(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x + c_3.$$

Подставив данное решение в уравнение, полученное из третьего уравнения (16), и проинтегрировав его, получим:

$$v(x) = \frac{k_3(-c_2\lambda\sin\lambda x)}{-P - k_2\left(1 - \frac{P}{k_1}\right)} + \left(\frac{c_2}{\lambda}\sin\lambda x + c_3 x\right)\left(1 - \frac{P}{k_1}\right) - c_4.$$

Определим произвольные постоянные, используя граничные условия

$$\begin{aligned} &v(0) = v(L) = 0 \\ &T.к.\, M = k_3\theta', \quad M(0) = M(L) = 0, \;\; то\; \theta'(0) = \theta'(L) = 0 \end{aligned}. \tag{19}$$

Используя условия (19), получим:

$$\begin{aligned} &c_1 = 0 \\ &c_3 = 0 \\ &c_4 = 0 \\ &\theta(x) = c_2\cos\lambda x \\ &\theta'(L) = -c_2\lambda\sin\lambda L = 0 \end{aligned}.$$

Рассматриваем решение уравнения sinλL=0:

$\lambda L = \pi n$, где n=1,2,3….

Подставим значение λ в выражение (18):

$$\frac{P\left[k_2\left(\frac{-P}{k_1} + 1\right) + P\right]}{k_2 k_3} = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}.$$

Отсюда получим единственное положительное значение P:

$$P = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)\left(\frac{n^2\pi^2 k_2 k_3}{L^2}\right)}}{2\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)}. \tag{20}$$

Критическое (наименьшее) значение силы P достигается при n=1.

$$P = \frac{k_2}{2}\frac{\sqrt{1+\frac{4P_э}{k_2}\left(1-\frac{1}{k_1}\right)}-1}{\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)}. \qquad (21)$$

где $P_э$ – сила Эйлера [20], равная $P_э = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$.

Решение (21) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб. Далее рассмотрим частные случаи.

Рассмотрим случай большой жесткости на растяжение-сжатие:

$$\frac{1}{k_1} = 0.$$

Тогда

$$P = \frac{k_2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4P_э}{k_2}}-1\right). \qquad (22)$$

Решение (22) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на сдвиг и изгиб.

Рассмотрим случай большой жесткости на сдвиг: $\frac{1}{k_2} \to 0.$

Раскладывая подкоренное выражение из формулы (22) в ряд и учитывая слагаемые первого и второго порядка малости, получим:

$$P = \frac{k_2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4P_э}{k_2}}-1\right) = \frac{k_2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{4P_э}{k_2}-\frac{1}{4\cdot 2!}\left(\frac{4P_э}{k_2}\right)^2-1\right) = P_э\left(1-\frac{P_э}{k_2}\right).$$

Окончательно,

$$P = P_э\left(1-\frac{P_э}{k_2}\right). \qquad (23)$$

Решение (23) с точностью до малых второго порядка совпадает с известным приближенным решением Энгессера [20]:

$$P = \frac{P_э}{1+\frac{P_э}{k_2}}. \qquad (24)$$

Раскладывая подкоренное выражение из формулы (22) в ряд и учитывая слагаемые только первого порядка малости, получим:

$$P = \frac{k_2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4P_э}{k_2}}-1\right) = \frac{k_2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{4P_э}{k_2}-1\right) = P_э. \qquad (25)$$

Таким образом, если $\frac{1}{k_1} = 0$ и $\frac{1}{k_2} = 0,$ то из решения (21), согласно формуле (25), получим классическое решение Эйлера.

Чтобы оценить погрешность формулы Энгессера (24), выразим (22) и (24) в безразмерных коэффициентах $\frac{P_э}{k_2}$ и построим графики для обеих формул. В качестве примера (рисунок 3) приведены графики для стойки длиной 3м, выполненной из колонного двутавра 20К1 (высота двутавра h = 195 мм, ширина полки в = 200 мм, площадь сечения A = 52.820 см^2, минимальный момент инерции J_z = 1334 см^4 , жесткость на сдвиг k_2 = 507.072·10^6 Н, сила Эйлера $P_э$ = 3.067 · 10^6 Н). Вертикальная линия соответствует пятипроцентной разнице между точным значением (22) и значением, полученным по формуле Энгессера (24). Значения, расположенные левее линии, соответствуют разнице менее 5%, расположенные правее, соответственно, более. Таким образом, можно сделать вывод, что формула Энгессера дает заниженное значение критической нагрузки, что наглядно отображено на графике.

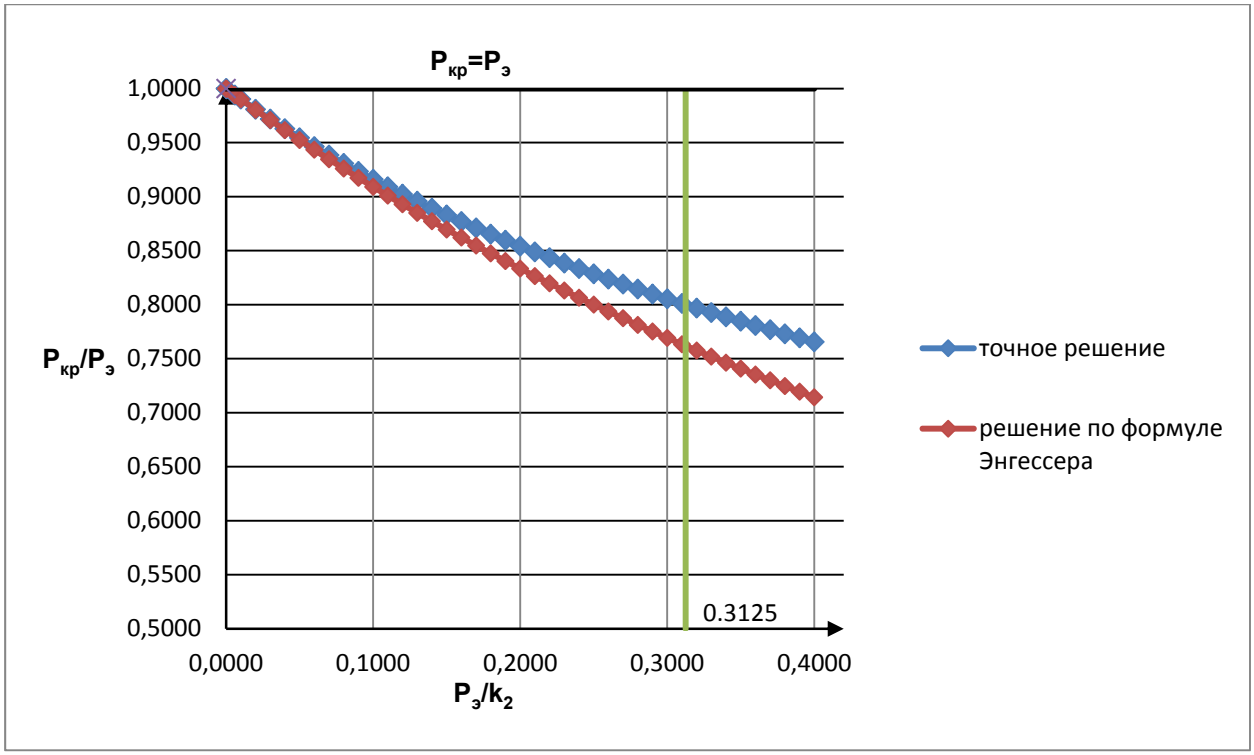

Рисунок 3. Влияние жесткости на сдвиг на величину критической нагрузки для точного решения и для решения по формуле Энгессера

Выводы

1. С использованием энергетически сопряженных векторов внутренних усилий и деформаций приведена постановка статических задач геометрически нелинейного деформирования плоских упругих стержней в виде системы дифференциальных уравнений.

2. Приведено выражение для функционала типа Лагранжа вариационной постановки статических задач геометрически нелинейного деформирования плоских стержней.

3. Для гладких решений доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задач.

4. Двумя способами получены уравнения плоских задач устойчивости равновесия: как уравнения в вариациях для исходной системы дифференциальных уравнений и как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.

5. Для шарнирно опертого стержня получено точное решение задачи устойчивости равновесия с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие.

6. Проведено исследование погрешности известной формулы Энгессера, позволяющей приближенно учесть влияние сдвиговой жесткости на величину критической силы. Показано, что формула Энгессера дает заниженное значение критической силы по сравнению с точным решением.

