<u>Http://www.engstroy.spb.ru</u> – полнотекстовая версия журнала в сети Интернет. Бесплатный доступ, обновление с каждым новым выпуском

	1		
1/	Інженерно-ст	MALITA AL III III	WWWIIOA
$\mathbf{v}$	M M M M M M ( )= ( ,	шинельный	M VIIMA/
	III/INOIIIOPIIIO VI	PO1110/10110111	/ITTY POTTER/T
			71

научно-прикладное издание

ISSN 2071-4726

Свидетельство о государственной регистрации: ПИ №ФС77-38070, выдано Роскомнадзором

Специализированный научный журнал. Выходит с 09.2008.

Включен в Перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ

Периодичность: 8 раз в год

#### Учредитель и издатель:

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

#### Адрес редакции:

195251, СПб, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 227A

## Главный редактор:

Вера Михайловна Якубсон

### Научный редактор:

Николай Иванович Ватин

## Литературный редактор:

Елена Викторовна Соболева

## Редакционная коллегия:

д.т.н., проф., зав. каф. ФГБОУ ВПО СПбГПУ Н.В. Арефьев; д.т.н., проф., ректор ФГБОУ ВПО СГАСУ М.И. Бальзанников; к.т.н., проф., проректор по перспективным проектам ФГБОУ ВПО СПбГПУ А.И. Боровков; д.т.н., проф., Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Э.К. Завадскас; д.т.н., проф., зав. каф. ФГБОУ ВПО СПбГПУ В.В. Лалин; к.т.н., директор РУП «Институт БелНИИС» М.Ф. Марковский;

и другие.

Полный список редсовета и редколлегии – на веб-сайте журнала.

Установочный тираж 1000 экз. Подписано в печать 23.08.13 Формат 60х84/8, усл. печ. л. 15,5. Заказ № 2094

Отпечатано в типографии СПбГПУ. СПб, ул. Политехническая, д. 29

Ten. +7(812)535-52-47 E-mail: engstroy@inbox.ru Web: Http://www.engstroy.spb.ru

# Содержание

## КОНСТРУКЦИИ

Горшков А.С., Ватин Н.И. Свойства стеновых конструкций из ячеистобетонных изделий автоклавного твердения на 5 полиуретановом клею Деркач В.Н. Совместная работа каменного заполнения и железобетонного монолитного каркаса 20 Алексейцев А.В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней 28 Ал Али М., Томко М., Бадак М. Расчет сопротивления сжатых элементов легких стальных тонкостенных конструкций закрытого профиля. Часть 1 (англ.) 38 Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного 44 сечения из холодногнутого С-профиля

#### АНАЛИЗ

Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования

52 Мирсаидов М.М., Султанов Т.З., Садуллаев Ш.А. Оценка напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с учетом упругопластических, влажностных свойств грунта и больших деформаций (англ.)

## РАСЧЕТЫ

Уткин В.С. Расчет надежности грунтового основания на стадии эксплуатации при внецентренно нагруженном фундаменте 69 Колосова Г.С., Лалин В.В., Колосова А.В. Влияние строительных швов и трещин на напряженнодеформированное состояние арочно-гравитационной плотины 76 Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения 86

### МЕТОЛЫ

Семенов А.А., Карпов В.В. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения

100
Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

107
Фиалко С.Ю. О методах решения большеразмерных задач строительной механики на многоядерных компьютерах

© ФГБОУ ВПО СПбГПУ, 2013

На обложке: авторские иллюстрации к статьям номера



Конференция компании ПСС совместно с компанией SOFiSTiK AG (Германия)







## Спикеры:

В конференции примут участие представители европейских и российских компаний:



Испания:

- FHECOR Ingenieros Consultores (Мадрид)



Германия:

- SSF Ingenieure AG (Мюнхен)
- SOFiSTiK AG (Обершлайсхайм)
- FIDES DV-Partner GMBH (Мюнхен)



Россия:

- КБ ВиПС (Санкт-Петербург)
- Ове Аруп (Москва)
- ПКБ ИНФОРСПРОЕКТ (Москва)
- Руководители Центров компетенции ПК SOFiSTiK в России (Санкт-Петербург)
- Эксперты и консультанты МКЭ анализа SOFiSTiK (Санкт-Петербург)

В ходе конференции будет организован синхронный перевод с русского на английский и с английского на русский

# 17 октября 2013 года / Санкт-Петербург

Мировой опыт использования ПК SOFiSTiK для проектирования уникальных инженерных сооружений: здания, мосты, тоннели, геотехника

Практическое применение ПК МКЭ анализа SOFiSTiK для моделирования, симуляции и расчета несущих конструкций зданий, мостов и тоннелей, решения сложных геотехнических задач на реальных примерах компаний Испании, Германии, России и стран СНГ.

## Разделы конференции:

- Проектирование зданий и сооружений
- Проектирование мостов
- Проектирование тоннелей
- Решение геотехнических задач
- Стенды ведущих специалистов компании SOFiSTiK AG (Германия); экспертов и специалистов Центров компетенции SOFiSTiK в России; инженеров и научных сотрудников ведущих проектных организаций и ВУЗов, являющихся пользователями ПК SOFiSTiK

## Место проведения:

КЦ «ПетроКонгресс», зал «Санкт-Петербург» СПб., Лодейнопольская ул., д.5, ст.м. «Чкаловская» (5 мин. пешком) Начало конференции в 10-00. Регистрация участников в 9-30

## Участие бесплатное!

Подробности и регистрация: (812) 622-10-14 www.pss.spb.ru

# Свойства стеновых конструкций из ячеистобетонных изделий автоклавного твердения на полиуретановом клею

К.т.н., доцент А.С. Горшков\*; д.т.н., профессор Н.И. Ватин,

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

**Ключевые слова:** автоклавный газобетон; однокомпонентный полиуретановый клей; теплопроводность; прочность кладки на сжатие; огнестойкость; воздухопроницаемость; производительность работ

Кладка стен из ячеистобетонных изделий автоклавного твердения (газобетонных блоков), выпускаемых в соответствии с требованиями ГОСТ 31360 [1], является в настоящее время одной из наиболее востребованных технологий домостроения на территории Российской Федерации [2].

Кладка из газобетонных блоков применяется при возведении несущих, самонесущих и ненесущих наружных и внутренних стеновых ограждающих конструкций как современных высотных многоквартирных зданий, так и малоэтажных частных строений (коттеджей, сблокированных таунхаусов, гаражей и т. п.). Изделия из автоклавного газобетона обладают относительно небольшой теплопроводностью (по сравнению с другими типами конструкционнотеплоизоляционных изделий), что определяет их достаточно высокую эффективность для выполнения требований к теплоизоляции наружных стен зданий. Однако при возведении стен из мелкоштучных газобетонных изделий требуется применение цементных растворов (скрепляющих блоки в кладке друг с другом), в качестве которых обычно используются либо цементно-песчаные растворы, либо тонкослойные цементные клеи.

Наличие цементных швов в кладке приводит к образованию так называемых «мостиков холода» [3], т. к. теплопроводность цементных растворов, применяемых для склеивания блоков в кладке, значительно выше теплопроводности ячеистого бетона марок по плотности D400–D600. Таким образом, швы кладки обусловливают дополнительные потери тепловой энергии, которые при использовании тонкослойных клеев могут достигать 10%, а при использовании цементнопесчаных растворов – 30% дополнительных затрат тепловой энергии по сравнению с массивом из ячеистого бетона [3, 4]. Все эти дополнительные потери энергии приводят к необходимости увеличения расчетной мощности системы отопления и, как следствие, к увеличению расхода в здании тепловой энергии на отопление в течение отопительного периода.

По этой причине для дальнейшего совершенствования кладки из газобетонных блоков требуется разработка скрепляющих кладку составов, характеризующихся низкими значениями теплопроводности, обеспечивающих при этом требуемую адгезию между блоками и не ухудшающими другие важные показатели ограждающих конструкций, такие как прочность, трещиностойкость, огнестойкость и пр.

Одним из вариантов улучшения теплоизоляционных свойств кладки из газобетонных блоков является использование в качестве скрепляющего состава однокомпонентных полиуретановых клеев.

Возведение каменной кладки на пенополиуретановых клеевых составах позволяет исключить мокрые процессы на строительной площадке и примерно в два раза увеличить скорость кладочных работ по сравнению с общепринятой технологией, когда кладка производится на цементных клеевых составах или растворах.

Преимущества каменной кладки на полиуретановых швах описаны в работах [5–16]. В ряде публикаций [5, 6] отмечено, что при возведении внутренних перегородок на полиуретановых швах наблюдается повышение их трещиностойкости.

В работе [5], посвященной вопросам трещиностойкости каменных перегородок, показано, что повышенная податливость пенополиуретановых растворных швов (по сравнению с цементно-песчаными) приводит к уменьшению сдвиговой жесткости конструкции, которая работает как балка-стенка из-за прогибов железобетонных перекрытий. Благодаря этому повышается способность перегородок к таким прогибам, в результате чего в перегородках снижаются главные растягивающие напряжений, которые являются одной из основных причин образования трещин.

В работе [6] представлены результаты испытаний, которые показывают, что прочность кладки на пенополиуретановых швах при растяжении при изгибе параллельно и перпендикулярно горизонтальным швам на 40% выше прочности кладки на обычных минеральных растворах.

Из представленного обзора следует, что в настоящее время в мировой практике строительства наблюдается устойчивый рост интереса к возведению стеновых конструкций из легких поризованных камней с использованием в качестве скрепляющих составов полиуретановых клеев. Следует отметить, что большинство представленных в литературном обзоре публикаций имеет отношение к исследованию механических свойств кладок из крупноформатных керамических камней.

Ниже представлены результаты эксперимента, проведенного в России применительно к кладке стеновых фрагментов, сложенных из ячеистобетонных блоков автоклавного твердения.

## Описание эксперимента

В конце 2011 г. на территории предприятия по выпуску стеновых неармированных изделий из автоклавного газобетона ООО «H+H» был проведен эксперимент по изготовлению фрагмента стены из газобетонных блоков марки по плотности D500 на аэрозольном полиуретановом клею (ППУ-клей).

## Цели эксперимента:

- проверка возможности и технологичности работ по возведению кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею (вместо цементного клея или цементно-песчаного раствора);
- оценка производительности работ и качества кладки.

Аэрозольный клей для склеивания блоков в кладке представляет собой быстротвердеющий готовый к применению однокомпонентный полиуретановый клей в баллоне, предназначенный для применения внутри и снаружи помещений.

Изделия стеновые неармированные из ячеистого бетона автоклавного твердения выпускаются в соответствии с требованиями ГОСТ 31360 [1]. Технические данные полиуретанового клея представлены в таблице 1.

По истечении трех суток с момента возведения экспериментального фрагмента были проведены его контрольные замеры. Было сделано предположение, что после отверждения монтажная пена в швах кладки может увеличиться в размерах, что приведет к деформированию кладки, нарушению ее плоскостности и вертикальности. Результаты контрольных замеров показали, что отклонения линейных размеров фрагмента до и после затвердевания клея не превысили погрешности измерений. Это свидетельствует о том, что толщина горизонтальных и после вертикальных ШВОВ отверждения однокомпонентного полиуретанового клея практически не изменилась.



Рисунок 1. Монтаж экспериментального фрагмента кладки из газобетонных блоков на ППУ-клей

Предпринятая спустя трое суток попытка механического разделения блоков боковыми механическими усилиями не принесла результата. Попытки выбить блок из кладки с использованием резинового молотка приводили к разрушению газобетонных блоков, что свидетельствовало о высокой адгезии полиуретанового клея с массивом из ячеистого бетона. Фрагмент стены разрушался по телу блоков, но не по швам конструкции, как можно было предположить изначально.

Расход полиуретанового клея при проведении эксперимента составил 1 баллон на 1,25 м<sup>3</sup> кладки. При данном расходе ППУ-клея кладка оказалась экономически более целесообразной по сравнению с кладкой на цементном клею.

Таблица 1. Технические данные пенополиуретанового клея марки Soudabond – EASY (по данным производителя)

Основа	Полиуретановый преполимер		
Консистенция	Стабильная пена (после отверждения)		
Механизм отверждения	Влажная полимеризация		
Цвет	Оранжевый		
Образование поверхностной пленки	Около 8 минут (20 °C /отн. влажность 65%)		
Ячеистая структура	Ок. 80% закрытых ячеек		
Время пылесухости	Ок. 20 минут (20 °C/отн. влажность 65%)		
Время отверждения	Ок. 60 минут (20 °C/отн. влажность 65%)		
Потило отпоружания	Ок. 12 часов для 3 см слоя		
Полное отверждение	(20 °C / отн. влажность 65%)		
Выход	Ок. 12 м <sup>2</sup> из баллона 750 мл		
Сопротивление срезу	0,12 N/mm <sup>2</sup>		
Сопротивление растяжению	0,6 N/mm <sup>2</sup>		
Сопротивление сжатию	0,3 N/mm <sup>2</sup>		
Термостойкость	От –40 °C до +100 °C		
Относительная плотность	Ок. 24 кг/м <sup>3</sup> (после отверждения)		
Коэффициент теплопроводности	0,036 W/m·K (DIN 52612 [17])		
Класс горючести	Γ2		

Примечание. Согласно инструкции производителя температура нанесения полиуретанового клея марки Soudabond – EASY составляет от +5 °C до +25 °C. При более низких температурах окружающего воздуха следует использовать специальные клеи, предназначенные для работы при температуре ниже 0 °C.

#### Выводы по результатам эксперимента:

- кладка стен из газобетонных блоков на полиуретановый клей технологически возможна и экономически целесообразна;
- толщина горизонтальных швов кладки составила не более 1 мм (в среднем 0,7 мм);
- после затвердевания полиуретанового клея геометрические размеры вложенного фрагмента стены не изменились; изменение габаритных размеров кладки не превысили погрешности измерений;
- прочность сцепления полиуретанового клея с блоками из автоклавного газобетона значительна; попытки механического разделения блоков между собой оказались нерезультативными.

При проведении эксперимента были выявлены некоторые недостатки кладки на ППУ-клею, а именно: при кладке стен отсутствует возможность выравнивания блоков в горизонтальной плоскости. В результате в углах стен из-за разновысотности сопрягающихся участков стеновой конструкции образуются перепады. Из-за перепада блоки работают не на сжатие, а на изгиб, что может негативно сказаться на прочности и деформативности кладки. Кроме того, полиуретановый клей не позволяет устранять уклоны кладки. Из-за этого кладка монтируется под наклоном, что нарушает вертикальность стен и приводит к возникновению дополнительного эксцентриситета в случае действия нагрузок на фрагмент стены.

В целом, несмотря на выявленные недостатки, возможность устранения которых была доказана при проведении последующих технологических испытаний, эксперимент оказался положительным.

На основании проведенного первичного эксперимента было сделано предварительное заключение о том, что представленная технология возведения кладки стен из газобетонных блоков на полиуретановый клей технологически возможна и экономически целесообразна. Однако для возможности ее воплощения в реальных проектах требуется проведение серии необходимых испытаний, а именно:

- определение прочностных и деформационных показателей кладки;
- определение теплофизических параметров кладки (сопротивление теплопередаче);
- определение воздухопроницаемости кладки;
- определение огнестойкости кладки;

 оценка производительности выполнения монтажных работ при возведении данного типа кладки, определение расхода полиуретанового клея при возведении 1 м<sup>3</sup> кладки.

Основным преимуществом данного типа кладки является то обстоятельство, что теплопроводность полиуретанового клея, применяемого для скрепления газобетонных блоков в кладке стен, значительно ниже теплопроводности цементных клеев и растворов. По этой причине теплоизоляционные (теплозащитные) свойства данного типа кладки должны оказаться выше (лучше), чем свойства кладки, выполненной на любом типе цементного клея, а тем более цементно-песчаного раствора со средней толщиной швов 10 мм (наиболее распространенного варианта возведения наружных стен из газобетонных блоков при строительстве многоквартирных жилых зданий).