Литература

1. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНИТИ. №1912-В87. 20 с.
2. Елиссеев В.В. Механика упругих стержней. СПб.: СПбГПУ, 1994. 88 с.
3. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления // Труды СПбГТУ. 1994. №448. С. 47-56.
4. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Труды XXIV летней школы «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем». СПб., 1997. С. 313 – 337.
5. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. СПб.: СПбГПУ, 2007. 102 с.
6. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. СПб.: СПбГПУ, 2008. 96 с.
7. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79-116.
8. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38. Issue 9. Pp. 1431-1473.
9. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for static and dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 171. №1-2. Pp. 141-171.
10. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory // ASME Journal of Mechanical Design. 2001. Vol.123. №4. Pp. 606–613.
11. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford: Oxford University Press, 2004. 482 p.
12. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2005. 835 p.
13. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dynamics. 2006. Vol. 45. №1-2. Pp. 109-130.
14. Shabana A.A. Computational continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 349 p.
15. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Berlin– Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 566 p.
16. Krenk S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 361 p.
17. Ibrahimbegovic A. Nonlinear Solid Mechanics. Berlin: Springer, 2009. 596 p.
18. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Труды СПбГПУ. 2004. №489. С. 121-128.
19. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС, 2004. 160 с.
20. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1. М.: СКАД СОФТ, 2010. 704 с.

** Владимир Владимирович Лалин, Санкт-Петербург, Россия*
Тел. раб.: +7 (812) 552-60-87; эл. почта: smitu@cef.spbstu.ru

Влияние ширины пояса и параметров стенки на эффективность стального тонкостенного холодногнутого профиля Сигма-образного сечения при работе на изгиб

К.т.н., доцент А.А. Кикоть*;
студент В.В. Григорьев,
ФГБОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова

Ключевые слова: стальной тонкостенный холодногнутый профиль; Сигма-образное сечение; изгиб; эффективность; CFSteel

В последние годы в России наблюдается устойчивый рост сегмента строительства с применением тонкостенных холодногнутых профилей из оцинкованной стали [1,2].

Для расчетов таких элементов применяются два принципиальных подхода. В одном из них тонкостенные профили представляются как оболочки, и дальнейший расчет производится с помощью метода конечных элементов (МКЭ), где моделирование выполняется обычно пластинчатыми конечными элементами (КЭ) [3,4]. Во втором подходе элементы из холодногнутых профилей рассматриваются как стержни, и из-за трудностей аналитического решения дифференциальных уравнений равновесия применяются те или иные численные методы, описанные, например, в работе [5], или МКЭ со стержневыми конечными элементами без учета или с учетом деформаций кручения [6,7,8].

Исследованиям рамных несущих конструкций стальных тонкостенных холодногнутых профилей из оцинкованной стали посвящены работы [9,10,11]. Фермы из таких профилей рассмотрены в [12,13].

Конструкции на основе холодногнутых тонкостенных профилей с успехом применяются и в качестве изгибаемых элементов при умеренных и средних значениях пролетов и нагрузок. Это прогоны, балки покрытий и перекрытий. Работа таких конструкций рассматривалась в исследованиях [14,15,16,17].

В качестве изгибаемых элементов могут применяться профили С-образного, Z-образного, Сигма-образного сечения (рисунок 1). Одной из особенностей холодногнутых профилей, исходящей из способа их производства, а это чаще всего непрерывное холодное формование, является возможное многообразие соотношения размеров элементов сечения в пределах одной формы и даже одной высоты профиля. Вероятно, существует такая комбинация размеров, при которой профиль в данной проектной ситуации (характеризующейся конкретным сочетанием внутренних усилий) будет наиболее эффективен. Вопросы эффективности С- и Z-образного профилей в условиях изгиба рассмотрены в [18].

Целью настоящей работы является определение влияния параметров сечения – ширины пояса и размера части стенки, примыкающей к поясу – на эффективность работы изгибаемого элемента из двух спаренных Сигма-профилей (рисунок 1 д). Такое сечение имеет две оси симметрии, что в большинстве случаев исключает кручение, которое в дальнейшем не учитывается.

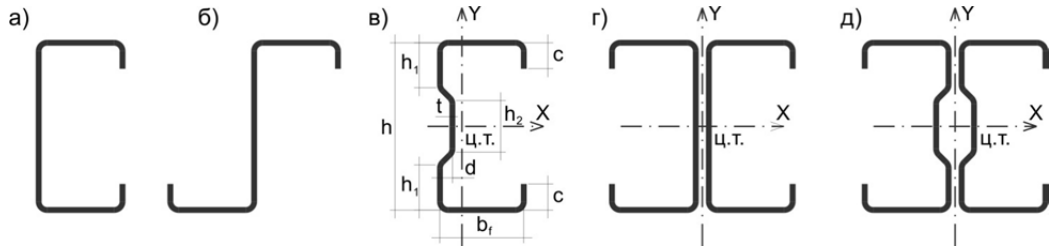

Рисунок 1. Сечения профилей: а) С-образное; б) Z-образное; в) Сигма-образное; г) из двух С-профилей; д) из двух Сигма-профилей

Довольно часто непосредственно на такие конструкции опирается стальной профилированный настил с соответствующим креплением через его нижние полки к верхнему поясу балки. Поэтому в дальнейшем будем считать, что общая устойчивость конструкции обеспечена.

За критерий эффективности профиля при работе на изгиб принято отношение максимального изгибающего момента, который способно воспринять сечение одного Сигма-профиля в упругой стадии работы стали, к его площади, характеризующей расход материала,

$$M_{xmax} / A, \text{ где } M_{xmax} = W_x \sigma_y. \quad (1)$$

Варьируются следующие параметры сечения: ширина пояса b_f в интервале от 40 до 120 мм; высота верхней части стенки h_1 от 20 до $h - 2(h_1+d)$; ширина отгиба принята постоянной, равной $0{,}3b_f$ [1,18]. Расчеты выполнены для трех фиксированных высот профиля: h =150, 250 и 350 мм, и трех значений предела текучести стали: σ_y = 250, 350 и 450 МПа.

Момент сопротивления сечения в (1) определяется в зависимости от того, обеспечены ли местная устойчивость элементов сечения (стенка, пояс, отгиб) и устойчивость формы сечения [19,20] при напряжениях в сжатом поясе, равных пределу текучести. Если устойчивость обеспечена, то в расчет принимается момент сопротивления полного сечения Сигма-образного профиля. Если устойчивость хотя бы одного (или более) из перечисленных видов не обеспечена, то в расчет принимается редуцированный момент сопротивления эффективного сечения W_{xeff}.

Параметры эффективного сечения определяются по Eurocode 3 [20,21], где учитывается явление потери устойчивости пластин, составляющих сечение. С этой целью пластины в зависимости от уровня и градиента сжимающих нормальных напряжений, а также граничных условий по продольным граням, в соответствии с концепцией «эффективной ширины», предложенной фон Карманом [22], разбиваются на эффективные и неэффективные участки. Первые участки моделируют части сечения, которые после потери устойчивости соответствующей пластины остались устойчивы, и они включаются в состав эффективного сечения. Вторые участки моделируют выпучившиеся части пластин и не включаются в состав эффективного сечения.

Возможность потери устойчивости формы сечения учитывается в [20] путем редуцирования толщины условного ребра жесткости, в состав которого включается эффективная часть сжатого пояса, примыкающая к отгибу, и эффективная часть самого отгиба. И рассматривается устойчивость стержня на упругом основании с таким сечением.

Все вычисления выполнены с помощью модифицированного варианта программы расчета элементов из стальных тонкостенных холодногнутых профилей CFSteel [23], в которой для определения редуцированных геометрических характеристик эффективных сечений реализована методика Eurocode 3.

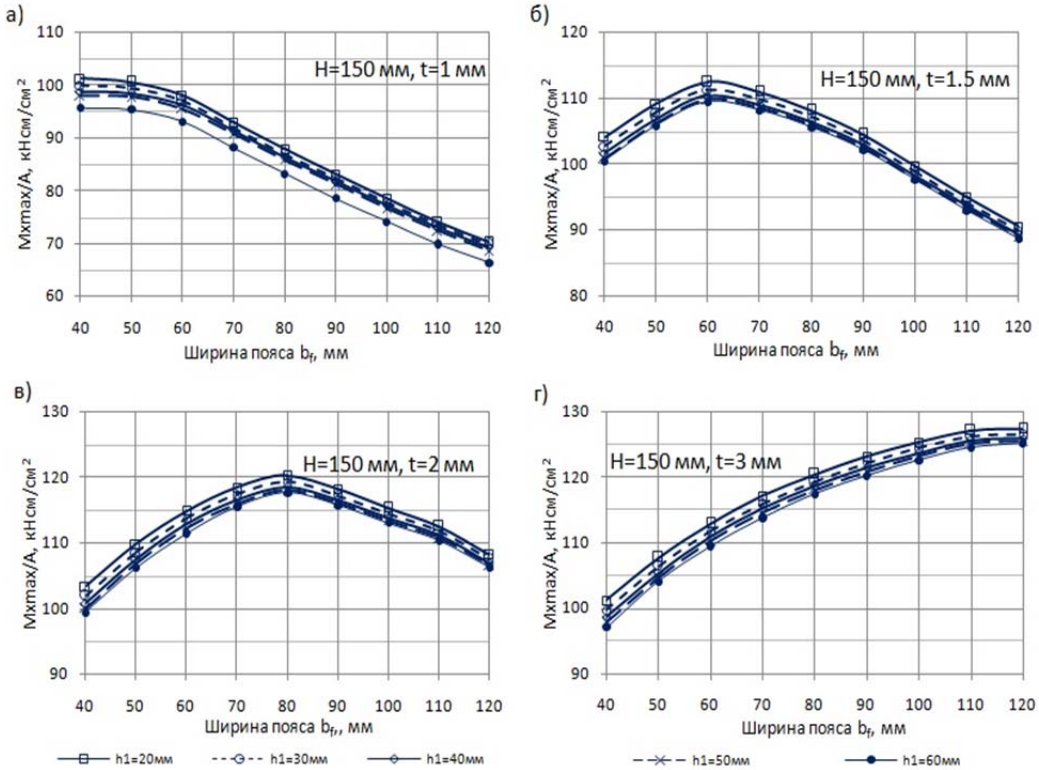

Рисунок 2. Зависимости эффективности профиля от ширины пояса для h = 150 мм и σ_y = 250 МПа

На рисунке 2 представлены зависимости эффективности профиля M_{xmax} / A от ширины пояса b_f для фиксированной высоты профиля h = 150 мм и стали с σ_y = 250 МПа. При толщине t = 1 мм максимум достигается при малых ширинах b_f = 40…50 мм. При больших ширинах увеличивается неэффективная часть пояса. Если при b_f = 40 мм пояс полностью эффективен (т.е. не теряет местную устойчивость), то при b_f = 120 мм ширина неэффективной части составляет уже 59 мм. При увеличении толщины стали неэффективная часть пояса уменьшается, а оптимальные значения b_f увеличиваются до b_f = 60 мм при t = 1,5 мм, b_f = 80 мм при t = 2 мм. При толщине t = 3 мм сечение полностью эффективно и максимальные значения эффективности лежат за пределами рассматриваемых ширин поясов.

С увеличением высоты профиля до h = 250 мм (рисунок 3) максимальные значения эффективности повышаются приблизительно на 30% при t = 1 мм, на 40% при t = 1,5 мм и на 50% при t = 2 мм. При этом оптимальные ширины поясов смещаются в сторону увеличения примерно на 5…10 мм, а ширины неэффективных частей поясов остаются в целом такими же.

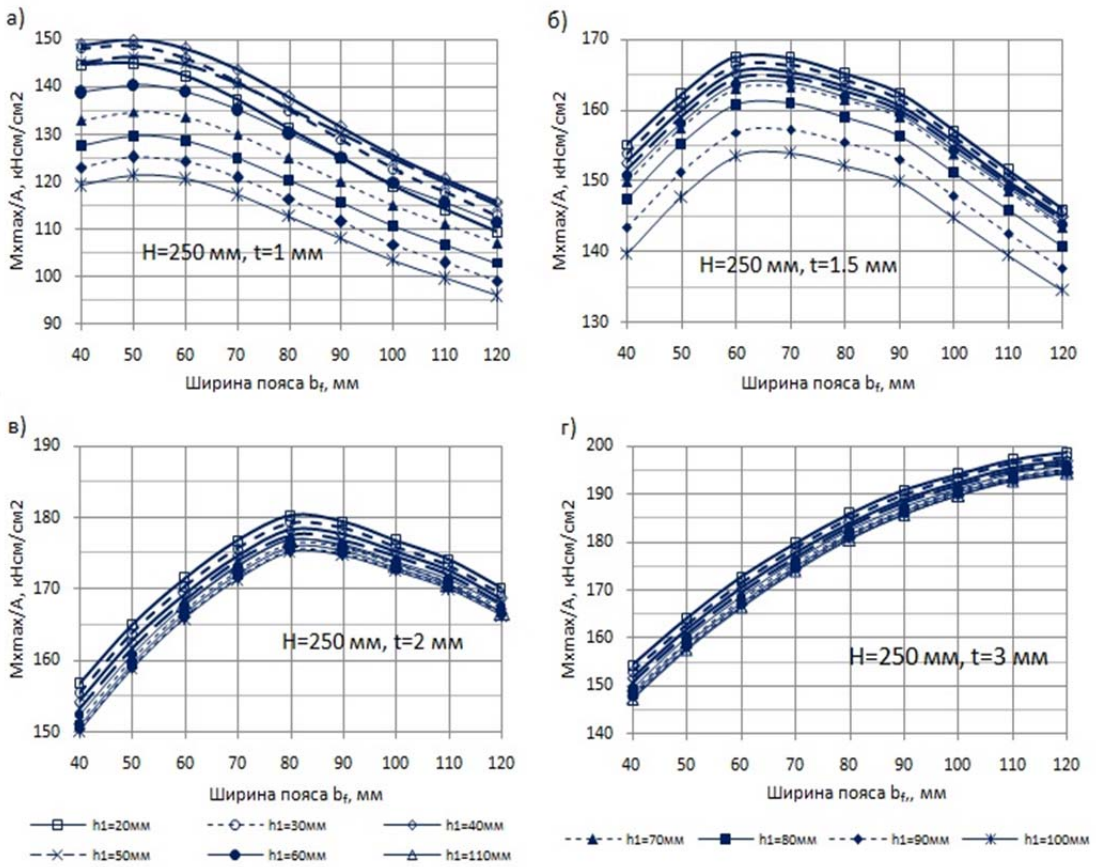

Рисунок 3. Зависимости эффективности профиля от ширины пояса для h = 250 мм и σ_y = 250 МПа

Увеличение высоты профиля до h = 350 мм (рисунок 4) сопровождается теми же тенденциями. Происходит дальнейшее увеличение эффективности, но в меньшей степени (на 20..25%), а соответствующие ширины поясов b_f увеличиваются еще на 5…10 мм.

При повышении прочности стали σ_y до 350 и 450 МПа характер зависимости эффективности от ширины пояса не изменяется. Но максимальные значения M_{xmax} / A сдвигаются в сторону меньших b_f приблизительно на 10 мм (при каждом повышении σ_y) при всех высотах. Это объясняется относительно ранней потерей устойчивости пояса и большей шириной той его части, которая выключается из работы.

В таблице 1 приведены значения наиболее эффективных $b_{f\,эф}$ и относительных эффективных $b_{f\,эф} / h$ ширин поясов для разных сталей, высот сечений и толщин. Из таблицы следует, что на величину $b_{f\,эф}$ оказывают влияние все три параметра. Но в наибольшей степени $b_{f\,эф}$ зависит от толщины стали. Увеличение толщины с 1,5 мм до 3 мм приводит к увеличению $b_{f\,эф}$ в 1,7..1,85 раза.

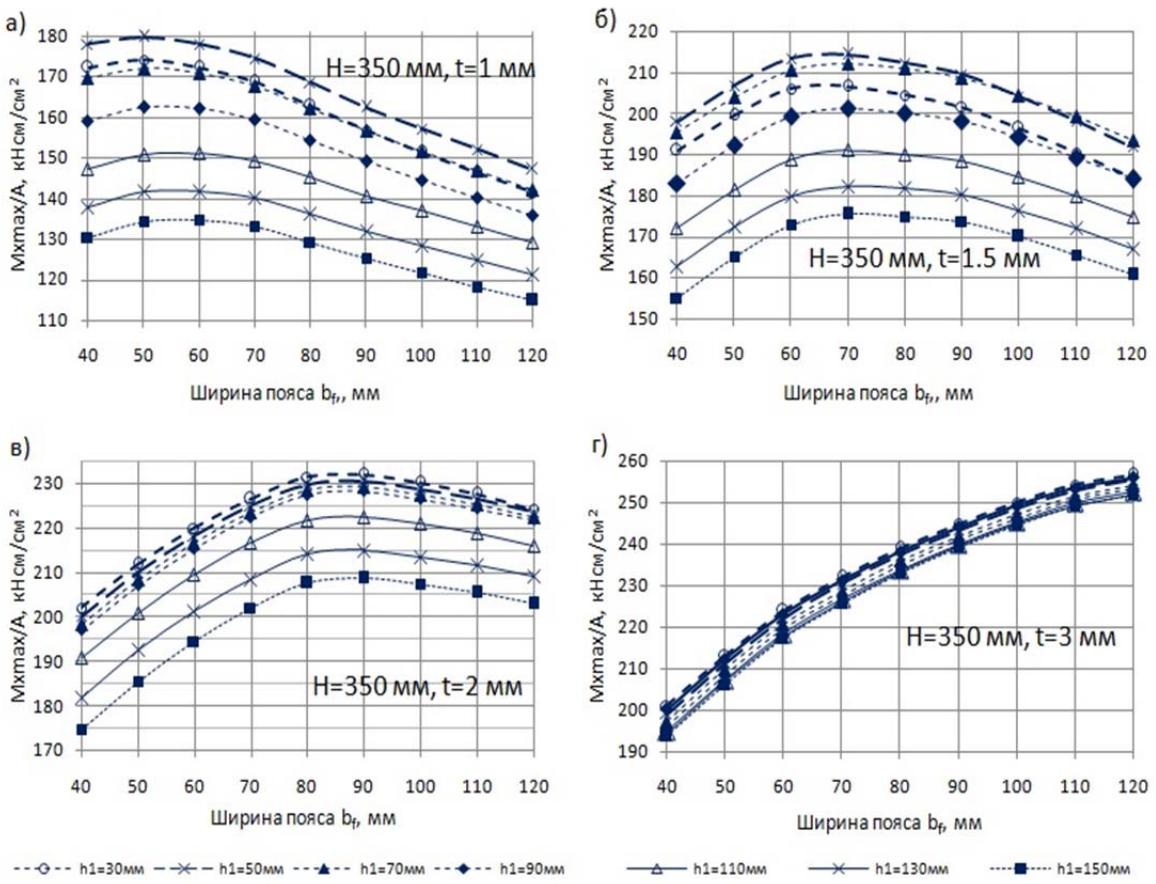

Рисунок 4. Зависимости эффективности профиля от ширины пояса для h = 350 мм и σ_y = 250 МПа