По результатам первого проверочного эксперимента был определен перечень необходимых испытаний и разработана программа по их проведению, которая была реализована в последующие, с момента проведения первого эксперимента, полтора года. Ниже представлены результаты этих испытаний.

# Результаты испытаний

## Производительность работ. Рекомендации по расходу ППУ-клея

С целью оценки производительности работ по монтажу фрагментов стен из газобетонных блоков на ППУ-клей (монтажную пену) и проверки технологичности выполнения данного вида монтажных работ, были сложены 4 экспериментальных фрагмента кладки из блоков различной толщины (100, 200, 300 и 375 мм). Объем каждого испытуемого фрагмента составил не менее 1,4 м³ (рис. 2–4).

Расход ППУ-клея по результатам проведенных экспериментов представлен в таблице 2.



Рисунок 2. Процесс нанесения ППУ-клея на поверхность блоков в кладке







Рисунок 4. Процесс нанесения ППУ-клея на вертикальную (торцевую) поверхность блоков

Таблица 2. Значения фактического расхода ППУ-клея (по результатам монтажа 4 экспериментальных фрагментов)

Толщина изделия (блока), мм	Площадь стыкуемых поверхностей, м <sup>2</sup>	Количество клея, баллон/м³ кладки	Расход полиуретанового клея, баллон/м²
375	6.375	1.0	≈ 0.16
300	5.25	0.77	≈ 0.15
200	6.175	0.67	≈ 0.11
100	6.787	0.67	≈ 0.10
	о 4 экспериментальным ментам	0.7775	≈ 0.13

Время (продолжительность) выполнения монтажных работ при сборке 4 экспериментальных фрагментов стен различной толщины на ППУ-клей составило:

- 375 мм 45 мин при монтаже 1 м<sup>3</sup> кладки;
- 300 мм 40 мин при монтаже 1 м<sup>3</sup> кладки;
- 200 мм 40 мин при монтаже 1 м<sup>3</sup> кладки;
- 100 мм 1 час 20 мин при монтаже 1 м<sup>3</sup> кладки.

Представленные выше значения продолжительности выполнения монтажных работ не учитывают время подачи материала (блоков) к месту работ, погрузочно-разгрузочные работы, подготовительные работы по замесу цементно-песчаного раствора для выполнения первого (нижнего) ряда кладки, установку подмостей. Временные интервалы, указанные выше, учитывают только процесс сборки фрагментов, нанесение клеевого состава на поверхности блоков, установку блоков в проектное положение, их выравнивание в кладке.

На основании полученных экспериментальных данных были разработаны рекомендуемые значения расхода ППУ-клея при кладке блоков толщин:

- 375 мм 1 баллон на 1 м<sup>3</sup> кладки;
- 300 мм 0,8 баллона на 1 м<sup>3</sup> кладки;
- 200 мм 0,75 баллона на 1 м<sup>3</sup> кладки;
- 100 мм 0,75 баллона на 1 м<sup>3</sup> кладки.

Для улучшения плоскостности кладки в горизонтальном и вертикальном направлениях и повышения производительности кладки (с целью исключения операций по выравниванию каждого очередного ряда кладки) был предложен следующий способ. Выкладывание очередного ряда кладки производится с использованием тонких пластиковых клиньев (рис. 5), способных компенсировать различие блоков (±1 мм) в высоте. Пластиковые клинья могут подкладываться на любую сторону блока при его укладке и таким образом выравнивать его в любом направлении.

Последующие исследования показали, что использование клиньев под стыкуемые поверхности для выравнивания блоков в плоскости стены не влияет на прочность стыка. Пена после незначительного приподнимания блока (на высоту не более 1 мм) расширяется, и стык равномерно заполняется клеем.

После отвердевания ППУ-клея (примерно через 20 минут после нанесения клея на поверхность блоков) пластиковые клинья следует удалить из швов кладки.

В процессе выполнения работ были сделаны следующие замечания:

- для блоков толщиной 100 мм при нанесении ППУ-клея на склеиваемые поверхности «в линию» отмечается неполное (частичное) склеивание стыкуемых поверхностей; поэтому при кладке блоков толщиной 100 мм целесообразно слой ППУ-клея (пены) наносить «змейкой» (волнистой линией);
- при сильных порывах ветра (свыше 5 м/с) наблюдалось частичное или полное скатывание нанесенного ППУ-клея с поверхности блоков; данное обстоятельство следует учитывать при работе на открытой местности;
- ППУ-клей оказался пригоден для склеивания отколовшихся от блока при транспортировке и выгрузке фрагментов (отколов); углы, отколотые в процессе разгрузки изделий, а также при монтаже кладки, могут быть быстро восстановлены путем нанесения ППУ-клея на место скола и прикладывания (возвращения на место) отколотого фрагмента к основному блоку (не рекомендуется, однако, при большом количестве сколов использовать восстановленную таким образом кладку для возведения стеновых конструкций).



Рисунок 5. Процесс выравнивания блоков с использованием пластиковых клинообразных вставок

## Прочностные испытания

Прочностные испытания фрагментов стен из газобетонных блоков на ППУ-клею проводились на поверенном оборудовании ЗАО «Испытательный центр ВНИИГС» под руководством заведующего лабораторией А.П. Харченко [18].

Исследования прочности и деформативности кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею производились на образцах размером (Д×В×Ш): 100×100×37,5 см (рис. 6).

Для кладки образцов применялись следующие материалы:

 изделия стеновые неармированные из ячеистого бетона автоклавного твердения, выпускаемые по ГОСТ 31360 [1] со следующими физико-механическими и геометрическими характеристиками: марка по плотности D400; класс по прочности на сжатие B2; размер блоков (Д×В×Ш): 625×250×375 мм;

 однокомпонентный полиуретановый клей (технические данные представлены в таблице 1).

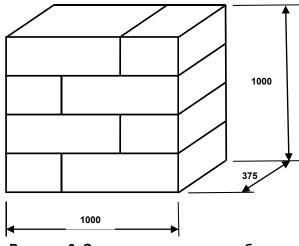


Рисунок 6. Схема испытываемых образцов кладки

образцов Кладка всех выполнялась стандартным способом. После монтажа ряда очередного кладки наносились вертикальный и горизонтальный швы кладки с использованием ППУ-клея. Сначала клеем заполнялась вертикальная поверхность блоков, затем клей наносился на горизонтальную поверхность нижнего ряда кладки, после чего на клей устанавливался очередной ряд кладки. Нижний слой кладки не выравнивался (выравнивающий цементно-песчаный раствор под нижний ряд кладки не наносился).

Время полной полимеризации полиуретанового клея составляет 2 часа (см. данные таблицы 1). Перед началом испытаний образцы выдерживались в стандартных условиях ( $t_{int}$  = 20±2 °C,  $\phi_{int}$  = 50±5%) в течение суток. Образцы кладки испытывались на сжатие через сутки после монтажа.

Испытание образцов на сжатие производилось на 100-тонном прессе по стандартной методике (рис. 7). Деформации каждого образца измерялись индикатором часового типа с ценой деления 0,01 мм.



Рисунок 7. Стенд для проведения прочностных испытаний

Всего было испытано 5 фрагментов кладки. Результаты испытания фрагментов на прочность при сжатии представлены в таблице 3: приведены частные и средние значения нагрузок и напряжений, соответствующие моменту образования первых трещин (графы 4, 6) и моменту разрушения образцов (графы 5, 7).

Номер	Размер в	Площадь F,	Нагрузка, тс Нап		Напряже	яжение, кгс/см <sup>2</sup>	
образца	плане, см	CM <sup>2</sup>	Трещины	Разрушение	Трещины	Разрушение	
1	2	3	4	5	6	7	
1	100,2×37,5	3757,50	19,0	53,0	5,1	14,1	
2	100,3×37,5	3761,25	19,6	44,8	5,2	11,9	
3	100,3×37,5	3761,25	18,0	52,8	4,8	14,0	
4	100,3×37,5	3761,25	15,4	48,0	4,1	12,8	
5	100,7×37,5	3776,25	14,8	47,4	3,9	12,6	
Среднее					4,6	13,1	

Таблица 3. Результаты испытания кладки на прочность при сжатии

Для определения расчетного сопротивления кладки сжатию R можно воспользоваться формулой (3) СП 15.13330 [19]:

$$R = \frac{R_u}{k} = \frac{13.1}{2.2} = 6.0 \,(\text{kpc/cm}^2),\tag{1}$$

где  $R_u$  – временное сопротивление (средний предел прочности) сжатию кладки, кгс/см<sup>2</sup>, принимаемое по данным таблицы 3;

k – коэффициент надежности, принимаемый для кладки из крупных и мелких блоков из ячеистых бетонов равным 2,2 (по данным таблицы 15 СП 15.13330 [19]).

Следует отметить, что формула (3) СП 15.13330 [19] дана для кладок на цементно-песчаном растворе. Для кладки на клеевых составах численное значение коэффициента надежности k, принятого для перехода от среднего предела прочности к расчетному сопротивлению кладки сжатию, может отличаться от значений, представленных в таблице 15 [19].

На этом основании произведем определение нормативного значения сопротивления кладки сжатию на основе статистической обработки результатов испытаний, представленных в таблице 3. Рассчитаем среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(14,1-13,1)^2 + (11,9-13,1)^2 + (14,0-13,1)^2 + (12,8-13,1)^2 + (12,6-13,1)^2}{5}} = 0,85,$$
(2)

где  $x_i$  – численные значения частных результатов испытаний кладки на сжатие ( $x_i$  =  $R_i$  = 14,1; 11,9; 14,0; 12,8; 12,6 кгс/см<sup>2</sup>, см. данные графы 7 таблицы 3);

 $\overline{x}$  – средний предел прочности сжатию кладки,  $\overline{x}$  =  $R_u$  =13,1 кгс/см<sup>2</sup>; n – количество испытаний, n = 5.

На основе полученного среднеквадратического отклонения  $\sigma$  рассчитаем коэффициент вариации V. Получим:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{0.85}{13.1} = 0.065. \tag{3}$$

Видим, что вариация слабая, следовательно, полученная статистическая совокупность – однородная. На этом основании определим нормативное значение сопротивления кладки сжатию  $R_{\mu}$ :

$$R_{\mu} = R_{\mu} - t_{P} \cdot \sigma = 13.1 - 1.96 \cdot 0.85 = 11.4 \,(\text{krc/cm}^{2}),$$
 (4)

где  $R_u$  – то же, что в формуле (1);

 $\sigma$  – то же, что в формуле (2);

 $t_{
ho}$  — показатель достоверности, принимаемый для доверительной вероятности p=0,95 равным 1,96 [20].

Величина коэффициента  $t_p$  определяет для нормального закона число средних квадратических отклонений, которое нужно отложить вправо и влево от центра рассеивания для того, чтобы вероятность попадания в полученный участок была равна p.

Характер разрушения кладки на примере одного из испытанных фрагментов представлен на рисунке 8.

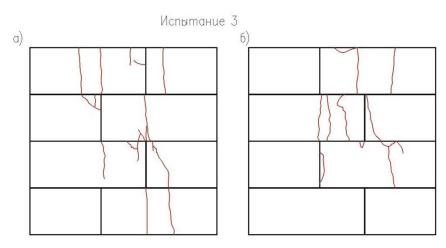


Рисунок 8. Схема разрушения образца №3

Диаграмма зависимости напряжения от деформации кладки σ = f(ε) для образца №3 представлена на рисунке 9.

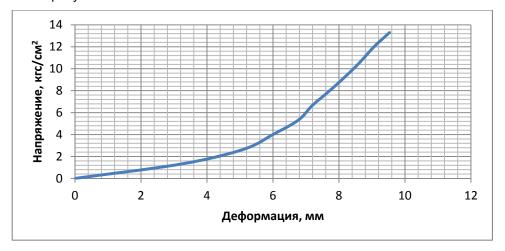


Рисунок 9. Диаграмма  $\sigma$  = f ( $\epsilon$ ) фрагмента кладки из газобетонных блоков на ППУ-клею

Характер поведения зависимости  $\sigma = f(\epsilon)$  (см. рисунок 9) показывает наличие трех характерных участков:

- 1) участок значительных деформаций при незначительных нагрузках;
- 2) участок упругих деформаций;
- 3) участок разрушения кладки.

Первый участок деформирования кладки обусловлен высокой деформативностью полиуретанового клея (однокомпонентной монтажной пены), заполняющего горизонтальные швы кладки. Первые трещины в кладке возникают в конце первого — начале второго участка деформирования кладки, т. е. задолго до потери несущей способности. Появление трещин на этом участке нагружения объясняется тем, что из-за значительной деформативности горизонтальных швов кладки блоки из газобетона начинают работать не только на сжатие, но и на изгиб. В результате на следующей стадии деформирования кладки (участок упругих деформаций) вплоть до потери несущей способности происходит интенсивное появление трещин (рисунок 8).

Прочностные испытания показали, что:

- средний предел прочности сжатию кладки из газобетонных блоков марки по плотности D400 на полиуретановом клею составляет 13,1 кгс/см<sup>2</sup>;
- расчетное сопротивление сжатию кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею *R* составляет 6.0 кгс/см<sup>2</sup>:
- полученное при испытаниях значение расчетного сопротивления сжатию *R* кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею (6,0 кгс/см²) численно соответствует расчетным сопротивлениям сжатию кладки из ячеистобетонных блоков автоклавного твердения на цементно-песчаном растворе марок от M4 (5,5 кгс/см²) до M10 (6,5 кгс/см²) согласно данным таблицы 3 СП 15.13330 [19], а также таблицы 6.6 СТО 501-52-01 [21];
- нормативное сопротивление кладки сжатию R<sub>H</sub>, рассчитанное на основании статистической обработки результатов испытаний, составляет 11,4 кгс/см<sup>2</sup>;
- характер поведения зависимости  $\sigma$  = f( $\epsilon$ ) (рис. 9) показывает наличие трех характерных участков: первый значительных деформаций при незначительных нагрузках, второй упругих деформаций, третий разрушения кладки;
- первый участок деформирования кладки обусловлен высокой деформативностью полиуретановой пены, заполняющей горизонтальные швы кладки;
- первые трещины в кладке возникают в конце первого начале второго участка деформирования кладки (см. данные рисунка 8), т. е. задолго до потери несущей способности. Появление трещин на данном участке объясняется тем, что из-за значительной деформативности горизонтальных швов кладки блоки из газобетона начинают работать не только на сжатие, но и на изгиб. В результате на следующей стадии деформирования кладки (на участке упругих деформаций) вплоть до потери несущей способности происходит интенсивное трещинообразование;
- значительные деформации кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею, приводящие к трещинообразованию кладки задолго до потери ее несущей способности, не позволяют использовать данную технологию кладки в случае возведения несущих стен зданий:
- кладку из газобетонных блоков на полиуретановом клею рекомендуется использовать при возведении ненесущих внутренних и наружных стен зданий при соответствующем расчетном обосновании.

## Теплофизические испытания

Испытания с целью определения сопротивления теплопередаче фрагмента кладки из газобетонных блоков на ППУ-клею проводились в испытательной лаборатории Строительных материалов ООО ФПГ «РОССТРО – ПКТИ» [22].

Габаритные размеры испытываемого фрагмента кладки стены соответствуют требованиям п. 2.2 ГОСТ 26254 [23]. Ширина и высота фрагмента составила 2100 мм, толщина 375 мм; площадь поверхности  $A_{\Sigma}$  – 3,24 м $^2$ , из них 3,227 м $^2$  площади поверхности фрагмента приходится на кладку из газобетонных блоков ( $A_{e.6}$ ) и 0,013 м $^2$  – на швы ( $A_{we}$ ).