Таблица 1. Значения наиболее эффективных ширин поясов

σ_y, МПа	h, мм	$b_{f\,эф}$ ($b_{f\,эф}/h$) при t, мм			
		1,0	1,5	2,0	3,0
250	150	42 (0,28)	61 (0,41)	80 (0,53)	-
	250	52 (0,21)	66 (0,26)	83 (0,33)	-
	350	56 (0,16)	71 (0,20)	90 (0,26)	-
350	150	40 (0,27)	54 (0,36)	70 (0,47)	100 (0,67)
	250	48 (0,19)	60 (0,24)	73 (0,29)	104 (0,42)
	350	50 (0,14)	66 (0,19)	80 (0,23)	108 (0,31)
450	150	-	50 (0,33)	62 (0,41)	90 (0,60)
	250	40 (0,16)	54(0,22)	67 (0,27)	93 (0,37)
	350	50 (0,14)	59 (0,17)	74 (0,21)	98 (0,28)
Примечание: Приведены данные для h_1 = 50 мм					

На рисунке 5 показано, как влияет изменение высоты части стенки, примыкающей к поясу h_1, на эффективность профиля для высоты h = 250 мм и σ_y = 250 МПа. При t = 1 мм наблюдается выраженный максимум эффективности при высоте верхней части стенки h_1 = 40 мм (рисунок 5а). Это объясняется тем, что при меньших высотах теряет устойчивость средняя часть стенки h_2, а при больших высотах верхней части стенки h_1 эта часть стенки уже сама теряет устойчивость и выключается из работы. При t = 1,5 мм средняя часть стенки h_2 устойчива на всем интервале варьирования, а при $h_1 \geq 80$ мм теряет устойчивость крайняя часть и эффективность умеренно падает (рисунок 5 б). При толщинах t = 2 и 3 мм вся стенка устойчива и варьирование высоты h_1 не влияет на значение эффективности (рисунок 5в, 5г).

При высоте h = 150 мм стенка полностью эффективна (т.е. не теряет устойчивость) при всех толщинах, и варьирование высоты ее верхней части не влияет на эффективность профиля.

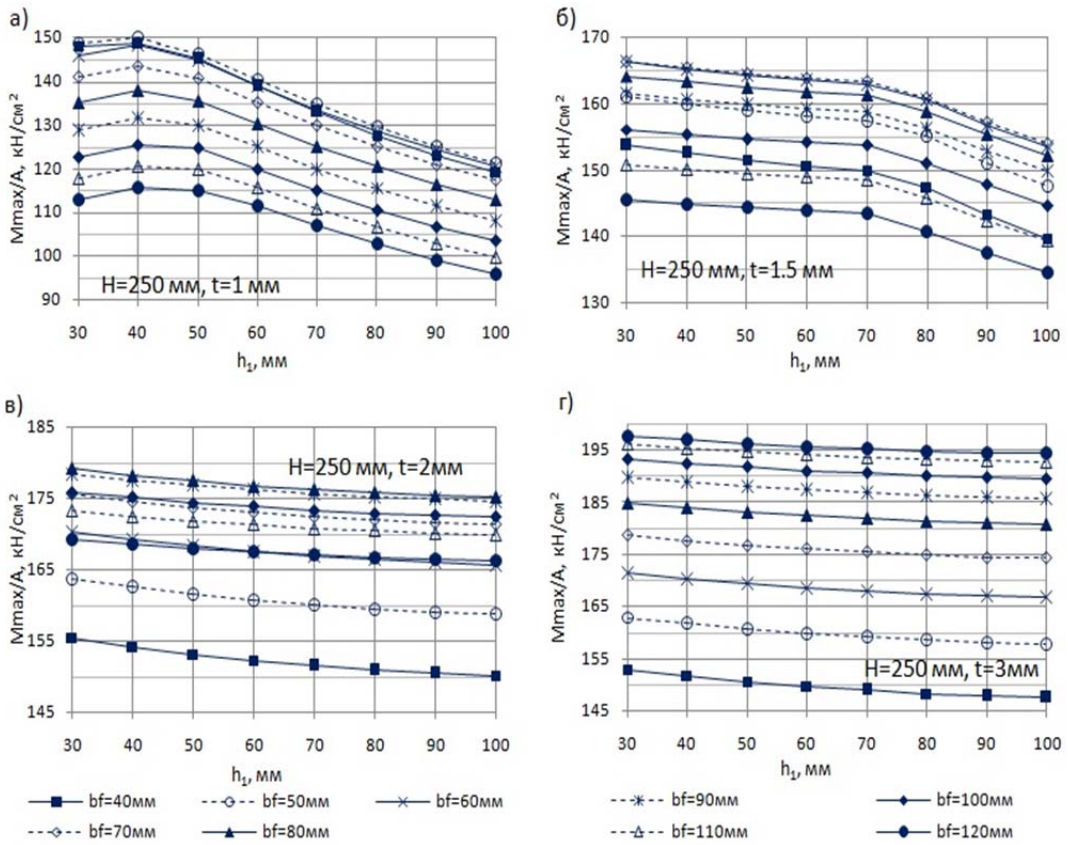

Рисунок 5. Зависимости эффективности профиля от высоты верхней части стенки для h = 250 мм и σ_y = 250 МПа

Для высоты h = 350 мм находят свое дальнейшее развитие тенденции, характерные для h = 250 мм. При t = 1 и 1,5 мм имеют место выраженные экстремумы при h_1 = 40…50 мм и h_1 = 50…60 мм соответственно. При t = 2 мм и h_1 ≥110 мм теряет устойчивость часть стенки h_1, а при t = 3 мм все части стенки сохраняют устойчивость, и варьирование высотой h_1 практически не влияет на эффективность профиля.

Характер влияния размера верхней части стенки h_1 на эффективность сохраняется при повышении прочности стали. В низких профилях (h = 150 мм и t = 1 мм) рассматриваемая часть рано теряет устойчивость и, как следствие, при меньших значениях h_1 эффективность начинает снижаться (при σ_y = 350 – после 40 мм; при σ_y = 450 МПа – после 30 мм). При толщинах 1,5…3 мм (h = 150 мм) стенка не теряет устойчивость, и размер h_1 не влияет на эффективность профиля.

При высоте h = 250 мм и t = 1,5 мм (σ_y = 350 и 450 МПа) наблюдается размытый максимум при h_1 ≈ 30…50 мм; при h = 350 мм (σ_y = 350 и 450 МПа) – выраженный максимум при h_1 = 50…60 мм.

При толщине t = 2 мм и h = 250 мм профили эффективны: при σ_y = 350 МПа – до 90 мм; при σ_y = 450 МПа – до 70 мм. Для той же толщины и h = 350 мм профили эффективны при h_1 ≈ 40…80 мм (σ_y = 350 МПа) и h_1 ≈ 50…70 мм (σ_y = 450 МПа).

При толщине t = 3 мм стенка устойчива в широких диапазонах h_1 и, следовательно, изменение этого параметра не оказывает существенного влияния на эффективность профиля.

Таким образом, в результате исследований, выполненных на основе концепции «эффективной ширины» при работе на изгиб и отсутствии кручения, можно сделать следующие выводы. Изменение ширины пояса существенно влияет на эффективность Сигма-профиля во всем диапазоне высот сечения и прочности стали. Величина эффективной ширины пояса зависит от высоты профиля, прочности и толщины стали. Наибольшее влияние оказывает толщина стали. При t = 1,5 мм наиболее эффективны ширины поясов 55…65 мм; при t = 2 мм – 65…80 мм; при t = 3 мм – 95…105 мм. Высота части стенки, примыкающей к поясу, в профилях с h ≤ 180 мм во всем диапазоне прочности сталей и рассмотренных толщин не оказывает влияния на эффективность работы на изгиб. Для сталей с σ_y = 350 и 450 МПа, начиная с высоты профиля h ≈ 180…190 мм и выше, при t = 1,5…2 мм наиболее эффективными являются значения h_1 ≈ 50..70 мм.