По результатам испытаний фрагмента кладки в климатической камере согласно ГОСТ 26254 [23] термическое сопротивление фрагмента стены толщиной 375 мм по глади  $R_{w2}$  составило 1,737 м $^2$ . $^{\circ}$ С/Вт при фактической равновесной весовой влажности газобетонных блоков 22%. Термическое сопротивление фрагмента стены в швах кладки  $R_{we}$ , выполненных из полиуретанового клея, составило 5,0 м $^2$ . $^{\circ}$ С/Вт.

В связи с тем, что при дальнейших испытаниях уменьшение влажности кладки не наблюдалось, испытания были прекращены. Определение термического сопротивления  $R_{w1}$  и приведенного сопротивления теплопередаче испытываемого фрагмента стены по глади стеновой конструкции  $R_0^{\, \rm r}$  при равновесной весовой влажности 5% производилось расчетным способом [24] по методике СП 23-101 [25]. Расчет выполнен на основании протокола теплотехнических испытаний фрагмента кладки [22], проведенных по методике ГОСТ 26254 [23].

Расчетное значение термического сопротивления фрагмента стены толщиной 375 мм из газобетонных блоков марки по плотности D400 на полиуретановом клею при равновесной весовой влажности изделий в кладке 5%  $R_{w1}$  составило 3,44 м²-°С/Вт [24]. Расчетное значение сопротивления теплопередаче  $R_0^{\rm r}$  для условий эксплуатации «Б» (при равновесной весовой влажности изделий в кладке стен 5%) с учетом швов кладки, выполненных из полиуретанового клея, по глади стеновой конструкции составило 3,60 м²-°С/Вт [24].

#### Примечания:

- 1) при расчете приведенного сопротивления теплопередаче по глади рассматриваемого фрагмента не были учтены иные теплопроводные включения (оконные и дверные откосы, оконные и дверные перемычки, гибкие или жесткие связи для крепления облицовочного слоя, анкера для крепления утеплителя к кладке, диски плит перекрытий, межэтажные и подкровельные армопояса и т. п.).
- 2) равновесная весовая влажность для ячеистых бетонов автоклавного твердения 5% принята согласно примечанию к п. 3.15 ГОСТ 31359 [26].

## Огнестойкость

Испытание перегородки из неармированных блоков 625×250×100 мм (Д×В×Ш) из ячеистого бетона автоклавного твердения марки изделий по плотности D400, класса по прочности на сжатие не менее B2, толщиной 100 мм, изготовленных в соответствии с требованиями ГОСТ 31360 [1], уложенных с использованием однокомпонентного полиуретанового клея (таблица 1), проводились в испытательном центре «Огнестойкость» 3AO «ЦСИ «Огнестойкость» [27].

Испытания проводились по ГОСТ 30247.0 [28], ГОСТ 30247.1 [29]. Испытывались 2 образца перегородки размером  $3300\times3300\times100~\text{мм}$  (Д×В×Ш). Монтаж испытываемых образцов представлен на рисунках 10, 11. Фото испытываемого образца перед началом испытаний представлено на рисунке 12.





Рисунок 10. Нанесение ППУ-клея на поверхность очередного ряда кладки испытываемого образца

Рисунок 11. Укладка следующего ряда кладки испытываемого образца

Этап проведения испытаний показан на рисунке 13.

Продолжительность проведения испытаний: до наступления предельного состояния согласно ГОСТ 30247.0 [28] по потере целостности (E), по потере теплоизолирующей способности (I), в зависимости от того, какое из двух предельных состояний (E или I) наступит ранее.

По результатам испытаний предельное состояние по потере целостности (Е) было достигнуто:

- на образце №1 через 152 минуты от начала испытаний;
- на образце №2 через 164 минуты от начала испытаний.

Предельное состояние по потере теплоизолирующей способности (I):

- на образце №1 за время испытания не достигнуто;
- на образце №2 за время испытания не достигнуто.

Согласно требованиям таблицы 4\* СНиП 21-01 [30] для зданий степени огнестойкости I предел огнестойкости наружных ненесущих стен должен составлять не менее Е 30, для зданий степеней огнестойкости II, III, IV – не менее Е 15.

Согласно требованиям таблицы 1 СНиП 21-01 [30] для противопожарных перегородок типа 1 требуемый предел огнестойкости противопожарной преграды должен составлять не менее EI 45, для противопожарных перегородок типа 2 – не менее EI 15.





Рисунок 12. Испытываемый образец

Рисунок 13. Проведение испытания

На основании проведенных испытаний были сформулированы следующие выводы:

- предел огнестойкости образца перегородки из неармированных блоков 625×250×100 мм определен как среднеарифметическое результатов испытаний двух образцов и составляет EI 150;
- предел огнестойкости испытанной перегородки EI 150 соответствует требованиям СНиП 21-01 [30], предъявляемым к наружным ненесущим стенам зданий (табл. 4\*), а также к противопожарным перегородкам (табл. 1) типа 1 и типа 2.

## Воздухопроницаемость

Исследование воздухопроницаемости фрагмента кладки из газобетонных блоков автоклавного твердения марки по плотности D400 на полиуретановом клею проводилось в Научно-техническом центре по сертификации строительных конструкций ИЦ «БЛОК» ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» под руководством директора ИЦ «БЛОК» д.т.н., проф. Т.А. Дацюк [31].

Фрагмент кладки №1 складывался из блоков марки по плотности D400 с заполнением горизонтальных и вертикальных швов кладки полиуретановым клеем. Фрагмент кладки №2 складывался из блоков марки по плотности D400 на цементный клей с заполнением полиуретановым клеем только вертикальных швов кладки (горизонтальные швы кладки выполнялись на цементном клею).

Толщина испытываемых фрагментов кладки – 375 мм.

Воздухопроницаемость для каждого фрагмента кладки определялась при разности давлений от 70 до 1000 Па. Полученные результаты нормировались на единицу площади.

Результаты испытаний на воздухопроницаемость фрагмента № 1 кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею марки Soudabond-EASY с заполнением и горизонтальных, и вертикальных швов кладки ППУ-клеем представлены в таблице 4. По результатам испытаний воздухопроницаемость фрагмента №1 при разности давлений 10 Па составила 0,07 кг/м²-ч.

Сопротивление испытанного фрагмента №1 кладки воздухопроницанию при разности давлений 10 Па  $R_{10}$ , м²·ч·Па/кг, составило:

 $R_{10}$ =10/*i*=10/0,07=143 (м<sup>2</sup>·ч·Па/кг).

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
Разность давлений Р, Па	Расход воздуха, м <sup>3</sup> /ч	Расход воздуха, кг/м <sup>2</sup> ·ч				
1000	0.528	4.224				
900	0.510	4.080				
800	0.474	3.792				
700	0.438	3.504				
600	0.408	3.264				
500	0.360	2.880				
400	0.312	2.496				
300	0.258	2.064				
200	0.204	1.632				
100	0.108	0.864				
70	0.072	0.576				

Таблица 4. Результаты испытаний на воздухопроницаемость фрагмента №1 кладки из газобетонных блоков на полиуретановом клею

Результаты испытаний на воздухопроницаемость фрагмента №2 кладки из газобетонных блоков на цементном клею с заполнением вертикальных швов кладки ППУ-клеем представлены в таблице 5. По результатам испытаний воздухопроницаемость фрагмента №2 при разности давлений 10 Па составила 0,04 кг/м²-ч.

Сопротивление испытанного фрагмента кладки воздухопроницанию при разности давлений 10 Па  $R_{10}$ , м<sup>2</sup>·ч·Па/кг составило:

$$R_{10}$$
=10/*i*=10/0,04=250 (м<sup>2</sup>·ч·Па/кг).

Таблица 5. Результаты испытаний на воздухопроницаемость фрагмента №2 кладки из газобетонных блоков на цементном клею с заполнением вертикальных швов кладки ППУ-клеем

Разность давлений Р, Па	Расход воздуха, м <sup>3</sup> /ч	Расход воздуха, кг/м <sup>2</sup> ·ч
1000	0.72	0.864
900	0.64	0.768
800	0.61	0.732
700	0.56	0.672
600	0.48	0.576
500	0.42	0.504
400	0.38	0.456
300	0.29	0.348
200	0.23	0.276
100	0.11	0.132

## Выводы

На основании проведенного комплекса испытаний можно сформулировать следующие выводы.

- 1. Использование пенополиуретанового клея для скрепления газобетонных блоков в кладке стен технически осуществимо и экономически целесообразно.
- 2. Экономическая целесообразность данного типа кладки обусловлена тремя составляющими:
  - более высокой производительностью работ при монтаже кладки;
  - более низкой стоимостью возведения 1 м<sup>3</sup> кладки при существующем соотношении цен на полиуретановый клей и цементные составы;
  - более высокими теплоизоляционными свойствами кладки на ППУ-клею по сравнению с кладкой на цементном растворе или на тонкослойном цементном клею, а следовательно, и более низкими потерями тепловой энергии в течение отопительного периода.
- 3. Теплотехнические свойства фрагментов стен толщиной 375 мм, выполненных из газобетонных блоков на ППУ-клею, соответствуют нормативным требованиям к уровню Горшков А.С., Ватин Н.И. Свойства стеновых конструкций из ячеистобетонных изделий автоклавного твердения на полиуретановом клею

теплоизоляции (сопротивлению теплопередаче наружных стен) для большинства регионов Российской Федерации.

- 4. Предел огнестойкости испытанной перегородки из газобетонных блоков (толщиной не менее 100 мм) марки по плотности D400 на ППУ-клею составил EI 150, что соответствует требованиям СНиП 21-01 [30], предъявляемым к наружным ненесущим стенам зданий (табл. 4\*), а также к противопожарным перегородкам (табл. 1) типов 1 и 2.
- 5. Кладку из газобетонных блоков на полиуретановом клею допускается использовать при возведении ненесущих внутренних и наружных стен зданий, в том числе при заполнении наружных проемов каркасно-монолитных зданий с поэтажным опиранием кладки на несущие монолитные перекрытия, при соответствующем расчетном обосновании.

При проведении испытаний были выявлены некоторые ограничения для предложенной технологии возведения кладки:

- испытаний, проведенных при центральном сжатии испытываемых фрагментов кладки, недостаточно для рекомендации использования данного типа кладки при возведении несущих стен зданий;
- кладка на ППУ-клею затруднена при работе на открытой местности в условиях сильных порывов ветра (свыше 3 м/с), т. к. при данных скоростях ветра пена, нанесенная на горизонтальную поверхность блоков в кладке, может скатываться до установки последующего (верхнего) ряда кладки.

Для получения однозначного вывода о возможности или невозможности использования данного типа кладки при возведении несущих стен зданий требуются дополнительные испытания, в том числе при внецентренном сжатии фрагментов кладки, а также адгезии полиуретанового клея и блоков из ячеистого бетона в кладке.

Кроме того, требуются разъяснения производителей по поводу возможности применения полиуретанового клея в кладке наружных стен зданий, сроках службы ППУ-клея в конструкциях стен, а также способах защиты клея от ультрафиолетового облучения и перепадов температур (зима – лето).

До получения данных о сроке службы полиуретанового клея в наружных стенах зданий наиболее целесообразно его использование во внутренних перегородках с последующей отделкой стен (защищающей, в том числе, полиуретановый клей от прямого воздействия ультрафиолетовых лучей).

Авторы благодарят ООО «H+H» за предоставление протоколов испытаний и содействие в написании статьи. Авторы также выражают свою признательность профессору Р.Б. Орловичу за ряд ценных консультаций и обоснованных замечаний, которые были учтены при подготовке настоящего материала.

## Литература

- 1. ГОСТ 31360-2007. Изделия стеновые неармированные из ячеистого бетона автоклавного твердения. Технические условия.
- 2. Левченко В.Н., Гринфельд Г.И. Производство автоклавного газобетона в России. История, современность, перспективы // Научно-практическая конференция «Современное производство автоклавного газобетона»: сборник докладов. Под ред. научно-технического совета Национальной Ассоциации Производителей Автоклавного Газобетона. Санкт-Петербург, 2011. С. 5–9.
- 3. Горшков А.С., Гладких А.А. Влияние растворных швов кладки на параметры теплотехнической однородности стен из газобетона // Инженерно-строительный журнал. 2010. №3. С. 39–42.
- 4. Руководство по теплотехническому расчету наружных стеновых конструкций жилых и общественных зданий с применением изделия из ячеистого бетона автоклавного твердения в Российской Федерации. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 40 с.
- 5. Деркач В.Н., Орлович Р.Б. Трещиностойкость каменных перегородок // Жилищное строительство. 2012. №8. С. 34–37.
- 6. Jager A., Kuhlemann C., Habian E., Kasa M., Lu S. Verklebung von Planziegelmauerwerk mit Poliurethankleben // Mauerwerk. 2011. Vol. 15. No.4. Pp. 223–231.
- 7. Graubohm M., Brameshuber W. Investigations on the gluing of masonry units with polyurethane adhesive // 8<sup>th</sup> International Masonry Conference 2010. Dresden, 2010.
- 8. Schloeglmann, K.H. Long-Term Behavior of PUR-Glued Clay Block Masonry. // Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Brick and Block Masonry Conference, Sydney, 17 20 February 2008. Callaghan: University of Newcastle, 2008.

- 9. Marzahn G. Dry-Stacked Post-Tensioned Masonry; load bearing and deformation behavior / Forschung für die Praxis. Stuttgart: Teubner, 2000.
- 10. Klouda J.K. Research, evaluation and approval of masonry made of clay blocks with PU-adhesives // 8<sup>th</sup> International Masonry Conference 2010. Dresden, 2010.
- 11. Lu S., Kasa M., Habian E. Innovation on masonry glued with on-site PU-adhesives // 8<sup>th</sup> International Masonry Conference 2010. Dresden, 2010.
- 12. Brameshuber, W., Graubohm, M. Test Report: M 1341: Investigation on the Flexural Load Bearing Capacity of Masonry with Polyurethane Adhesive. unpublished, Aachen, 2009.
- 13. Heuer R., Seltenhammer. A.: Untersuchungen der technischen Eigenschaften sowie Festlegung der zu deklarierenden Werte des Mauerwerksklebers DRYFIX.extra der Fa. Wienerberger Ziegelindustrie GmbH. auf Polyurethanbasis für die Erlangung einer Österreichischen Technischen Zulassung (ÖTZ), unpublished, Technical University Vienna, 2009.
- 14. Lu S., Kasa M. Seismic test program of special designed clay blocks due to earthquake resistance by Wienerberger consisting real scale shaking table-, cyclic shear-, diagonal tension and compression tests. // Proceedings of the 14<sup>st</sup> World Conference on Earthquake Engineering. China, Beijing, 2008.
- 15. Wójcik M. Nowe technologie deweloperski sposób na biznes // Ceramika Budowana. 2011. No.4. Pp. 23–25.
- 16. Jasche R. Geklebte Ziegel // OIB aktuell. 2009. No.3. Pp. 22-25.
- 17. DIN 52612-3 EN-Testing of Thermal Insulating Materials; Determination of Thermal Conductivity by the Guarded Hot Plate Apparatus; Thermal Resistance of Laminated Materials for Use in Building Practice.
- 18. Научно-технический отчет по теме: «Исследование прочности и деформативности кладки из газобетонных блоков H+H марки по плотности D400 на полиуретановом клее Soudabond-EASY при сжатии» / ЗАО «Испытательный центр ВНИИГС».
- 19. СП 15.13330.2012 (Актуализированная редакция СНиП II-22-81\*). Каменные и армокаменные конструкции.
- 20. Леонтьев Н.Л. Техника статистических вычислений. М.: Лесная промышленность, 1966. 250 с.
- 21. СТО 501-52-01-2007. Часть І. Издание второе, дополненное. Проектирование и возведение ограждающих конструкций жилых и общественных зданий с применением ячеистых бетонов в Российской Федерации.
- 22. Результаты теплотехнических испытаний фрагмента кладки толщиной 375 мм из блоков стеновых неармированных из ячеистого бетона автоклавного твердения H+H марки по плотности D400 на полиуретановом клее Soudabond-EASY от 06.03.2012 / Испытательная лаборатория Строительных материалов ООО ФПГ «РОССТРО»-«ПКТИ».
- 23. ГОСТ 26254-84. Здания и сооружения. Методы определения сопротивления теплопередаче ограждающих конструкций.
- 24. Отчет о научно-исследовательской работе по теме: «Расчет приведенного сопротивления теплопередаче по глади стены фрагмента кладки из газобетонных блоков марки по плотности D400 на полиуретановом клею при равновесной весовой влажности ячеистого бетона 5 % на основании лабораторных испытаний фрагмента в климатической камере по ГОСТ 26254» / Институт материалов и технологий Объединенного научно-технологического института ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»
- 25. СП 23-101-2004. Проектирование тепловой защиты зданий.
- 26. ГОСТ 31359-2007. Бетоны ячеистые автоклавного твердения. Технические условия.
- 27. Протокол испытаний 34ск/и-2012 от 13 декабря 2012 г. / ИЦ «Огнестойкость» ЗАО «ЦСИ «Огнестойкость».
- 28. ГОСТ 30247.0-94. Конструкции строительные. Методы испытаний на огнестойкость. Общие требования.
- 29. ГОСТ 30247.1-94. Конструкции строительные. Методы испытаний на огнестойкость. Несущие и ограждающие конструкции.
- 30. СНИП 21-01-97\*. Пожарная безопасность зданий и сооружений.
- 31. Заключение по результатам исследования воздухопроницаемости фрагментов кладки из блоков автоклавного твердения H+H на полиуретановом клее Soudabond-EASY (2 фрагмента кладки) / Научно-строительный центр по сертификации строительных конструкций ИЦ «БЛОК» ФГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет».

\*Александр Сергеевич Горшков, Санкт-Петербург, Россия Тел. раб.: +7(921)3884315; эл. почта: alsgor@yandex.ru

© Горшков А.С., Ватин Н.И., 2013

# Совместная работа каменного заполнения и железобетонного монолитного каркаса

**К.т.н., заместитель директора В.Н. Деркач\*,** Филиал Республиканского унитарного предприятия «Институт БелНИИС» — Научно-технический центр

**Ключевые слова:** каменное заполнение; каркас здания; взаимодействие; предельное состояние; живучесть; проблема расчета

В настоящий период в России реализуется национальный проект «Доступное и комфортное жилье – гражданам России». При реализации данного проекта особое значение приобретает совершенствование конструктивных систем зданий и методов их расчета. Решение этих задач позволит повысить качество, долговечность и безопасность строительных конструкций на стадии проектирования.

Спрос на качественное жилье, а также потребность в разнообразии архитектурных форм обусловили большие объемы строительства монолитных каркасных зданий с каменным заполнением. При проектировании таких зданий в качестве несущих конструкций рассматриваются железобетонные элементы каркаса: колонны, ригели, плиты перекрытий и вертикальные диафрагмы жесткости. Каменное же заполнение в виде самонесущих перегородок и наружных стен выполняет ограждающие функции, а взаимодействие между ним и рамой каркаса игнорируется.

Такой подход к расчету каркаса подразумевает, что заполнение не оказывает никакого влияния на статическую работу несущих конструкций здания за исключением дополнительного воздействия от собственного веса каменной кладки. Это в определенной степени является справедливым, когда рама каркаса и панель заполнения отделены друг от друга, и между ними имеется достаточный зазор. Однако при строительстве каркасных зданий поэтажные деформационные швы обычно устраивают только между верхней гранью заполнения и диском перекрытия.

Если кладка заполнения выполнена из прочных материалов, то деформационный шов между заполнением и перекрытием может отсутствовать. При этом следует принимать во внимание очередность выполнения каменной кладки и каркаса. Когда кладка заполнения выполняется после возведения каркаса, то между верхней гранью заполнения и перекрытием образуется шов, через который вертикальное усилие на заполнение передаваться не может. Однако прогибы перекрытия, вызванные эксплуатационной вертикальной нагрузкой, а также реологические явления через определенное время могут привести к закрытию шва и установлению контакта между перекрытием и заполнением.

Когда колонны и диски перекрытия возводятся после стенового заполнения, можно считать, что его верхняя грань связана с диском перекрытия (стена подпирает перекрытие). В этом случае часть вертикального усилия с верхнего диска передается на заполнение. Следует отметить, что некоторые специалисты считают необходимым переход в монолитном домостроении на наружное стеновое ограждение с несущим внутренним слоем [1].

Каркасное здание обычно проектируется таким образом, чтобы вертикальные и горизонтальные воздействия воспринимались элементами каркаса. В реальных условиях эксплуатации каркас, испытывая вертикальные или горизонтальные деформации, взаимодействует с каменным заполнением, которое включается в совместную с ним работу. В работе [2] А.В. Перельмутер отмечает, что для разных режимов работы каркасного здания список его несущих элементов может быть различным.

Рациональное проектирование строительных конструкций требует по возможности максимального отражения их действительной работы в используемых методах расчета. Одним из путей решения этой проблемы в отношении каркасно-монолитных зданий с каменным заполнением является изучение взаимодействия заполнения с элементами каркаса при различных воздействиях.

Попытки учета такого взаимодействия предпринимались давно. Здесь, прежде всего, следует отметить исследования С.В. Полякова, целью которых являлось повышение сейсмостойкости зданий [3, 4]. В последнее время активные теоретические и экспериментальные Деркач В.Н. Совместная работа каменного заполнения и железобетонного монолитного каркаса

исследования в этом направлении ведутся за рубежом. Предпосылкой этому стало появление на рынке строительных материалов каменных изделий, не уступающих по прочности бетону. Кроме этого, возросший интерес зарубежных исследователей к совместной работе заполнения с каркасом обусловлен необходимостью повышения сейсмостойкости каркасных зданий после недавних разрушительных землетрясений, имевших место в странах южной Европы и Юго-Восточной Азии [5–7].

За последние десятилетия значительно обострилась проблема безопасности зданий и сооружений из монолитного железобетона при воздействиях, вызванных чрезвычайными происшествиями (взрыв, пожар, удары транспортных средств и т. п.) [8–10]. Учет фактора совместной работы каменного заполнения с каркасом здания при внезапном удалении колонны или температурном воздействии может быть одним из путей повышения живучести железобетонных конструкций каркаса.

В случае удаления одной из опор рамы происходит перекос панелей заполнения в вертикальном направлении. При этом в примыкающих к проседающей колонне панелях, вдоль их диагоналей образуются сжимающие силовые потоки, и заполнение вместе с контурными конструкциями начинает работать как распорная система, передающая усилия от верхних этажей на соседние колонны (рис. 1).

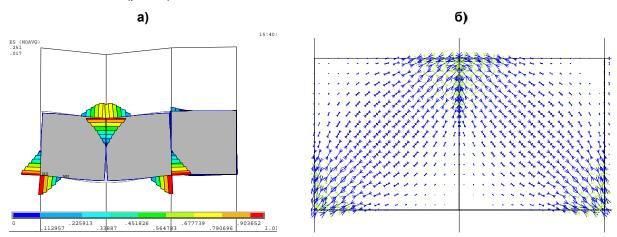


Рисунок 1. Напряженно-деформированное состояние заполнения при удалении опоры: а) деформация рамы с заполнением и распределение контактных напряжений; б) траектории действия главных напряжений

При деформировании каркаса усилия на каменное заполнение передаются в зонах контакта. Если шов между колоннами и заполнением не работает на растяжение, то в зонах контакта возникают только сжимающие напряжения (рис. 2a). В случае анкеровки каменного заполнения усилие передается посредством сжимающих и растягивающих напряжений (рис. 2б).

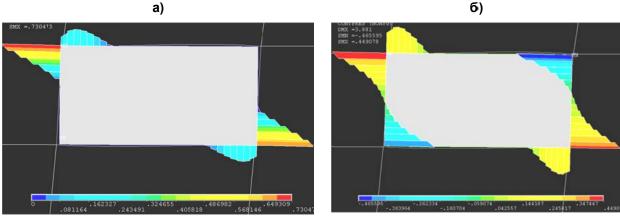


Рисунок 2. Распределение контактных напряжений при горизонтальном перекосе каркаса:
а) шов не воспринимает растягивающие напряжения;б) шов воспринимает растягивающие напряжения

Следует отметить, что на сегодняшний день вопросы сопряжения каменного заполнения с каркасом не регламентированы [11].

На примере трехпролетной плоской рамы, нагруженной по высоте сосредоточенной в узлах единичной горизонтальной нагрузкой, проанализировано влияние способа сопряжения его элементов с заполнением на деформативность каркаса. Кладка заполнения — ячеисто-бетонные блоки толщиной 300 мм на тонкослойных швах. Расчетный анализ производился в среде «ANSYS», при этом решалась конструктивно нелинейная контактная задача с учетом трения между поверхностями кладки и элементами каркаса. Деформационные характеристики материалов принимались линейно-упругими, что является справедливым для каменного заполнения, работающего в стадии эксплуатации.

#### Рассмотрено четыре случая:

- рама без заполнения (рис. 3а);
- рама, заполненная каменной кладкой, с горизонтальными деформационными швами между верхними гранями заполнения и нижними плоскостями дисков перекрытий; соединения между кладкой и элементами каркаса не воспринимают растягивающих усилий (рис. 3б);
- рама, заполненная каменной кладкой; соединения между кладкой и элементами каркаса не воспринимают растягивающие усилия; деформационный шов отсутствует (рис. 3в);
- рама, заполненная кладкой; соединения между кладкой и колоннами каркаса воспринимают растягивающие усилия; деформационный шов отсутствует (рис. 3г).

Расчеты показали, что даже при наличии горизонтальных деформационных швов жесткость рамы, заполненной кладкой, выросла почти в 3 раза по отношению к раме без заполнения. В случае полной заделки швов по всему контуру заполнения жесткость рамы увеличилась более чем в 4 раза, а при обеспечении восприятия растягивающих напряжений в стыках кладки с колоннами – в 7,5 раз.

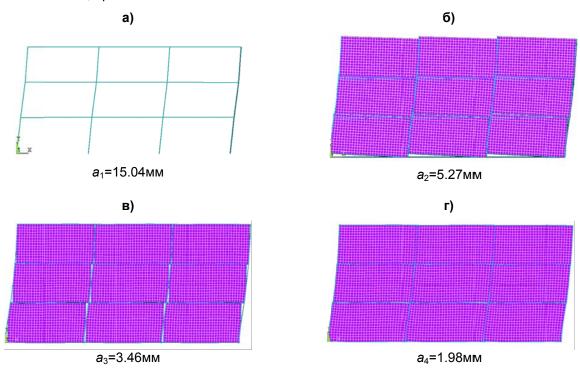
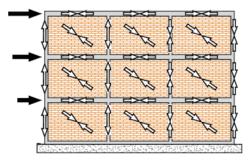


Рисунок 3. Деформации рамы при различных способах сопряжения ее элементов с заполнением (описание в тексте);  $a_i$  – максимальное перемещение узлов рамы

Представленный расчетный анализ носит качественный характер, тем не менее, он свидетельствует об эффективности повышения жесткости каркаса при его заполнении каменной кладкой.

Моделирование совместной работы каменного заполнения с каркасом трудно реализовать на практике, прежде всего, из-за отсутствия в применяемых программных комплексах необходимого расчетного интерфейса, сложности создания расчетной модели здания и большой размерности решаемой задачи. В инженерных расчетах заполнение можно заменить диагональными стержнями, воспринимающими только сжимающие усилия, в то время как железобетонные элементы каркаса работают на растяжение и/или сжатие в зависимости от направления ветровой нагрузки (рис. 4).



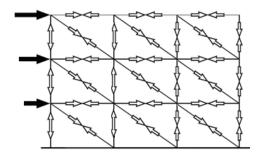


Рисунок 4. Моделирование каркасного здания с каменным заполнением

Для решения указанной задачи необходимо, чтобы жесткость диагональных подкосов была эквивалентна жесткости каменного заполнения. В расчетах модуль упругости стержневых подкосов назначается таким же, как модуль упругости каменной кладки, а площадь поперечного сечения зависит от ряда факторов, главными из которых являются жесткостные характеристики кладки, геометрические размеры панели заполнения, размеры и положение проемов, параметры контактной зоны. Влияние указанных факторов на работу каменного заполнения изучено недостаточно.

Приведенная на рисунке 4 модель позволяет оценить общую жесткость каркаса с заполнением, определить сжимающие усилия в каменной кладке, углы перекоса ячеек каркаса. Полученные эффекты воздействий не должны превысить граничных значений, при которых будет обеспечена эксплуатационная пригодность заполнения.

Появление трещин в каменной кладке заполнения в стадии эксплуатации исключается, если соблюдается условие  $\theta_{\it Rd} \leq \theta_{\it Radm}$ , где  $\theta_{\it Rd}$  – расчетное значение углов перекоса ячейки каркаса;  $\theta_{\it Radm}$  – граничное значение углов перекоса ячейки каркаса.

Значения  $\theta_{\it Radm}$  зависят от механических характеристик каменной кладки, геометрических размеров панели заполнения, способа ее сопряжения с элементами каркаса. В таблице 1 приведены результаты собственных исследований граничных углов перекоса ячеек монолитного каркаса  $\theta_{\it Radm}$  при традиционно применяемых размерах шага колонн, высоты этажа, поперечного сечения элементов каркаса.

Вид и прочность камня	Прочность кладочного раствора $f_m$ (МПа)	$\theta_{Radm} \times 10^3 (Mpad)$		
	pacibopa im (imila)	L/H = 1	L/H = 1.5	L/H = 2
	10.9	0.56	0.7	1.05
Полнотелый керамический кирпич M150	7.9	0.56	0.63	0.98
кирпич 101130	3.1	0.35	0.42	0.63
Керамический кирпич пустотностью 30% M150	10.9	0.63	0.77	1.19
Силикатный кирпич пустотностью 18% M150	10.9	0.49	0.63	0.91
Ячеистобетонный блок D500 B2.5 на тонкослойном клеевом растворе	7.5	0.53	0.63	0.85

Таблица 1. Граничные значения углов перекоса каркаса  $\, heta_{\scriptscriptstyle Radm}$ 

В отечественных нормах предельная величина перекоса панелей каркаса, заполненных каменной кладкой, принималась равной  $1/1500 \approx 0.67 \times 10^{-3}$  мрад. Согласно таблице 1 наиболее близкими к данному значению являются углы перекоса каркасов, заполненных кладкой на прочном растворе при отношении L/H = 1.5 (L и H – соответственно длина и высота панели заполнения).

Заполнение при перекосе каркаса вызывает перераспределение усилий в колоннах и плитах перекрытия, что может как положительно, так и отрицательно отразиться на их напряженно-деформированном состоянии. Это объясняется тем, что в силу своих конструкционных особенностей заполнение воспринимает и передает усилия не в узлах каркаса, а на участках определенной длины, где действуют сжимающие контактные напряжения. До образования в

кладке трещин эпюры контактных напряжений имеют треугольную или близкую к ней форму независимо от жесткости рамы и заполнения (рис. 2). По результатам численного анализа длина зон контакта панелей заполнения с железобетонными колоннами каркаса равна примерно 0,4 H, а с плитами перекрытия – 0,3 L при L/H > 1 и 0,4 L при L/H ≤ 1.