Литература

1. Айрумян Э.Л. Особенности расчёта стальных конструкций из тонкостенных гнутых профилей // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2008. №3. С. 2-7.
2. Жмарин Е.Н. Международная ассоциация лёгкого стального строительства // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2012. №2. С. 27-30.
3. Смазнов Д.Н. Устойчивости при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3. С. 42-49.
4. Гордеева А.О., Ватин Н.И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3. С. 36-46.
5. Астахов И.В. Пространственная устойчивость элементов конструкций из холодногнутых профилей: автореф. дис. канд. техн. наук. СПб., 2006. 24 с.
6. Ватин Н.И., Рыбаков В.А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы // Стройпрофиль. 2007. №2. С. 60.
7. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчёта тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1. С. 53-73.
8. Туснин А.Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля: автореф. дис. докт. техн. наук. М., 2004. 37 с.
9. Айрумян Э.Л., Каменщиков С.И. Рамные конструкции стального каркаса из оцинкованных гнутых профилей для одноэтажных зданий различного назначения // Мир строительства и недвижимости. 2006. №36. С. 9 -11.
10. Енджиевский Л.В., Тарасов А.В. Численные и экспериментальные исследования рамы каркаса здания из тонколистовой оцинкованной стали // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №10. С. 52-54.
11. Зверев В.В., Жидков К.Е., Семенов А.С., Сотникова И.В. Экспериментальные исследования рамных конструкций из холодногнутых профилей повышенной жесткости // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. 2011. №4. С.20-24.
12. Айрумян Э.Л., Белый Г.И. Исследования работы стальной фермы из холодногнутых профилей с учётом их местной и общей устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №5. С. 41-44.
13. Семенов А.С. Ферма из холодногнутых профилей повышенной жёсткости с болтовыми соединениями: автореф. дис. канд. техн. наук. Воронеж, 2009. 21 с.
14. Cheng Y., Schafer B.W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method // Journal of Constructional Steel Research. 2007. Vol. 63. Issue 5. Pp. 581-590.
15. Schafer B.W., Pekoz T. Laterally Braced Cold-Formed Steel Flexural Members with Edge Stiffened Flange // Journal of Structural Engineering. 1999. №125(2). Pp. 118-127.
16. Yu C., Schafer B.W. Analysis and Testing of Cold-Formed Steel Beams // Advances in Structures: Steel, Concrete, Composite and Aluminium – ASSCCA'03/ - 2003, Sydney. Pp. 123-129.
17. Yu C., Schafer B.W. Local buckling tests on Cold-Formed Steel Beams // Journal of Structural Engineering. 2003. №139(12). Pp. 1596-1606.
18. Кикоть А.А. Влияние ширины поясов и отгибов в сечениях С- и Z-образных стальных тонкостенных холодногнутых профилей на эффективность работы в условиях изгиба // Ползуновский вестник. 2011. №1. С. 70-75.
19. Adany S. Buckling mode classification of members with open thin-walled cross-section by using Finite Strip Method. Research Report / Johns Hopkins University. 2004. 99 p.
20. EN 1993-1-3: 2004 Eurocode 3. Design of steel structures. Part 1-3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. CEN, Brussels, 2004. 125 p.
21. EN 1993-1-5: 2003 Eurocode 3. Design of steel structures. Part 1-5: Plated structural elements / European Committee for Standardization. CEN, Brussels, 2003. 53 p.
22. Karman Th., Sechler E.E., Donnel L.H. Strength of thin plates in compression // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1932. Vol. 54. Pp. 53-57.
23. CFSteel. Руководство пользователя [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://www.cfsteel.ru (дата обращения: 20.11.2012).

** Андрей Александрович Кикоть, Барнаул, Россия*
Тел. раб.: +7 (3852) 25-18-76; эл. почта: deltaing@mail.ru

Разработка и верификация многоблочных вычислительных технологий для решения нестационарных задач строительной аэродинамики высотных зданий в рамках подхода URANS

Д.ф.-м.н., профессор С.А. Исаев*;
д.т.н., профессор Н.И. Ватин,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет;
программист П.А. Баранов;
д.т.н., главный конструктор А.Г. Судаков,
ОАО Аккумуляторная компания «Ригель»;
к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник А.Е. Усачов,
ФГУП Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского;
д.т.н., профессор В.В. Егоров,
ФГБОУ ВПО Петербургский государственный университет путей сообщения

Ключевые слова: высотные здания; ветровое воздействие; нестационарное обтекание; силовые нагрузки; пульсации; расчеты; верификация; многоблочные сетки; модели турбулентности; URANS; пакет программ

С начала 1990-х гг. развитие мезомасштабных моделей приземного ветрового потока с учетом орографии местности было сосредоточено на прогнозировании характеристик опасного сдвига ветра в районе аэропортов, в частности, аэропорта «Пулково» [2]. Модели основывались на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замыкаемых с помощью полуэмпирических моделей турбулентности [3-5].

К концу 90-х годов XX века предложенная концепция многоблочных вычислительных технологий, базирующихся на разномасштабных пересекающихся сетках, была успешно применена к моделированию вентиляции автомобильных тоннелей [6]. В последние годы многоблочная вычислительная методология используется для расчета ветрового воздействия на строительные сооружения, в том числе ансамбли зданий [7,8]. Следует отметить, что применение универсальных пакетов прикладных программ типа CFX (Fluent) для численного решения задач строительной аэродинамики [9] не всегда дает адекватные результаты, что может привести к неоправданному решению отказаться от физического эксперимента. Несомненно, что для верификации результатов численного моделирования обтекания сооружений должны проводиться точечные физические эксперименты.

Объект исследования и расчетная методология

Ветровое воздействие на здание представляется как взаимодействие развивающегося вдоль поверхности невозмущенного равномерного потока с расположенной на стенке моделью высотного сооружения. Физическим аналогом задачи является размещение в рабочей части аэродинамической трубы участка земной поверхности с моделью здания. В качестве допустимого предположения принимается, что поверхность плоская, а здание имеет форму параллелепипеда с выбранным характерным размером – шириной, удлинением 0.5 и высотой 2 (рисунок 1). Рассматриваемый участок земной поверхности и зона над ним должны иметь весьма протяженные размеры, чтобы возмущения от здания не оказывали влияния на входные граничные условия, а расстояния от здания до выходной, верхней и боковых границ были достаточными, чтобы поведение потока в их окрестности не влияло на поле течения около сооружения. Подбор размеров области решения задачи осуществляется в численных экспериментах.

Толщина пограничного слоя на входной границе задается в долях характерного размера и принимается равной 0.5. Число Рейнольдса, определенное по скорости невозмущенного потока, ширине здания и коэффициенту кинематической вязкости для воздуха, равняется 10^6.