Величина поперечных сил Q и изгибающих моментов M, возникающих в элементах каркаса, зависит от сдвиговой жесткости заполнения. На рисунке 5 показаны графики изменения значений  $Q/Q_0$  и  $M/M_0$  в обрамляющих заполнение колоннах и плитах перекрытия в зависимости от модуля сдвига заполнения G при единичной горизонтальной нагрузке ( $Q_0$  и  $M_0$  — соответственно максимальные поперечная сила и изгибающий момент в элементах каркаса без заполнения,  $t_{panel}$  — толщина заполнения).

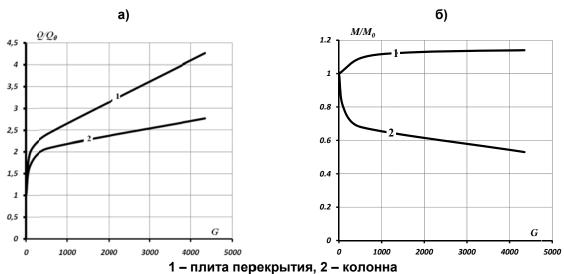


Рисунок 5. Графики зависимости: a) «Q/Q<sub>0</sub> – G»; б) «М/M<sub>0</sub> – G» (L/H = 2,  $t_{panel}$  = 300мм)

Из рисунка 5 следует, что даже при невысоких значениях модуля сдвига заполнения, характерных для кладок из ячеистобетонных блоков, максимальные значения поперечных сил в колонне возрастают примерно в 2 раза по сравнению с каркасом, в котором заполнение отсутствует. В то же время изгибающие моменты в колоннах снижаются в 1,6 раза, что положительно сказывается на их работе.

В результате включения каменного заполнения в работу каркаса достигаются следующие положительные эффекты:

- увеличивается изгибная и сдвиговая жесткость каркаса при действии горизонтальных нагрузок;
- при асимметрии ветровой нагрузки увеличивается крутильная жесткость каркаса, поскольку каменные наружные стены работают как оболочка;
- уменьшаются узловые изгибающие моменты в каркасе;
- повышается динамическая жесткость, что имеет существенное значение при сейсмических воздействиях. Благодаря вязкости каменной кладки происходит рассеивание энергии при подземных толчках [12].

При этом важно понимать также и то, что взаимодействие между заполнением и каркасом в некоторых случаях может приводить к нежелательным эффектам, таким как:

- хрупкое разрушение при сдвиге заполнения или элементов каркаса;
- неудачное распределение жесткости в плане здания из-за нерегулярного расположения панелей заполнения, приводящее к увеличению скручивающего эффекта;
- появление эффекта короткой колонны в случае заполнения не на всю высоту этажа.

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что исследование взаимодействия заполнения с каркасом здания представляет особый интерес не только с позиции работы каменной кладки, но также с точки зрения ее влияния на работу примыкающих конструкций. Учет этого фактора может в значительной степени откорректировать геометрические характеристики элементов каркаса и их армирование. Поэтому пренебрегать положительным влиянием взаимодействия каркаса и каменного заполнения нерационально с точки зрения экономии материалов и выявления дополнительных резервов несущей способности строительных конструкций.

Другим примером взаимодействия каменного заполнения с элементами каркаса является работа перегородок при прогибах опорного перекрытия. Непосредственно после возведения перегородки из-за податливости свежих растворных швов ее деформации следуют за деформациями перекрытия. После набора прочности растворными швами каменной кладки увеличение прогибов перекрытия вследствие реологических процессов в бетоне, а также действия дополнительных нагрузок приводит к нарушению контакта между перекрытием и перегородкой. В результате перераспределения контактного давления изгибающие моменты в перекрытии от веса перегородки уменьшаются, а перегородка начинает работать как балка-стенка, загруженная собственным весом и опертая на концах (рис. 6). Вследствие этого в перегородке возникают касательные и растягивающие напряжения, которые могут привести к образованию трещин [13].

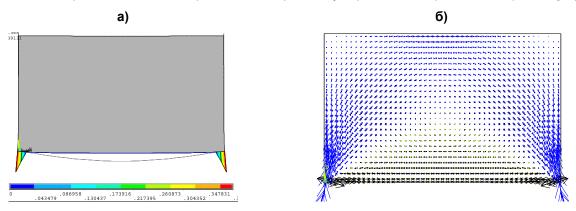


Рисунок 6. Напряженно-деформированное состояние перегородки: а) распределение контактных напряжений; б) траектории главных напряжений

В нормативных документах критерием эксплуатационной пригодности каменных стен и перегородок является граничное значение прогиба опорного перекрытия. При этом в нормах разных стран (СП 20.13330.2011, Еврокод 2, АСІ 530-05/ТМЅ 402-05, DIN 1045-1: 2001) приводятся различные данные, касающиеся числовых значений граничных прогибов перекрытий, которые не зависят от вида каменной кладки, ее прочностных и деформационных характеристик, а также конструктивных особенностей стен и перегородок [14]. Данное обстоятельство не позволяет гарантировать отсутствие трещин в каменных конструкциях при достижении опорным перекрытием граничных прогибов, соответствующих требованиям упомянутых нормативных документов. Необходимо отметить, что граничные прогибы опорных конструкций, установленные в вышеуказанных нормах, получены в 60-х годах прошлого столетия на основании натурных обследований стен и перегородок эксплуатируемых зданий и до сих пор не имеют достаточного экспериментально-теоретического обоснования [15, 16].

Экспериментальные исследования и численный анализ показывают, что величина граничного прогиба опорного перекрытия зависит от множества факторов: геометрических размеров перегородки, прочностных и деформационных свойств каменной кладки, граничных условий перегородок и диска перекрытия, а также характеристик контакта — коэффициента трения и касательного сцепления.

В таблице 2 приведены полученные численным расчетом значения граничной кривизны оси опорного перекрытия  $1/r_{adm}$  и соответствующие им относительные предельные прогибы u/L для различных отношений длины перегородки к ее высоте L/H. Необходимые для численного анализа прочностные и деформационные характеристики кладки были предварительно определены на основании испытаний опытных образцов [17, 18].

. 40.144 2. 4						
Вид каменной кладки	L/H	1/r <sub>adm</sub> · 10 <sup>6</sup> (1/мм)	u/L			
Из полнотелого	1	16.8	1/190			
керамического кирпича	1.5	6.3	1/340			
М150 на растворе М100	2	3.2	1/500			
	3	1.58	1/676			
Из ячеистобетонных блоков	1	3.7	1/864			
В2.5 на тонкослойном	1.5	1.9	1/1125			
клеевом растворе М75	2	1.33	1/1205			

Таблица 2. Относительные предельные прогибы перекрытий

Деркач В.Н. Совместная работа каменного заполнения и железобетонного монолитного каркаса

По результатам численного расчета предельные значения относительных прогибов свободно опертых однопролетных перекрытий в наибольшей степени соответствуют требованиям европейских и североамериканских норм для каменных кладок, выполненных из полнотелого керамического кирпича при L/H>1.5. В то же время для кирпичных перегородок с соотношением размеров L/H=1 предельные относительные прогибы опорного перекрытия близки к значениям, установленным в СП 20.13330.2011. Приведенные в таблице 2 относительные предельные прогибы перекрытий относятся к сплошным перегородкам. Для перегородок с проемами значения предельных прогибов опорных конструкций могут быть существенно ниже.

Каменное заполнение, взаимодействуя с каркасом здания, при прогибах перекрытия испытывает изгиб, а при перекосах каркаса — сжатие. Возможна также комбинация воздействий на заполнение при одновременном прогибе перекрытия и перекосе каркаса. Несмотря на имеющиеся различия в работе заполнения при разных формах деформирования каркаса, общей чертой является то, что работа происходит в условиях плоского напряженного состояния. В этом случае для оценки напряженно-деформированного состояния каменной кладки обычно используются численные расчеты, в основу которых положен метод конечных элементов. В то же время оценка трещиностойкости заполнения в условиях плоского напряженного состояния выполняется с применением соответствующих критериев прочности, использование которых возможно лишь при наличии входных данных, отражающих прочностные характеристики конкретных видов каменной кладки при одноосных нагружениях [19, 20]. Указанные характеристики могут быть получены только экспериментальным путем.

Сложность решения поставленных задач заключается в том, что каменная кладка является анизотропным материалом с широким диапазоном прочностных и деформационных свойств. В отличие от бетона или стали, имеющих относительно стабильные свойства независимо от региона, в котором они произведены, механические характеристики каменной кладки изменяются значительно в зависимости от местных составляющих материалов (кладочных камней и раствора), а также качества выполнения работ. Этим определяется необходимость проведения большого объема экспериментальных исследований для получения статистических данных по прочностным и деформационным характеристикам каменных кладок не только в направлении главных осей анизотропии, совпадающих с направлением растворных швов, но и под различными к ним углами.

Обобщение изложенного материала позволяет выявить и всесторонне рассмотреть проблему расчета и конструирования каркасно-монолитных зданий с учетом взаимодействия каменного заполнения и элементов каркаса, суть которой заключается в отсутствии единой обоснованной методики расчета. Основной причиной существующей проблемы является недостаток информации о напряженно-деформированном состоянии заполнения и элементов каркаса при возможных случаях их взаимодействия. Сложившаяся ситуация обусловлена малочисленностью и разрозненностью экспериментальных и теоретических исследований совместной работы указанных конструкций и отсутствием обобщенного анализа этих исследований. Кроме того, существует острый недостаток информации о прочностных и деформационных характеристиках каменной кладки как анизотропного неоднородного материала, что создает трудности при численном моделировании взаимодействия заполнения с каркасом и определении граничных значений эффектов воздействий.

## Выводы

- 1. При проектировании каркасно-монолитных зданий с каменным заполнением необходимо учитывать взаимодействие заполнения с элементами каркаса. В одних случаях это позволяет сэкономить материальные ресурсы при возведении здания, снизить энергозатраты и стоимость строительства, а в других предотвратить непрогнозируемое наступление предельных состояний заполнения или элементов каркаса.
- 2. Статический расчет каркаса с учетом его взаимодействия с каменным заполнением может быть реализован с применением упрощенных моделей заполнения, основанных на стержневой аналогии (замене заполнения сжатыми раскосами). При этом модуль упругости стержневых подкосов назначается таким же, как модуль упругости каменной кладки, а площадь поперечного сечения зависит от ряда факторов, главными из которых являются жесткостные характеристики кладки, геометрические размеры панели заполнения, размеры и положение проемов, параметры контактной зоны.
- 3. Действующие нормативные документы требуют корректировки в части предельных значений углов перекоса панелей каркаса, заполненных каменной кладкой, а также прогибов перекрытий, на которые опираются каменные стены и перегородки (таблицы 1, 2).

4. Оценку трещиностойкости заполнения при перекосе панелей каркаса и прогибах опорных перекрытий следует выполнять с применением соответствующих критериев прочности, использование которых в отечественной практике возможно лишь при наличии входных данных, отражающих прочностные характеристики конкретных видов каменной кладки при одноосных нагружениях. Указанные характеристики могут быть получены только экспериментальным путем.

### Литература

- 1. Николаев С.В. СПКД-система строительства жилья для будущих поколений // Жилищное строительство. 2013. №1. С. 2–4.
- 2. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 596 с.
- 3. Поляков С.В. Каменная кладка в каркасных зданиях. М.: Государственное издательство по строительству и архитектуре, 1956. 192 с.
- 4. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий. М.: Высшая школа, 1983. 304 с.
- 5. Pujol S., Benavent-Climent A., Rodriguez M., Smith-Pardo J. Masonry infill walls: An effective alternative for seismic strengthening of low-rise reinforced concrete building structures // Proceedings of the 14<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering. Beijing, China, 2008. Pp. 1–8.
- 6. Baran M., Tankut T. Experimental Study on Seismic Strengthening of Reinforced Concrete Frames by Precast Concrete Panel // ACI Structural Journal. 2011. No.3. Pp. 227–237.
- 7. Moghaddam H.A. Lateral load behaviour of masonry infilled steel frames with repair and retrofit // Journal of Structural Engineering. ASCE. 2004. No.130(1). Pp. 56–63.
- 8. Колчунов В.И., Моргунов М.В., Кожаринова Л.В., Прасолов Н.О. К вопросу алгоритмизации задачи расчета живучести железобетонных конструкций при потере устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №12. С. 52–54.
- 9. Клюева Н.В., Тамразян А.Г. К влиянию ограничения температурных деформаций железобетонных изгибаемых элементов на живучесть зданий и сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №12. С. 49–52.
- 10. Yap S.L., Li B. Experimental Investigation of Reinforced Concrete Exterior Beam-Column Subassemblages for Progressive Collapse // ACI Structural Journal. 2011. No.9. Pp. 542–552.
- 11. Деркач В.Н., Орлович Р.Б. Взаимодействие каменного заполнения с каркасом зданий // Жилищное строительство. 2012. №10. С. 9–12.
- 12. Meli R., Brzev S., Astroza M. [et al.] Seismic Design Guide for Low-rise Confined Masonry Buildings: Confined Masonry Network. A Project of the World Housing Encyclopedia, EERI & IAEE. With funding support from Risk Management Solutions. 2011. 87 p.
- 13. Drobiec L., Kubica J. Zapobieganie zarysowaniom scian murowych opartych na stropach zelbetowych // Materialy budowlane. 2006. No.404. Pp. 21–23.
- 14. Деркач В.Н., Орлович Р.Б. Трещиностойкость каменных перегородок // Жилищное строительство. 2012. №8. С. 34–37.
- 15. Brameshuber W., Beer I., Kang Bong-Gu. Untersuchungen zur Vermeidung von Rißschäden bei nicht tragenden Trennwänden // Mauerwerk. 2007. Vol. 11. Issue 1. Pp. 54–62.
- 16. Göttlich P. Begrenzung der Biegeschlankheit nach Eurocode 2 // Beton und Stahlbetonbau. 2012.Vol. 107. Issue 1. Pp. 38–45.
- 17. Деркач В.Н. Прочность касательного сцепления цементных растворов в каменной кладке // Инженерно-строительный журнал. 2012. №3(29). С. 19–28.
- 18. Деркач В.Н. Анизотропия прочности каменной кладки на растяжение при раскалывании // Научнотехнические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. 2012. №2–2(147). С. 259–264.
- 19. Орлович Р.Б., Деркач В.Н. Критерии прочности, применяемые в зарубежной практике расчета и проектирования каменных конструкций // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2011. №6. С. 101–106.
- 20. Орлович Р.Б., Деркач В.Н. Применение классических теорий прочности для расчета каменной кладки в условиях сложного напряженного состояния // Строительство и реконструкция. 2011. №1(33). С. 35–40.

\*Валерий Николаевич Деркач, г. Брест, Республика Беларусь Тел. +375-296-411962; эл. почта: v-derkatch@yandex.ru

© Деркач В.Н., 2013

# Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней

К.т.н., доцент А.В. Алексейцев\*,

ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия»

**Ключевые слова:** эволюционное моделирование; элитизм; параметрическая оптимизация; фермы; генетические операторы; слабовзаимодействующие популяции; конечно-элементный расчет; парные уголки; узловые соединения

В настоящее время генетические алгоритмы применяются для решения некоторых задач оптимизации строительных конструкций. Прежде всего, это параметрический синтез, в результате которого реализуется минимизация массы деформируемых объектов [1–9]. Также известны подходы, где наряду с параметрической оптимизацией выполняются синтез рациональной топологии стержневых систем [7, 10–12], поиск предельной нагрузки [7, 13], многоцелевая оптимизация деформируемых объектов [14, 15]. Для получения высокопроизводительных итерационных схем используются параллельно эволюционирующие популяции [1, 12], высокоуровневые генетические операторы [8], применяются штрафные функции [2, 7, 15–17] и другие процедуры.