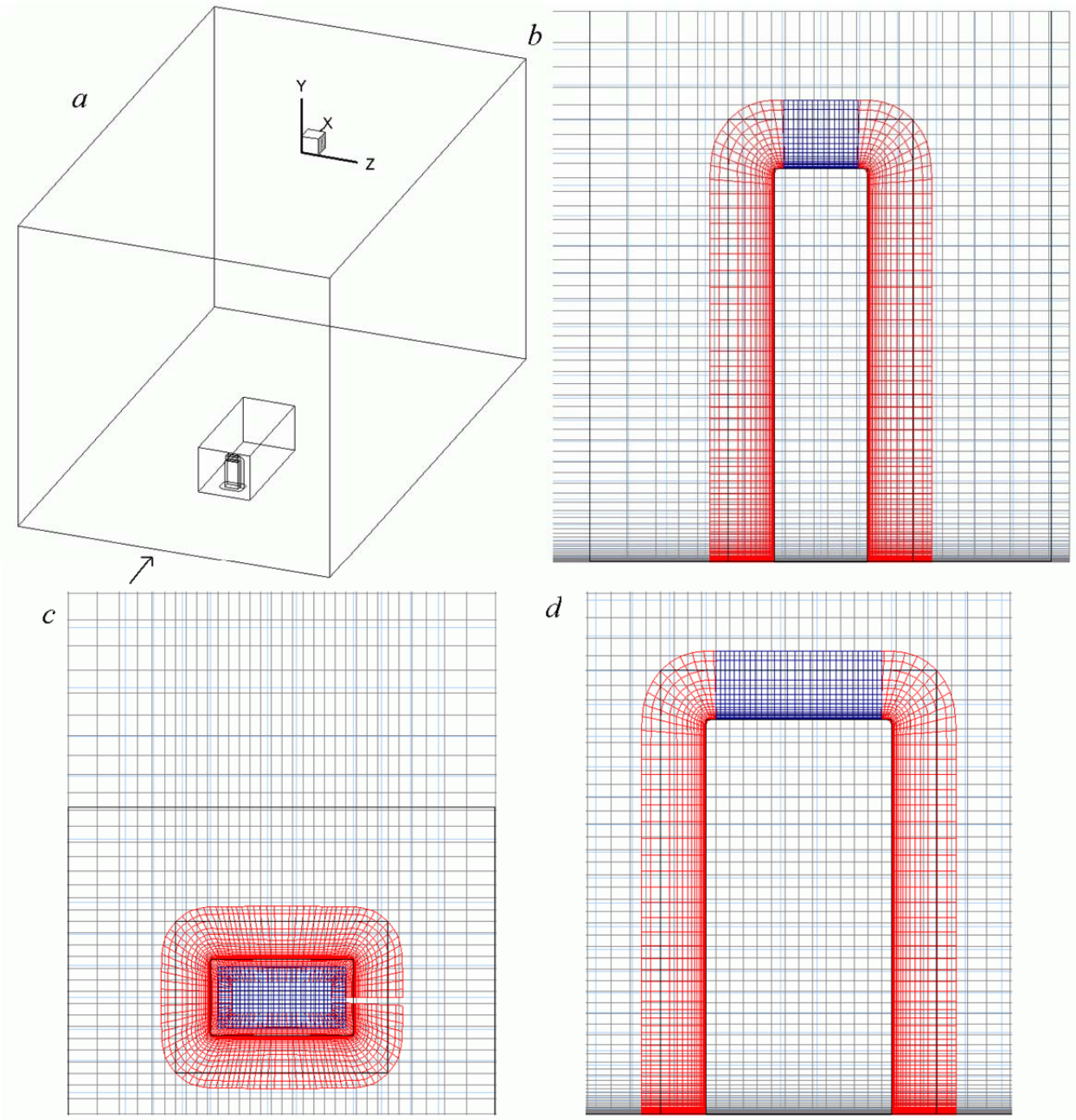

Рисунок 1. Схема расчетной области (*a*) с указанием направления невозмущенного потока и срединные сечения здания плоскостями (*xy* - *b*), (*xz* - *c*), (*zy* - *d*)

Декартова система координат *x,y,z* вводится в расчетной области (рисунок 1) с центром в середине основания здания с наветренной стороны. Расчетная область имеет размеры 37.5×23×23, причем входная граница удалена от здания на расстояние 11.25. Область разбивается крупными ячейками с размером шагов в районе тела 0.2. Для отображения характерных особенностей нестационарного обтекания здания вводится окружающая его внутренняя подобласть с размерами 8.48×3.4×3.8, причем входная граница удалена от здания на расстояние 1.54. Подобласть разбивается мелкими ячейками с шагами в окрестности тела, равными 0.075.

Модель здания имеет сглаженные края с радиусом скругления 0.025. Около поверхности модели строится прилегающая расчетная сетка, состоящая из нескольких фрагментов (показаны красным и синим цветом на рисунке 1). Толщина прилегающей подобласти равна 0.35. Пристеночный шаг равен 0.001. Многоблочная разномасштабная структурированная сетка с пересечением составляющих ее фрагментов содержит примерно 400 тысяч ячеек. Поток взаимодействует со зданием под углом 90°.

Методология решения задачи на многоблочной сетке детально описывается в работе [10]. Осредненные по Рейнольдсу нестационарные уравнения Навье-Стокса замыкаются с помощью модели переноса сдвиговых напряжений Ментера [11-14], модифицированной с учетом влияния кривизны линий тока в характеристиках турбулентности. Модель прошла апробацию на широком спектре задач.

Для решения исходных уравнений применяется конечно-объемный подход [15], основанный на коррекции давления, причем для дискретизации членов уравнений используются схемы не ниже второго порядка аппроксимации [16]. На входной проточной границе задаются профиль скорости в пределах пограничного слоя и вне его – однородный поток. Характеристики турбулентности рассчитываются для заданной толщины пограничного слоя. Вне его характеристики турбулентности соответствуют параметрам, заданным при эксперименте в аэродинамической трубе. На проточных выходных границах ставятся «мягкие» граничные условия. Шаг по времени принимается равным 0.02, а начальные условия задаются соответствующими состоянию удара пристеночного потока о тело. Помимо пространственной нестационарной задачи, решается также двумерная задача взаимодействия равномерного потока с нормально расположенной толстой пластинкой размером 0.5×2, представляющей поперечное сечение модели высотного здания. Решение задачи заканчивается после выхода процесса обтекания на автоколебательный режим.

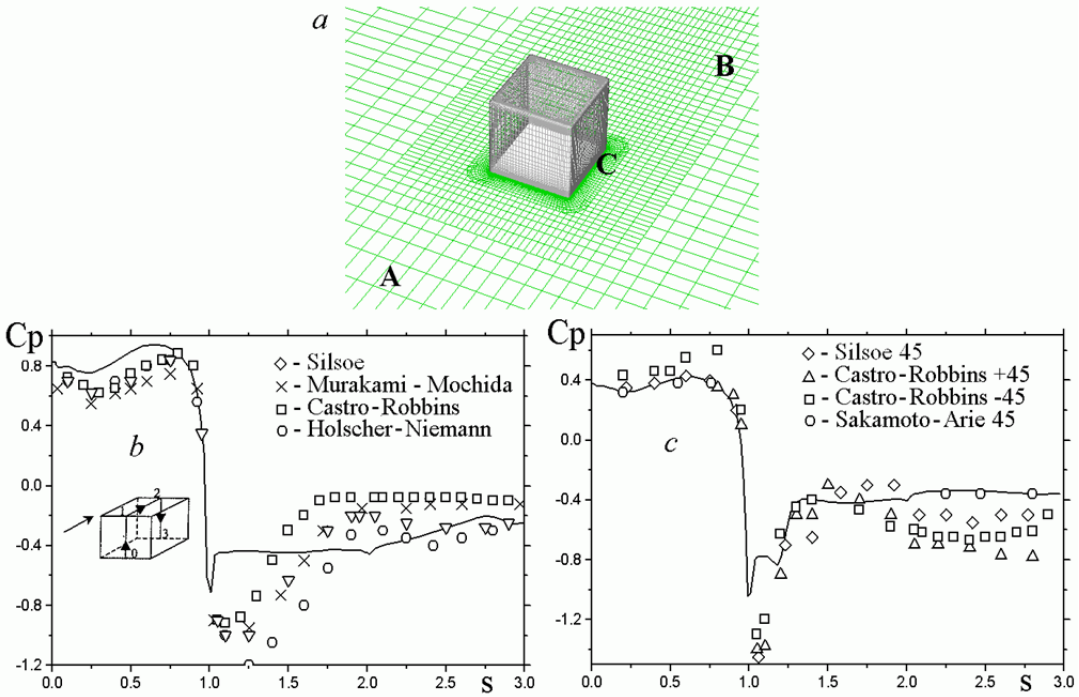

Рисунок 2. Многоблочная сетка (*a*), состоящая из трех разномасштабных фрагментов (A – внешняя, B – внутренняя, C – прилегающая), и сравнение распределений коэффициента давления в срединной плоскости обтекаемого куба при ориентации под углами 90° (*b*) и 45° (*c*)

Верификация расчетной методологии

В качестве тестовой задачи для верификации многоблочной расчетной методологии выбирается турбулентное обтекание куба на плоскости, сравнительные характеристики которого из нескольких экспериментальных исследований собраны в [17,18]. Подобно модели высотного здания на рисунке 1 куб помещается в расчетную область размером 38×22×23 с удалением тела от входной границы на расстояние 11.5. Шаги сетки в окрестности куба равны 0.2 (рисунок 2). Дополнительная область для описания характерных черт обтекания куба и нестационарного следа за ним имеет размеры 8.45×2.4×3.8 с расположением передней грани куба на расстоянии 1.28 от входной границы подобласти. Минимальные шаги внутренней декартовой сетки в окрестности тела равны 0.075. Прилегающая к поверхности куба криволинейная сетка имеет толщину 0.35. Пристеночный шаг равен 0.001. Радиус скругления краев куба равен 0.025. Число Рейнольдса – порядка 10^5. Общее количество расчетных ячеек в многоблочной сетке составляет примерно 350 тысяч.

Физические эксперименты, приведенные в работе [18], выполнены с большим разбросом определяющих параметров. На рисунке 2 сравниваются осредненные по времени расчетные и экспериментальные коэффициенты статического давления в срединном сечении куба под углами 90° и 45° по отношению к набегающему потоку. С учетом некоторой неопределенности и нестыковки условий проведения испытаний модели куба, а также численного моделирования его обтекания, согласованность результатов представляется вполне приемлемой, а значит, математическая модель и расчетная методология в должной мере адекватны.