В большинстве известных подходов к эволюционной оптимизации не в полной мере учитываются особенности изготовления конструкций, в частности, устройство узловых соединений. Анализ технологии производства ферм, синтезированных только на основе минимума массы стержней, показал, что некоторые такие объекты нерационально применять из-за большого расхода материала и значительных затрат труда, требуемого для устройства узлов, удорожания конструкции ввиду увеличения отходов металла. В данной статье описан процесс построения генетического алгоритма параметрической оптимизации ферм с возможностью учета стоимости устройства узловых соединений.

## 1. Общая постановка задачи

Будем рассматривать линейно-деформируемую стержневую ферму, для которой сформирована следующая функция цели:

$$C = C_M + C_T \to \min, \tag{1}$$

где C – плановая себестоимость конструкции;  $C_M$  – стоимость материала стержней фермы;  $C_T$  – стоимость узловых соединений. Считаем, что конструкция эксплуатируется в нормальных условиях и относится к первому классу напряженно-деформированного состояния (п. 4.2.7 [20]), при котором пластические деформации в конструктивных элементах и узлах их соединений не учитываются.

При параметрической оптимизации для рассматриваемой конструкции значение  $\,C_{M}\,$  можно записать в виде:

$$C_M = f(\{T\}, \{X\}, \{Y\}, \{Z\}),$$
 (2)

где  $\{T\}$  — дискретные множества допустимых для выбора профилей стержней, задаваемые интегральными геометрическими характеристиками сечений;  $\{X\}, \{Y\}, \{Z\}$  — множества варьируемых координат узлов в декартовой системе осей Oxyz.

$$C_T = f(\lbrace N \rbrace, \lbrace \alpha \rbrace), \tag{3}$$

где  $\{N\}$  — значения векторов расчетных продольных усилий в стержнях;  $\{\alpha\}$  — множество углов между продольными осями стержней.

Учитываются следующие ограничения:

- 1) геометрическая неизменяемость стержневой системы.
- 2) равновесие узлов конечно-элементной модели объекта [18]:

$$[K]\delta_i = R_i, \ i = 1...n,\tag{4}$$

где [K] — матрица жесткости конечно-элементной модели объекта;  $\delta_i$ ,  $R_i$ — векторы перемещений и узловых сил i -го нагружения; n — число вариантов нагружений;

- 3) условия прочности и устойчивости стержней, условие жесткости конструкции в соответствии с нормами [19, 20];
- 4) общая устойчивость конструкции.

## 2. Оптимизационная процедура

Рассмотрим построение итерационной схемы для плоских ферм. Каждый вариант фермы представляем в виде особи, состоящей из одной хромосомы (строковой переменной), содержание которой определяется значениями варьируемых параметров  $\{T\}, \{X\}, \{Y\}$ . Процесс решения задачи формируем по принципу функционирования генетической итерационной схемы работы [8]. Отличие предлагаемого алгоритма состоит в том, что в процедуре параметрического синтеза решается задача (1) и реализуются некоторые принципы алгоритма слабовзаимодействующих популяций [12].

Определим популяции, используемые в итерационной схеме. Под популяцией понимаем группу вариантов конструкций (особей), которые рассматриваются на каждой итерации алгоритма (в каждом поколении). Популяция  $\Pi 1$  – группа особей, формируемая в каждой итерации на основе генетических операторов. Под генетическими операторами понимаем процедуры, реализующие обмен генами (значениями параметров) или изменения генов для особей. Популяция  $\Pi 2$  – группа особей, имеющих лучшие (элитные) значения C и удовлетворяющих всем ограничениям. Популяция  $\Pi 3$  – группа, содержащая особи, имеющие элитные значения  $C_M$ . Популяции  $\Pi 1$ ,  $\Pi 2$  и  $\Pi 3$  эволюционируют параллельно. Приведем на рисунке 1 блок-схему алгоритма оптимизации и поясним содержание приведенных на ней элементов.

В блоке 1 задается информация о конечно-элементной модели деформируемого объекта (топология объекта, характеристики материалов, сведения о нагружениях, кинематических ограничениях). Формируются данные о варьируемых параметрах, ограничениях по прочности и устойчивости стержней, ограничениях по жесткости конструкции.

В блоке 2 для каждой особи в популяции случайным образом выбираются значения варьируемых параметров  $\{T\}, \{X\}, \{Y\}$ . Для одной из особей назначаются максимальные по модулю значения параметров. Эта операция выполняется во избежание известной проблемы возникновения «пустых» популяций.

В блоке 3 формируется популяция П1, подлежащая расчету и проверке ограничений в каждом поколении (итерации) алгоритма. Формирование особей этой популяции на первой итерации происходит путем их копирования из популяции блока 2, а на второй и последующих итерациях – путем реализации процедур блока 9.

В блоке 4 для особей популяции П1 реализуется расчет конструкций по методу конечных элементов [18]. Для варианта несущей системы выполняется построение матрицы жесткости, после чего при помощи разложения Холецкого решается система уравнений (4). После вычисления перемещений, усилий и напряжений в конструктивных элементах проверяются ограничения 2 и 3. Если конструкция удовлетворяет всем ограничениям, то она считается работоспособной и принимается для дальнейшего анализа. Для каждого варианта объекта здесь вычисляется масса стержней  $C_M$ .

Блоки 5 и 7 содержат процедуры редактирования популяций в соответствии с принципом сохранения лучшего решения («элитизма»). Этот принцип состоит из проверки двух условий:

- для данной особи в элитной популяции не должно существовать такой же особи;
- для данной особи величина целевой функции не должна превышать максимальной величины целевой функции для объектов, уже находящихся в популяции.

Алексейцев А.В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней

Если эти условия удовлетворены, то данная особь включается в элитную популяцию. Если число особей в ней превышает некоторую максимально допускаемую величину, то объект с наихудшим значением целевой функции из нее исключается.

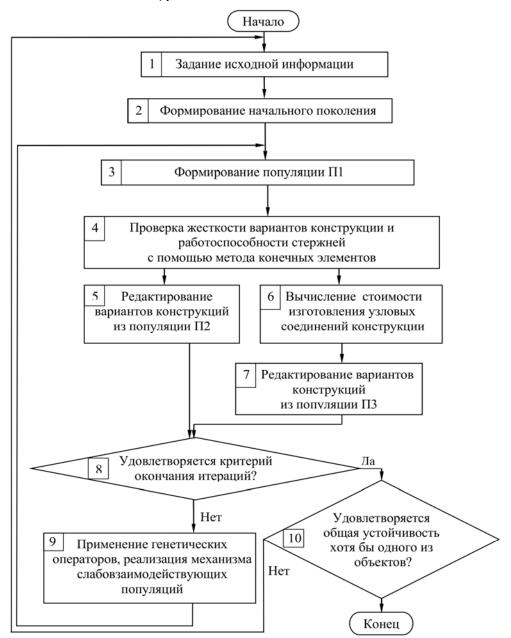


Рисунок 1. Блок-схема процесса оптимизации

В блоке 6 для каждой работоспособной особи популяции П1 вычисляется стоимость изготовления конструкции  $C_T$ , включающая устройство узловых соединений и учитывающая специфику технологии производства конструкции. Значение  $C_T$  для фермы из парных уголков, соединяемых на сварных фасонках, можно представить в виде:

$$C_T = C_{M,CB} + C_p + C_{V2} + C_H,$$
 (5)

где  $C_{{\scriptscriptstyle M},{\scriptscriptstyle C}{\scriptscriptstyle B}}$  – стоимость сварочных материалов и работ при устройстве узловых соединений;  $C_p$  – стоимость разметки и резки стержней с профилями из парных уголков;  $C_{{\scriptscriptstyle y}{\scriptscriptstyle c}}$  – стоимость соединения угловых профилей по длине планками;  $C_{{\scriptscriptstyle H}}$  – стоимость накладок и материалов для их соединения в монтажных узлах.

Величину  $C_{\mathit{M,CR}}$  учитываем выражением

$$C_{M,CB.} = C_w \sum_{i=1}^{n} l_{wi} + \sum_{j=1}^{m} C_{\phi j} (m_{\phi j} - k m_o),$$
(6)

где  $C_w$  – стоимость единицы длины сварного шва;  $l_{wi}$  – длина сварных швов, определяемая по формулам норм [5] в зависимости от величины продольных сил в стержнях;  $C_{\phi j}$  – стоимость единицы массы материала фасонки j;  $m_{\phi j}$  – масса фасонки j; n – число свариваемых участков; m – число узлов фермы; k – коэффициент, учитывающий снижение стоимости листового металла, идущего в отходы;  $m_o$  – масса отходов металла.

Величину  $C_p$  приближенно можно вычислить по формуле:

$$C_p = \sum_{ip=1}^{np} c_i n_{ip} h_{ip} + \sum_{ip=1}^{np} c_{ip} l_{ip} , \qquad (7)$$

где  $c_i$  — стоимость резки единицы длины профиля;  $n_{ip}$  — число угловых профилей ip-го типоразмера в сечении стержня;  $h_{ip}$  — высота профиля ip-го типоразмера;  $c_{ip}$  — стоимость разметки единицы длины профиля стержня;  $l_{ip}$  — длина профиля, подлежащего разметке; np — число стержней.

Определяем стоимость соединения стержней планками:

$$C_{yz} = 4k_p \sum_{i=1}^{np} \left( \frac{l_i l_{pi}}{l_{npi}} \right) + C_{n\pi},$$
(8)

где  $k_p$  – коэффициент, учитывающий стоимость сварки одной планки;  $l_{npi}$  – шаг планок, выбираемый для стержня i;  $l_{pi}$  – размер планки, вдоль которого выполняется сварка с профилем;  $l_i$  – длина стержня фермы;  $C_{n\pi}$  – стоимость всех соединительных планок.

Величина  $C_{\scriptscriptstyle H}$  рассчитывается следующим образом:

$$C_{H} = C_{W} \sum_{i,m=1}^{nm} l_{W,im} + \sum_{q=1}^{nn} C_{nq} (m_{nq} - km_{o}) + \sum_{i,m=1}^{nm} (C_{\tilde{o},im} + \widetilde{C}_{\tilde{o},im}),$$
(9)

где  $l_{w,im}$  — длина сварных швов накладок, устанавливаемых в монтажном узле; nm — число монтажных узлов;  $C_{nq}$  — стоимость единицы массы накладки q;  $m_{nq}$  — масса накладки q; nn — число всех накладок;  $C_{\tilde{o},im}$  — стоимость монтажных болтов, шайб и гаек, устанавливаемых в узле;  $\widetilde{C}_{\tilde{o},im}$  — стоимость установки болтов.

Рассчитанные в блоке 4 и 6 конструкции проходят проверку в блоках 5, 7 и в зависимости от значений целевых функций C и  $C_M$  далее помещаются в популяции П2 и П3 соответственно.

Блок 8. В качестве критерия остановки итераций принимаем условия отсутствия изменений в популяциях П2 и П3 на протяжении 300 поколений [7].

В блоке 9 реализованы высокоуровневые генетические операторы селекции, кроссинговера и мутации, описанные в работе [8]. Селекция выполняется для Q/2 пар особей методом рулетки. Оператор мутации реализуется для каждого выбранного при селекции варианта конструкции. Кроссинговер и мутация реализуются по многоточечным схемам.

Популяции П1—П3 функционировали в итерационном процессе в соответствии с принципами алгоритма слабовзаимодействующих популяций, подробно рассмотренного в работе [12]. Обмен особями осуществлялся между популяциями П1, П2 и П1, П3. Взаимодействие между популяциями заключалось в следующем:

- в каждом десятом поколении в качестве родительских особей для кроссинговера выбиралось по одной особи из каждой элитной популяции;
- для реализации мутации в каждом пятнадцатом поколении в популяцию П1 включалось по две особи, выбираемые из популяций П2 и П3.

В рамках блока 10 на основе метода конечных элементов анализируется общая устойчивость для объектов, вошедших в популяции П2 и П3. Если условие выполнено, то вариант конструкции рассматривается как результат решения задачи.

# 3. Учет узловых соединений

Для каждой сформированной в итерационном процессе конструкции выполняется ряд этапов.

- 1. Вычисляются длины всех стержневых элементов. Формируются базы стоимости резки и разметки стержневых элементов в зависимости от типоразмеров, используемых в генетическом алгоритме.
- 2. Формируется список номеров стержневых элементов, сходящихся в каждом узле. Нумерация делается в направлении обхода по часовой стрелке, начиная с левой стороны от узла. Создаются базы данных, включающие величины толщин уголков и значения  $h_i$ ,  $z_i$  для каждого i-го стержня (см. рис. 2). Далее для каждого из узлов выполняются этапы 3–7.

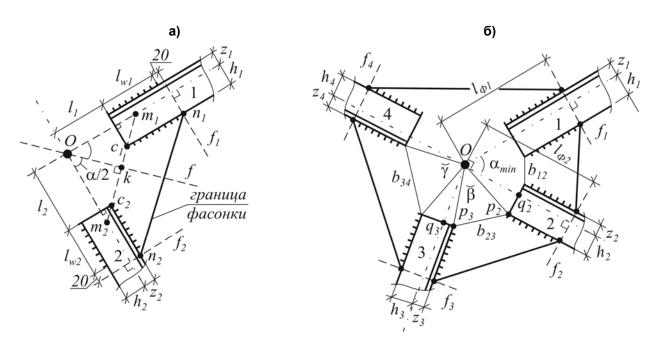


Рисунок 2. Пример компоновки узла, в котором сходятся четыре стержня: а) схема размещения на фасонке первой пары стержней; б) схема к определению расположения остальных стержней

- 3. Вычисляются величины углов множества  $\{\alpha\}$  между осями соседних стержней, сходящихся в узле. Вычисляются вспомогательные углы, определяющие положение первого и последнего стержня относительно горизонтальной оси конструкции.
- 4. На площади фасонки размещаются стержни. Присоединение нового стержня к последующим выполняется в направлении по часовой стрелке. Первая пара стержней, образующих минимальный угол  $\alpha_0$  из множества  $\{\alpha\}$ , размещается по схеме, показанной на рисунке 2a. Задается минимальная величина  $b_{\min}$  сближения угловых профилей друг с другом. Для двух соседних стержней, показанных на рисунке 2a,  $b_{\min} = c_1 c_2$ . На основе  $b_{\min}$  Алексейцев А.В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней

вычисляются расстояния  $l_1$  и  $l_2$  от торцов каждого из уголков до точки пересечения продольных осей рассматриваемых стержней. Вычисление величин  $l_1$  и  $l_2$  выполняется при условии, что треугольник  $Om_1m_2$  равнобедренный, а профили размещены с обязательным выполнением условия  $(c_1 \in m_1m_2) \wedge (c_2 \in m_1m_2)$ . Размещение других стержней поясним на примере стержня 3, показанного на рисунке 26. Проводятся отрезки  $Op_2$  и  $Op_3$ , при этом первоначально принимается  $Op_2 = Op_3$ . С использованием треугольников  $Op_3q_3$  и  $Op_2q_2$  вычисляется угол  $\breve{\beta}$ . Из треугольника  $Op_2p_3$  по теореме косинусов вычисляется величина  $b_{23}$ . Эта величина сравнивается с  $b_{\min} = b_{12}$ . Если  $b_{\min} \le b_{23} \le 1,2b_{\min}$ , то переходим к размещению следующего стержня.

Если неравенство не выполняется, то реализуется алгоритм одномерного поиска при  $b_{23} \! o \! \min$ . Для этого изменяется длина отрезка  $O\!p_3$  с постоянным шагом  $\Delta h = 0.1b_{\min}$ . Аналогично присоединяется последний стержень, для которого реализуется поиск минимальной величины  $b_{34}$ .