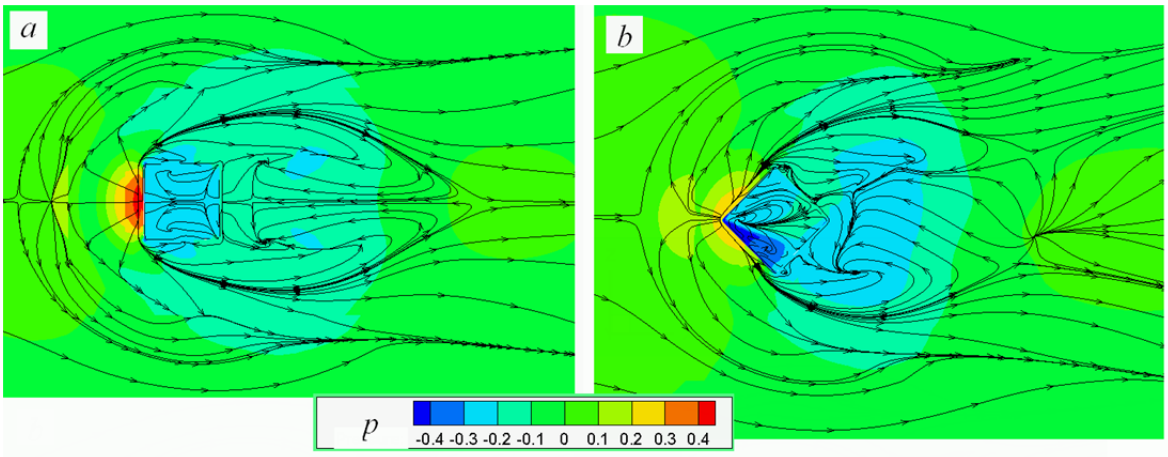

Рисунок 3. Осредненные по времени картины растекания на стенке с кубом с нанесенными распределениями статического давления при ориентации куба под углами 90o (a) и 45o (b)

Осредненные по времени вихревые картины обтекания куба под углами 90° и 45° к набегающему потоку, дополненные распределениями обезразмеренного по удвоенному скоростному напору статического давления, показаны на рисунке 3. Помимо развитых отрывных зон в ближнем следе за кубом, впереди него образуются подковообразные вихревые жгуты. Внутри отрывных зон возникают особые точки типа фокуса, являющиеся источниками восходящих смерчеобразных закрученных струйных потоков. Окрестности этих точек характеризуются зонами пониженного давления. На верхней грани куба также наблюдаются области низкого давления.

Расчет нестационарных ветровых нагрузок на высотные здания

Двумерное и пространственное взаимодействие однородного ветрового потока с высотным зданием характеризуется выходом на автоколебательный режим с образованием вихревой дорожки в следе за зданием (рисунок 4). Как видно, число Струхаля в пространственном случае – 0.118 – существенно ниже, чем в двумерном случае – 0.152. Продольная сила, X = 1.25, оказывается значительно меньше, чем в двумерном случае (в среднем 1.4, а амплитуда поперечной нагрузки Z (порядка 0.2) еще больше отличается от двумерного обтекания (порядка 0.8). Интегральная силовая нагрузка обезразмерена по удвоенному скоростному напору и характерной площади (длине – в двумерном случае).

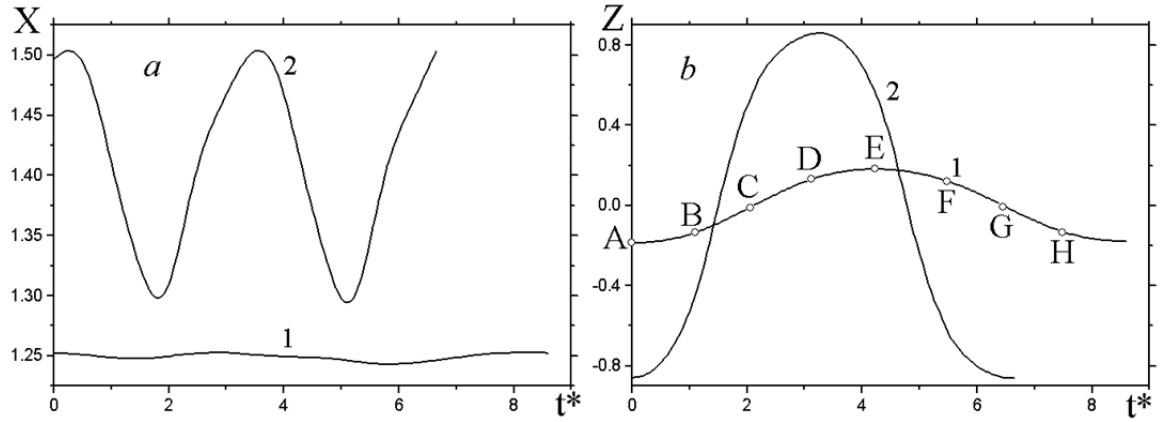

Рисунок 4. Сравнение пространственной (кривые 1) и двумерной (кривые 2) продольной X(*a*) и поперечной Z(*b*) силовой нагрузки на модель высотного здания на периоде колебаний Z

Картина эволюции поля давления в срединной поперечной плоскости показывает попеременный сход вихрей с боковых граней в ближний след (рисунок 5). При этом возникает циклическая нагрузка на модель высотного здания, связанная с образованием зон пониженного давления на боковых гранях.

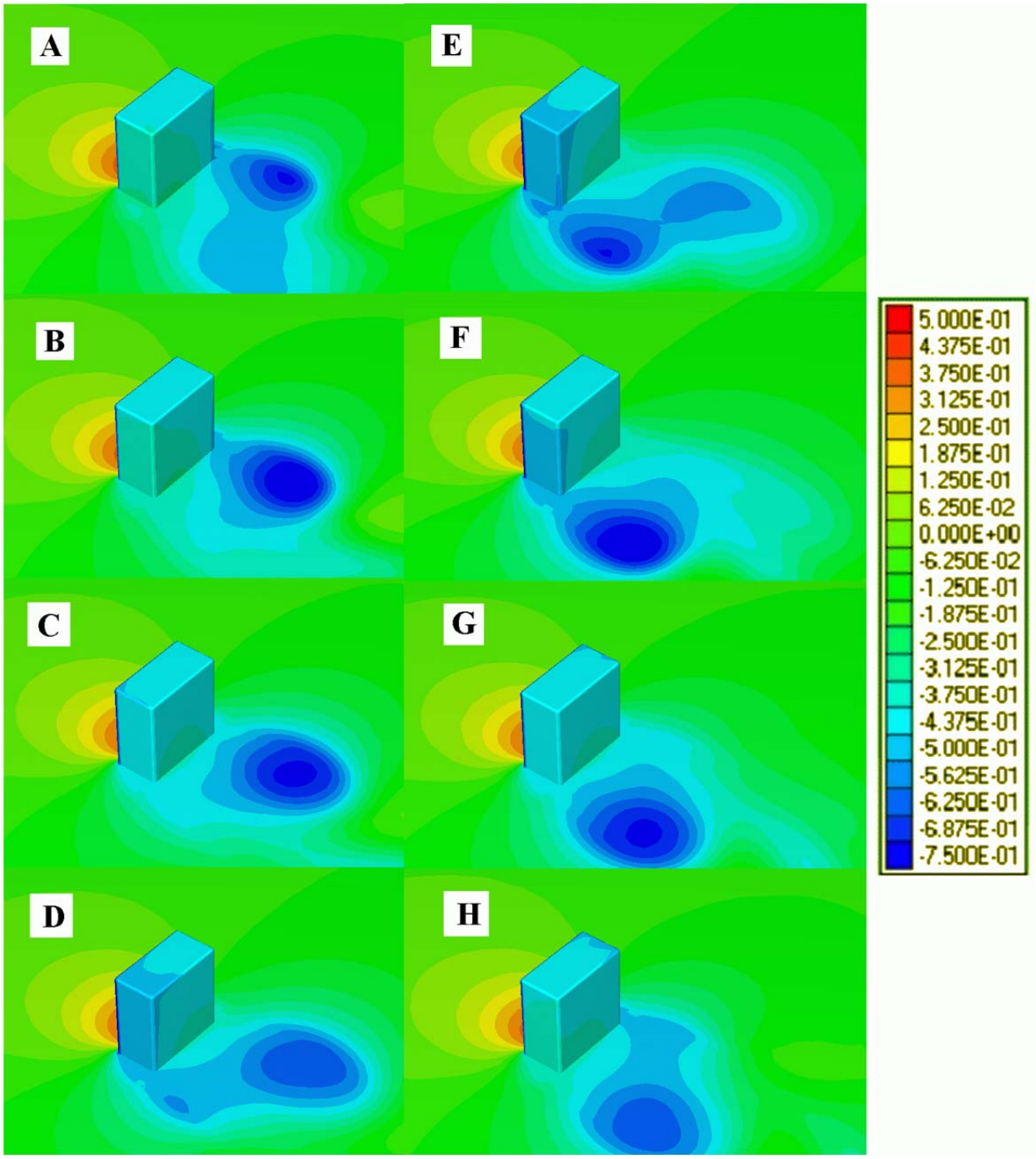

Рисунок 5. Изменение поля статического давления в срединной плоскости высотного здания в моменты времени, соответствующие точкам на рисунке 4b

Осредненное по периоду колебаний поперечной нагрузки поверхностное распределение статического давления (рисунок 6, *a,b*) существенно отличается от нестационарного асимметричного поля давления, представленного на рисунке 5. Как и в случае ветрового воздействия на куб, расположенный под углом 90° (рисунок 3), картина распределения осредненного статического давления получается симметричной. Периодический характер изменения локальных ветровых нагрузок на стенки здания описывается полем пульсационного давления (рисунок 6, *c,d*), рассчитанным по методике [10].