5. Для каждого из стержней в зависимости от толщины t профиля уголка задается катет сварных швов, прикрепляющих стержень к фасонке. Учитываются рекомендации норм [20].

$$k_f = \begin{cases} t, \text{ при } t < 12\text{мм} \\ 0,6t, \text{ при } t \ge 12\text{мм} \end{cases}$$

При автоматическом режиме сварки общую длину сварных швов, необходимых для прикрепления стержня к фасонке, определяем из условий [20]:

$$l_{w} = \max\{l_{w1}; l_{w2}\} + 20 \; ; \; l_{w1} = N/(\beta_{f}k_{f}R_{wf}\gamma_{c}) \; ; l_{w2} = N/(\beta_{z}k_{z}R_{wz}\gamma_{c}) \; ;$$
 
$$\beta_{f} = \begin{cases} 0.9, \text{ при } k_{f} < 8\text{мм} \\ 0.8, \text{ при } 9 \leq k_{f} \leq 12\text{мм} \; ; \; \beta_{z} = \begin{cases} 1.05, \text{ при } k_{f} \leq 8\text{мм} \\ 1 \text{ при } k_{f} > 8\text{мм} \end{cases} .$$
 
$$0.7, \text{ при } k_{f} > 12\text{мм} \end{cases} .$$

- 6. Для каждого стержня определяется расстояние от геометрического центра узла до прямой  $f_i$ , перпендикулярной оси і-го стержня:  $l_{\mathcal{D}i} = l_{wi} + l_i + 20$  (см. рис. 2б).
- 7. Определяются координаты точек  $n_i$  очертания фасонки. Полученные точки соединяются отрезками, определяющими форму фасонки. В соответствии с рекомендациями серии 1.460.2-10/88.1 назначается ее толщина и вычисляется масса  $m_\phi$ .
- 8. Определяется суммарная длина всех сварных швов фермы и расход листового металла на фасонки.
  - 9. Определяется величина  $\,C_T\,$  для всей конструкции.

Стоимости резки, разметки и сварки должны приниматься с учетом трудоемкости этих процессов по данным заводов-изготовителей.

# 4. Пример решения задачи

Необходимо запроектировать рациональную несущую систему подстропильной фермы из парных уголков. Допускаемые максимальные габаритные размеры фермы, расположение и величина нагрузки принимались в соответствии с рекомендациями серии 1.460.2-10/88.1. Плановая себестоимость вычислялась при использовании расценок, осредненных по данным организаций-изготовителей в Брянске (ООО «Металлоконструкции», ОАО «Брянский завод металлоконструкций и технологической оснастки», ИП Савчак М.И.) на уровень цен января 2012 года. Данные о рыночной стоимости сварки и обработки металлов представлены в таблицах 1, 2.

Толщина разрезаемого металла $t$ , мм	Плазменная резка, руб./м	Газовая резка, руб./м	Гильотинная рубка листов, руб./удар	Вырезание контура, руб./м	Пробивка отверстия
3	22.50	_	2	37.5	7.5
4	30.00	_	2.5	50	10
5	37.50	_	3	62.5	12.5
6	45.00	38.40	4	75	15
8	60.00	51.20	5	100	20
10	75.00	64.00	6	125	25
12	90.00	76.80	8	150	30
14	105.00	89.60	10	175	35
16	120.00	102.40	_	200	40
20	150.00	128.00	_	250	50
25	187.50	160.00	_	312.5	62.5
30		192.00	_	375	75
40		256.00	_	500	100
50	_	320.00	_	625	125

Таблица 1. Средняя рыночная стоимость обработки конструкционных сталей

Таблица 2. Средняя рыночная стоимость сварочных работ

Тип сварки	Стоимость нахлесточного соединения, руб./см	Стоимость стыкового шва, руб./см
Аргонно-дуговая сварка постоянным током	25	25
Сварка полуавтоматическая, точечная сварка	18	20
Сварка ручная, штучными электродами	15	20

Считаем, что узлы фермы закреплены от перемещений из ее плоскости, а в опорные узлы вводятся шарнирно-неподвижные связи. Верхний пояс фермы по технологическим требованиям принимаем прямолинейным. Каждый узел верхнего пояса, кроме крайних узлов, загружен системой сил P, при этом в крайние его узлы приложена сила P/2, а в средний узел — 8P. Исходная ферма показана на рисунке 3.

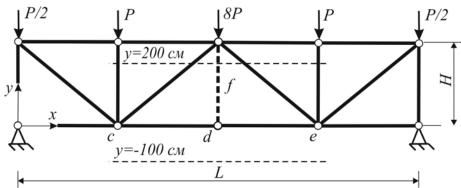


Рисунок 3. Исходные данные задачи параметрического синтеза конструкции

Задавалось: L=1200 см; H=313 см; P=100 кH. Материал стержней — сталь 09Г2С-12-1. Модуль упругости E=2,06 · 10 $^{5}$  МПа. Напряжения в стержнях ограничивались величиной 345 МПа. Вертикальное перемещение каждого из узлов по абсолютной величине не допускалось больше 4,8 см, что удовлетворяет требованиям свода правил [19] по условию жесткости конструкции. Ограничения по устойчивости стержней учитывались в соответствии с нормами [20].

Для стержней, изображенных сплошными линиями, допускалось выбирать следующие профили парных уголков по ГОСТ 8509-93: 1) 30x3; 2) 50x5; 3) 75x5; 4) 80x6; 5) 90x7; 6) 100x8; 7) 110x8; 8) 125x10; 9) 140x10; 10) 160x10; 11) 180x12; 12) 200x20. Во множество  $\{T\}$  входили площади и моменты инерции этих сечений. Стержень, обозначенный пунктиром, представляет собой конструктивный элемент, служащий для обеспечения неизменяемости конструкции отправочных полуферм. Принимаем его сечение в виде парного уголка 30x3 и в процессе

Алексейцев А.В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней

оптимизации не учитываем. Варьировались координаты узлов c, d и e (см. рис. 3) по оси у. На рисунке 3 горизонтальными штриховыми линиями показаны пределы допустимых значений варьируемых координат. Множество  $\{Y\} = \{-100; -75; -50; -25; 0; 25; 50; 75; 100; 125; 130; 135; 140; 145; 150; 160; 170; 180; 190; 200; 210; 220; 230; 240; 250\}, см. Условия симметрии конструкции заранее не устанавливались. В каждом поколении алгоритма рассматривались популяции из 20 особей. Всего варьировалось 19 параметров. Для расчета стоимости устройства узловых соединений задавалось <math>b_{min} = 60$  мм.

В результате выполнения итерационного процесса было найдено несколько близких решений с лучшими значениями C и  $C_M$ . Здесь значения  $C_M$  получены в результате реализации простого генетического алгоритма без учета узловых соединений [8]. Наиболее рациональные из ферм изображены на рисунке 4. Цифрами на этом рисунке показаны номера выбранных профилей в стержнях фермы в соответствии с принятой системой нумерации.

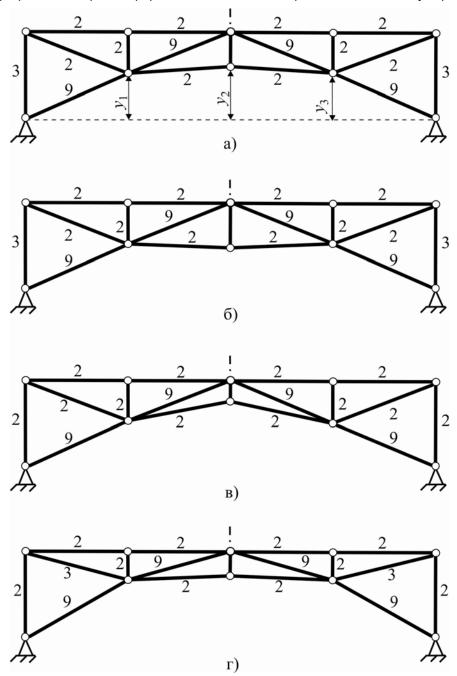


Рисунок 4. Результаты решения задачи: а, б – рациональные конструкции с лучшими значениями C; в, г – фермы с минимальными величинами  $C_M$ 

Алексейцев А.В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней

Результаты решения задачи представлены в таблице 3. Все решения найдены не более чем за 1000 итераций генетического алгоритма. При этом выполнено  $2 \cdot 10^4$  расчетов. Общее число возможных вариантов расчета конструкции составляет  $K = 12^{16} \cdot 25^3 \approx 2,88 \cdot 10^{21}$ .

	-	Координата, см	I	Стоимость Стоимость		Плановая	
Позиция	$y_1$	$y_2$	<i>y</i> <sub>3</sub>	стержней, руб.	узловых соединений, руб.	себестоимость, руб.	
Рис. 4а	160	170	160	113148	19967	133115	
Рис. 4б	160	150	160	115886	17829	133715	
Рис. 4в	170	250	170	100739	36452*	137191	
Рис. 4г	220	200	220	103977	34473	138450	
C.1.460.2-	0	0	0	-	-	139200**	

Таблица 3. Рациональные параметры несущих систем и сравнение решений

Как видно из таблицы 3, предлагаемый алгоритм позволяет снизить стоимость изготовления узлов конструкции более чем на 45% (строки 1, 3 и 2, 4 соответственно). Таблица 3 показывает, что плановая себестоимость наиболее рационального варианта конструкции меньше себестоимости фермы серийного производства более чем на 4%. При массовом производстве конструкций такого типа можно получить значительный экономический эффект.

## Выводы

- 1. Разработана вычислительная схема оптимизации стальных ферм с профилями стержней в виде парных уголков и сварными узловыми соединениями на фасонках. Предлагаемая итерационная процедура базируется на эффективном эволюционном алгоритме параметрического синтеза несущих систем, учитывающем оценку стоимости материалов и работ по изготовлению конструкции.
- 2. Представленная вычислительная схема реализована в программном комплексе «BGTAFEM/OPTIMA», св. №2012619002 от 14.12.2012.
- 3. Представленный алгоритм после соответствующих модификаций можно применить для оптимального проектирования широкого класса стержневых металлоконструкций различных типов, например, трубчатых ферм, структурных плит, плоских рам и т. п.

Статья подготовлена при поддержке гранта РФФИ 13-08-00457 «Оптимизация конструктивных систем с учетом возможности аварийных ситуаций».

## Литература

- 1. Wu C.Y., Tseng C.Y. Truss structure optimization using adaptive multi-population differential evolution // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2010. Vol. 42. Pp. 351–369.
- 2. Balling R., Briggs R., Gillman K. Multiple optimum size/shape/topology designs for skeletal structures using a genetic algorithm // Journal of Structural Engineering. ASCE. 2006. Vol. 132. Pp. 1158–1165.
- 3. Su R., Gui L., Fan Z. Truss topology optimization using genetic algorithm with individual identification technique // Proceedings of the World Congress on Engineering. July 1–3, London, U.K. 2009. Vol. 2. Pp. 45–56.
- 4. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 2. С. 60–63.
- 5. Алёхин В.Н., Ханина А.Б. Разработка модели генетического алгоритма для оптимизации стальных многоэтажных рам // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2008. Vol. 4. Issue 2. Pp. 16–18.

<sup>\*</sup> Вычислено для конструкции, полученной в процессе оптимизации без учета стоимости узловых соединений. \*\* Получено: С · m = 80000х1,740 =139200 руб., где С – средняя плановая себестоимость 1 т фермы из парных уголков; m – масса (т) фермы марки ФП12-1000.

- 6. Пермяков В.А., Перельмутер А.В., Юрченко В.В. Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций. Киев: Сталь, 2008. 538 с.
- 7. Серпик И.Н., Алексейцев А.В. Оптимизация металлических конструкций путем эволюционного моделирования. М.: АСВ, 2012. 240 с.
- 8. Алексейцев А.В., Курченко Н.С. Поиск рациональных параметров стержневых металлоконструкций на основе адаптивной эволюционной модели // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. №3. С. 7–15.
- 9. Юрьев А.Г., Клюев С.В. Эволюционные и генетические алгоритмы оптимизации строительных конструкций. Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2006. 134 с.
- 10. Алексейцев А.В., Серпик И.Н. Оптимизация плоских ферм на основе генетического поиска и итеративной процедуры триангуляции // Строительство и реконструкция. 2011. №2(34). С. 3–8.
- 11. Ольков Я.И., Андроников А.В. Автоматизированное оптимальное проектирование пространственных металлических стержневых конструкций с использованием алгоритмов структурной оптимизации // Известия вузов. Строительство. 2003. №12. С. 8–13.
- 12. Серпик И.Н., Шевченко К.В. Разработка генетического алгоритма слабовзаимодействующих популяций для оптимизации несущих систем // Вестник Брянского государственного технического университета. 2010. №10. С. 67–73.
- 13. Серпик И.Н., Лелетко А.А., Алексейцев А.В. Эволюционный синтез металлических плоских рам в случае оценки несущей способности по методу предельного равновесия // Известия вузов. Строительство. 2007. №8. С. 4–9.
- 14. Canyurt O.E., Hajela P. Cellular genetic algorithm technique for the multicriterion design optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2010. Vol. 40. No.1–6. Pp. 201–214.
- 15. Khajavirad A., Michalek J.J., Simpson T.W. An efficient decomposed multiobjective genetic algorithm for solving the joint product platform selection and product family design problem with generalized commonality // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. Vol. 39. No.2. Pp. 187–201.
- 16. Pappa G.L., Freitas A.A. Automating the design of data mining algorithms. An evolutionary computation approach. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2010. 197 p.
- 17. Banichuk N., Serra M., Sinitsyn A. Shape optimization of quasi-brittle axisymmetric shells by genetic algorithm // Computers & Structures. 2006. Vol. 84. No.29–30. Pp. 1925–1933.
- 18. Бате К. Методы конечных элементов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. 1024 с.
- 19. СП 20.13330.2011. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07–85\*. Нагрузки и воздействия. М.: ГУП ЦПП, 2011. 36 с.
- 20. СП 16.13330.2011. Актуализированная редакция СниП II–23–81\*. Стальные конструкции. М.: ГУП ЦПП, 2011. 96 с.

\*Анатолий Викторович Алексейцев, г. Брянск, Россия Тел. раб.: +7(4832)646931; эл. почта: aalexw@mail.ru

© Алексейцев А.В., 2013

## Analysis of the resistance of thin-walled cold-formed compressed steel members with closed cross-sections. Part 1

PhD, Ing., head of the department Mohamad Al Ali\*; PhD, Doc. Ing., head of the department Michal Tomko; PhD student, Ing. Martin Badak, Technical University in Košice

**Key words:** thin-walled web; cold-formed profiles; initial imperfections

The paper is divided into two parts. Part 1 presents fundamental information about experimental-theoretical research oriented to determinate the resistance of thin-walled compressed steel members. The investigated members had closed cross-sections made from homogeneous materials. The theoretical analysis in this research is oriented to determinate the resistance of mentioned members according to European and Slovak standards, while the experimental investigation is to verify the theoretical results and to investigate the behaviour of mentioned members during the loading process. Part 2 will be focused on the numerical analysis of the results, as well as on the 3D modelling and simulation of experimental tests.

#### Introduction

Theory and design development of steel thin-walled cold-formed members and profiles creates a certain knowledge base for their practical application in civil engineering. A lot of researches and studies have been devoted to this field [1–5]. Some of them were focused on the closed cross sections [6–9], other studies investigated the resistance of members with open profiles [10–14]. However, this fact does not mean that all complex and challenging processes of the behaviour of thin-walled cold-formed members during the loading procedure are sufficiently investigated.

From the material and geometric point of view, the thin-walled cold-formed profiles have specific specialties, which their design must responsibly take into account. In the terms of their resistance, an important issue is the effectiveness of mutual interaction between several webs. The local stability requirements related to unfavourable buckling effects of their compressed parts are very significant. Favourable effects, related to membrane stresses and post-critical behaviour are also important. Different calculation procedures with different results in the relevant standards (previous National standard STN 73 1402:1988 and new European standard EN 1993-1-3: 2006) and their confrontation with experimental results indicated the need for further investigation of post-critical behaviour of these members.