Максимум локальной нагрузки на здание приходится на зону торможения ветрового потока, расположенную примерно на середине передней грани. Верхняя и боковые грани находятся в областях пониженного давления. Пульсации давления на передней и верхней гранях практически отсутствуют, т.е. локальная нагрузка на них близка к стационарной. В то же время на боковых гранях, в особенности в зоне подковообразного вихря, пульсации велики и по величине сопоставимы с осредненным статическим давлением.

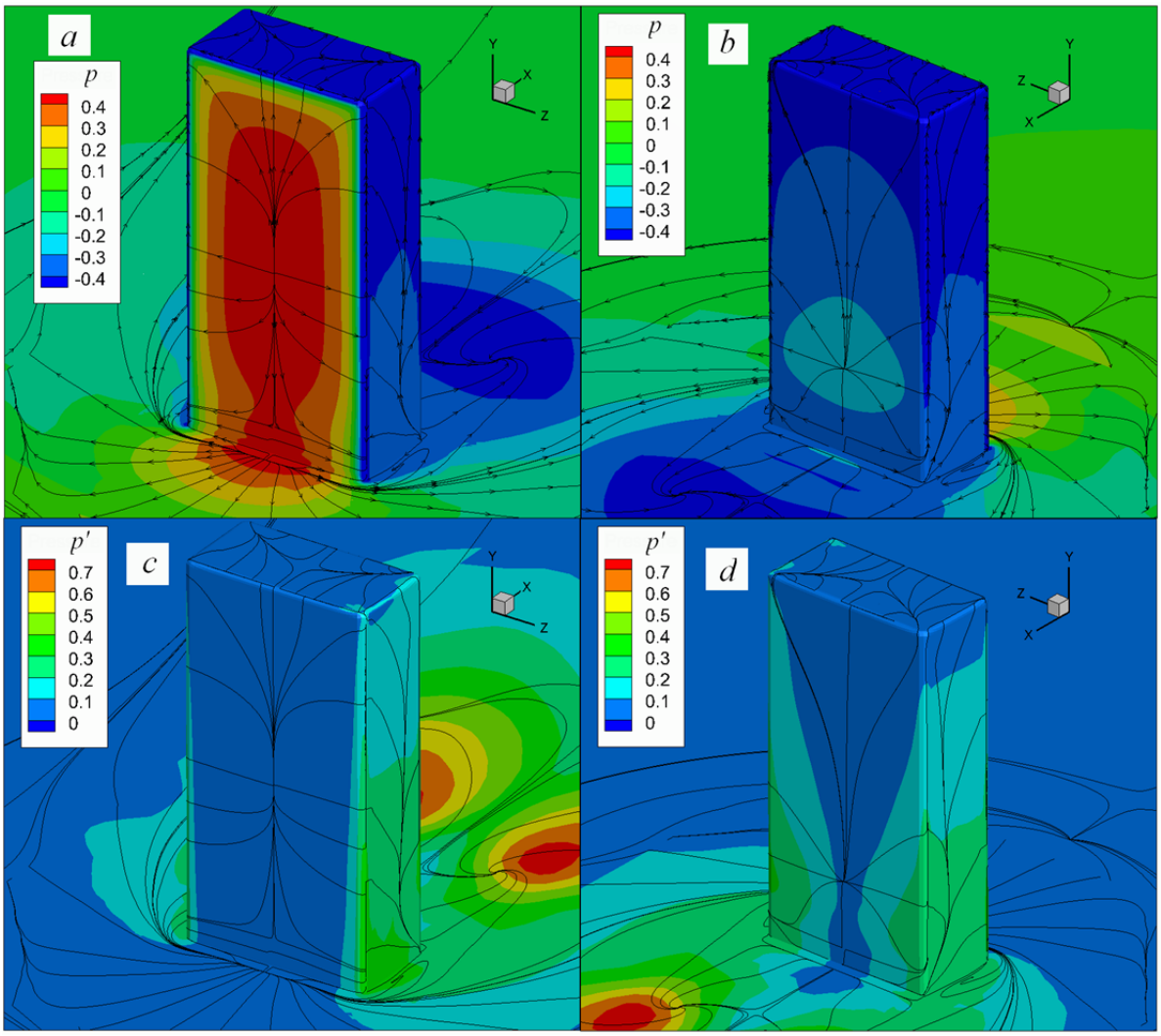

Рисунок 6. Поверхностные распределения осредненного (*a,b*) и пульсационного (*c,d*) давления с нанесенными картинами растекания.
***a,c* – вид спереди; *b,d* – вид с тыльной стороны**

Выводы

1. Разработана методология расчета ветрового воздействия на высотные здания на основе использования многоблочных разномасштабных структурированных сеток простой топологии с частичным наложением в рамках решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замыкаемых уравнениями модели переноса сдвиговых напряжений.

2. Расчетная методология верифицирована на тестовой задаче обтекания куба. Обоснована приемлемость модифицированной модели переноса сдвиговых напряжений с учетом влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности.

3. Продемонстрирован циклический характер ветрового воздействия на высотное здание с знакопеременной поперечной нагрузкой, составляющей порядка 15% от продольной нагрузки, при числе Струхаля 0.118.

4. Показано, что уровень пульсаций статического давления на боковых стенках здания может быть одного порядка по величине с осредненным статическим давлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» (проект 2009-1.5-000-010) и РФФИ (проект 11-01-00039).

Литература

1. Протокол №18 заседания Научно-технического совета Комитета по архитектуре и градостроительству города Москвы от 6 апреля 2006 г. [Электронный ресурс]. Систем. требования: Microsoft Office Word. URL: http://dom6.ru/documents/center_doc/380213.doc (дата обращения: 09.01.2013).
2. Исаев С.А., Белоусова Л.Ю., Баранов П.А. Численный анализ ветрового режима в окрестности аэропорта Пулково // Инженерно-физический журнал. 1999. Т.72. №4. С.672-678.
3. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. Учебное пособие. СПб: БГТУ, 2001. 107 с.
4. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. La Canada: DCW Industries, 1998. 540 p.
5. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. Учебное пособие. СПб: Из-во Политехн. ун-та, 2012. 88 с.
6. Усачов А.Е., Исаев С.А., Баранов П.А. Численное моделирование течения воздуха при вентиляции отдельных участков автодорожных тоннелей // Труды ЦАГИ. Промышленная аэродинамика. 2009. Вып. 2684. С. 26-35.
7. Гувернюк С.В., Исаев С.А., Егорычев О.О., Поддаева О.И., Корнев Н.В., Усачов А.Е. Вычислительная аэродинамика строительных сооружений. Задачи и методы // Научно-технический журнал. Вестник МГСУ. 2011. Т.2. №2. С. 113-119.
8. Гувернюк С.В., Егорычев О.О., Исаев С.А., Корнев Н.В., Поддаева О.И. Численное и физическое моделирование ветрового воздействия на группу высотных зданий // Научно-технический журнал. Вестник МГСУ. 2011. Т. 1. №3. С. 185-191.
9. Дубинский С.И. Численное моделирование ветровых воздействий на высотные здания и комплексы. Автореф. дисс…. канд. тех. наук. М.: МГСУ, 2010. 23 с.
10. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. СПб.: Судостроение, 2005. 398 с.
11. Menter F.R. Zonal two equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1993. №93-2906. 21 p.
12. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Antalya, Turkey, 12-17 October, 2003. Pp. 625–632.
13. Esch T., Menter F.R. Heat transfer predictions based on two-equation turbulence models with advanced wall treatment // Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Antalya, Turkey, 12-17 October, 2003. Pp. 663-640.
14. Hellsten A. Some improvements in Menter's *k*-ω turbulence model // AIAA Paper. 1998. №98-2554. 11 p.
15. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer Verlag, 1999. 389 p.
16. Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1979. Vol. 19. №1. Pp. 59-98.
17. Castro I.P., Robins A.G. The flow around a surface-mounted cube in uniform and turbulent streams // Journal of Fluid Mechanics. 1977. Vol. 79. №2. Pp. 307-335.
18. Richards P.J., Hoxey R.P., Short L.J. Wind pressures on a 6m cube // Expanded abstracts of 4th Int. Colloquium on Bluff Body Aerodynamics & Application. Ruhr- University Bochum: Bochum, Germany, 2000. Pp. 515-518.

**Сергей Александрович Исаев, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812) 771-03-11; эл. почта: isaev3612@yandex.ru