The indicated issues are generally problematic, both from the theoretical and practical aspects, therefore the presented research aims to investigate the interaction between individual webs and local resistance of compressed thin-walled steel members with closed cross-sections without longitudinal stiffeners [15].

#### Experimental program and tested members

The experimental research program includes 17 thin-walled cold-formed test members having closed cross-sections with different dimensions, advisable chosen to eliminate the global stability problems, to reflect the post-critical behaviour of the individual thin webs and to present the interaction of the adjacent parts in the loading and failure processes. The test members were divided into two cross-sectional groups (A and B). Group A consists of members having closed square cross sections, while Group B is created by members with closed rectangular cross-sections. The research program of test members and designed geometrical dimensions of individual groups are given by Table 1. Basic schemes of the test members are illustrated in Figures 1 and 2. Table 2 presents the basic geometrical characteristics for the individual groups of test members, determined according to relevant standards; EN 1993-1-3 and STN 731402.

Figure 1. Scheme of the test members; group A

Figure 2. Scheme of the test members; group B

Table 1. Geometrical dimensions of the designed test members

-	Tested mem	hore	God					
Cross-sectional group		Marking	b	h	cal dimens	r	L	Steel
	1	A11, A12	100	100			300	
Α	2	A21, A22, A23	150	150			450	
	3	A31, A32, A33	200	200			600	0005
	1	B11, B12, B13	150	100	2	3	450	S235
В	2	B21, B22, B23	200	100			650	
	3	B31, B32, B33	200	150			600	

Table 2: Geometrical characteristics of the designed test members

		Е	N 1993-	1-3:2006	6	STN 73 1402:1988				
Cross-secti	onal group	$\beta_{wb}$	$\beta_{wh}$	$\lambda_{y}$	$\lambda_z$	$\beta_{wb}$	$\beta_{wh}$	$\lambda_{y}$	λz	
	1	48,12	48,12	7,50	7,50	46,00	46,00	7,52	7,52	
Α	2	73,12	73,12	7,45	7,45	71,00	71,00	7,46	7,46	
	3	98,12	98,12	7,42	7,42	96,00	96,00	7,44	7,44	
	1	73,12	48,12	10,70	7,87	71,00	46,00	10,74	7,89	
В	2	98,12	48,12	15,01	8,84	96,00	46,00	15,05	8,85	
	3	98,12	73,12	9,58	7,71	96,00	71,00	9,60	7,72	

In the terms of local stability classification, the webs of individual cross-sections are thin-walled at the compression loading ( $\beta_{wh}$ ,  $\beta_{wb}$ ). From the global stability point of view, all of tested members are designed as compact (slenderness  $\lambda_v$ ,  $\lambda_z$ ) in order to define the local (cross-sectional) resistance.

All tested members are made from steel sheets with nominal thickness 2 mm. Three material samples were taken from each steel sheet to make normative shaped test specimens. The test specimens underwent the tension tests to find the stress-strain diagrams and material properties. Detailed dimension measuring of the test members was done before the loading tests, in order to consistent evaluation of the experimental results. The averages of measured values are presented in Table 3.

The dimensions of cross-sections: width b, height h, and thickness t were measured on the top, middle and bottom of each member. The radius r was measured at each curved corner and the length L was measured at each member's side. Based on the obtained average values of the individual dimensions, the actual geometrical characteristics of the designed test members were determined.

Table 3. Average dimensions values and actual material characteristics

	b	h	t	r	ــا	f <sub>y</sub>	f <sub>u</sub>
Tested member		[	[ MPa ]				
A11	105,80	103,87	2,12	3,0	300,98	240,67	360,00
A12	105,50	103,92	2,12	3,0	300,68	240,67	360,00
A21	154,80	155,12	2,16	3,0	450,20	241,00	358,33
A22	154,22	153,73	2,10	3,0	450,63	241,00	358,33
A23	153,80	153,73	2,11	3,0	448,83	241,00	358,33

Tooks dissessibles	b	h	t	r	L	fy	fu
Tested member		[	[ MPa ]				
A31	208,45	202,85	2,13	3,0	599,75	236,67	355,67
A32	206,50	203,25	2,10	3,0	600,00	236,67	355,67
A33	206,72	203,07	2,10	3,0	600,00	236,67	355,67
B11	157,12	102,52	2,11	3,0	450,70	241,00	360,67
B12	157,93	102,43	2,11	3,0	450,03	241,00	360,67
B13	159,37	101,83	2,11	3,0	450,03	241,00	360,67
B21	207,93	103,08	2,12	3,0	650,00	242,33	360,00
B22	207,47	103,18	2,10	3,0	649,88	242,33	360,00
B23	207,35	102,62	2,16	3,0	649,25	242,33	360,00
B31	206,98	152,57	2,10	3,0	600,25	240,00	358,33
B32	207,13	152,50	2,11	3,0	599,75	240,00	358,33
B33	206,90	153,13	2,14	3,0	599,50	240,00	358,33

#### Testing methodology, results and their analysis

The tests were made to get detailed information about strain, failure and ultimate loads of the tested members, considering their actual geometrical and material parameters. In accordance with the research target, the emphasis has been imposed on the post-critical behaviour and interaction of the individual thin webs. In this context, the initial imperfections of slender webs are significant for the experimental results valuation and connected theoretical analyses. Therefore, the initial buckling shapes of all test members' webs were measured using previously generated raster, by means of inductive sensors before initiating testing.

Figure 3 illustrates the concept of the generated raster and general view of the test. For illustration, the values of measured initial imperfections in individual raster points of the test member B22 are shown in Table 4.

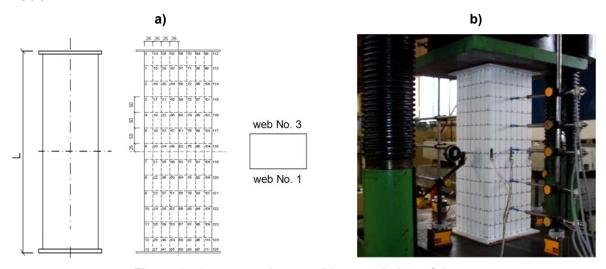


Figure 3: a) generated raster; b) general view of the test

During consecutive programmed loading of the tested members, the strains  $\varepsilon$  were measured using resistive strain-gauges in the middle cross-sections; deflections (buckling) of the webs w were measured using inductive sensors in different places, according to members lengths – see Figure 3. The resistive strain-gauges and inductive sensors were connected to the computer for direct evaluation. The loading process of each member was regulated close to its real behaviour, measured strains  $\varepsilon$  and deflections w. The test continued until total failure, defined by the beginning of continuous increasing strains  $\varepsilon$  and displacements of the webs w. The final buckling shapes after the test was finished were also revealed [16]. Examples of the test completion and overall failure of the tested member are illustrated in Figure 4.

Raster point	Values [mm]																
0	+0,00	14	+0,20	28	+0,25	42	+0,19	56	+0,15	70	+0,02	84	-0,13	98	-0,37	112	-0,40
1	+0,04	15	+0,17	29	+0,18	43	+0,08	57	+0,10	71	+0,01	85	-0,09	99	-0,28	113	-0,40
2	+0,06	16	+0,13	30	+0,11	44	-0,01	58	-0,01	72	-0,07	86	-0,10	100	-0,29	114	-0,40
3	-0,12	17	+0,01	31	+0,01	45	-0,14	59	-0,12	73	-0,19	87	-0,21	101	-0,37	115	-0,41
4	-0,24	18	-0,19	32	-0,15	46	-0,25	60	-0,25	74	-0,31	88	-0,38	102	-0,49	116	-0,63
5	-0,39	19	-0,25	33	-0,19	47	-0,32	61	-0,33	75	-0,37	89	-0,46	103	-0,55	117	-0,56
6	-0,59	20	-0,29	34	-0,19	48	-0,28	62	-0,36	76	-0,36	90	-0,43	104	-0,53	118	-0,69
7	-0,50	21	-0,36	35	-0,27	49	-0,33	63	-0,33	77	-0,37	91	-0,44	105	-0,55	119	-0,53
8	-0,63	22	-0,57	36	-0,36	50	-0,44	64	-0,50	78	-0,44	92	-0,50	106	-0,55	120	-0,64
9	-0,93	23	-0,74	37	-0,61	51	-0,59	65	-0,61	79	-0,54	93	-0,60	107	-0,66	121	-0,63
10	-0,83	24	-0,89	38	-0,80	52	-0,78	66	-0,82	80	-0,75	94	-0,72	108	-0,76	122	-0,86
11	-1,20	25	-1,11	39	-1,02	53	-1,03	67	-1,03	81	-0,96	95	-0,91	109	-0,86	123	-0,79
12	-1,25	26	-1,25	40	-1,19	54	-1,24	68	-1,17	82	-1,11	96	-1,05	110	-0,98	124	-0,83
13	-1,51	27	-1,44	41	-1,20	55	-1,17	69	-1,13	83	-1,07	97	-1,06	111	-1,00	125	-0,87

Table 4. Positions and values of initial imperfections; test member B22, web No. 1

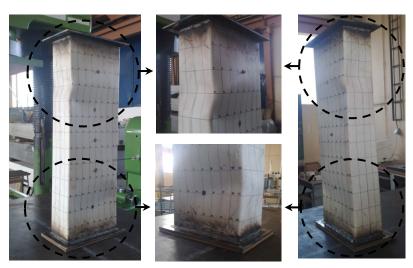


Figure 4. Test completion and overall failure; member B22

Taking into account the real-measured dimensions and yield stresses, the limit loads of all tested members were calculated according to relevant standards [17–20]. Theoretical and experimental limit loads are presented in Table 5.

Table 5. Theoretical and experimental limit loads of all tested members

Manakan	<b>N</b> <sub>pl,STN</sub>	N <sub>pl,EN</sub>	N <sub>ul,el,STN</sub>	N <sub>ul,el,EN</sub>	N <sub>u,y,STN</sub>	N <sub>u,y,EN</sub>	N <sub>u,z,STN</sub>	N <sub>u,z,EN</sub>	N <sub>u,exp</sub>
Member									
A11	206,67	204,02	193,54	177,92	193,54	177,92	193,54	177,92	164,77
A12	206,42	203,76	193,26	177,84	193,26	177,84	193,26	177,84	155,20
A21	315,64	312,94	225,41	206,80	225,41	206,80	225,41	206,80	-
A22	304,84	302,20	214,63	196,18	214,63	196,18	214,63	196,18	181,78
A23	306,01	303,36	216,29	197,99	216,29	197,99	216,29	197,99	178,59
A31	407,36	404,74	232,21	209,85	232,21	209,85	232,21	209,85	189,22
A32	400,55	397,96	225,66	204,70	225,66	204,70	225,66	204,70	195,59
A33	400,59	397,99	225,83	204,70	225,83	204,70	225,83	204,70	186,03

N4 l	<b>N</b> <sub>pl,STN</sub>	N <sub>pl,EN</sub>	N <sub>ul,el,STN</sub>	<b>N</b> <sub>ul,el,EN</sub>	N <sub>u,y,STN</sub>	N <sub>u,y,EN</sub>	N <sub>u,z,STN</sub>	N <sub>u,z,EN</sub>	N <sub>u,exp</sub>
Member									
B11	257,27	254,62	217,26	187,42	217,26	187,42	217,26	187,42	159,45
B12	258,02	255,36	217,45	187,51	217,45	187,51	217,45	187,51	165,83
B13	258,19	255,55	216,69	186,66	216,69	186,66	216,69	186,66	158,39
B21	312,08	309,40	229,30	194,45	229,30	194,45	229,30	194,45	171,15
B22	309,28	306,62	226,30	191,76	226,30	191,76	226,30	191,76	173,27
B23	316,63	313,93	234,79	200,55	234,79	200,55	234,79	200,55	164,77
B31	355,59	352,96	234,82	201,00	234,82	201,00	234,82	201,00	195,59
B32	356,61	353,97	235,94	201,98	235,94	201,98	235,94	201,98	184,97
B33	363,52	360,86	243,57	208,89	243,57	208,89	243,57	208,89	204,10

 $N_{ol}$  - the local plastic limit load of the full cross-section, defined by attaining the yield stress  $f_{V}$ ;

 $N_{ul,el}$  – the local (post-critical) elastic limit load of the effective cross-section, defined by attaining the yield stress  $f_y$ ;

 $N_{u,v(z)}$  – the buckling limit load to the axes y and z, considering the effective cross section.

The graphic evaluation and comparison of the theoretical limit loads and experimental limit loads are presented in Figure 5.

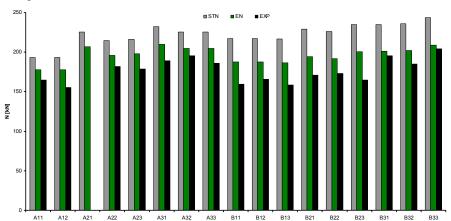


Figure 5. Limit loads of tested members; cross-sectional groups A and B

From Table 5 and Figure 5 it is evident that the theoretical limit loads, calculated according to the relevant standards are different. It is also evident that the experimental limit loads are smaller in all cases.

#### Conclusion

- 1. The differences in the results, calculated according to standards STN 73 1402:1998 and EN 1993-1-3:2006, are about 18%. This may be caused by different procedures for the calculation of cross-sectional characteristics at which EN 1993-1-3:2006 allows simplifying the procedure of their calculation.
- 2. The experimental limit loads are smaller than those limit loads, calculated according to standards EN 1993-1-3:2006 by 12%–24%. This serious fact may occur as a consequence of the unfavourable development of initial imperfections.
- 3. In terms of tolerance values, the maximum measured imperfection of the webs was smaller than the maximum tolerated value, given in the standard EN 1090-2+A1 [21] as b/50. Although this condition has been met, the results revealed a serious effect of initial imperfections.
- 4. The resistances of the tested members coupled with their post-critical behaviour were investigated by means of theoretic-numerical analysis and experimental verification. Based on obtained results we can assert that the resistance of the compressed thin-walled cold-formed steel members is significantly influenced by the initial imperfections and/or by the initial buckling shapes of their individual webs.

This paper is prepared within the research project VEGA 1/0582/13 "The elastic-plastic behaviour of compressed thin-walled cold-formed steel elements and stress-strain analysis of welded steel beams", supported by the Scientific Grant Agency of ME SR and SAS.

#### References

- Mamalis A.G., Manolakos D.E., Ioannidis M.B., Kostazos P.K., Dimitriou C. Finite element simulation of the axial collapse of metallic thin-walled tubes with octagonal cross-section. *Thin-Walled Structures*. 2003. Vol. 41. Issue 10. Pp. 891–900.
- 2. Rasmussen J.R. Kim. Bifurcation of locally buckled point symmetric columns Experimental investigations. *Thin-Walled Structures*. 2006. Vol. 44. Issue 11. Pp. 1175–1184.
- 3. Chen Ju, Young Ben. Cold-formed steel lipped channel columns at elevated temperatures. *Engineering Structures*. 2007. Vol. 29. Issue 10. Pp. 2445–2456.
- Nuno Silvestre, Young Ben, Camotima Dinar. Non-linear behaviour and load-carrying capacity of CFRPstrengthened lipped channel steel columns. *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. Issue 10. Pp. 2613– 2630.
- Kwon Young Bong, Kim Bong Sun, Hancock Gregory J. Compression tests of high strength cold-formed steel channels with buckling interaction. *Journal of Constructional Steel Research*. 2009. Vol. 65. Issue 2. Pp. 278–289.
- 6. Rogers C.A., Yang D., Hancock G.J. Stability and ductility of thin high strength G550 steel members and connections. *Thin-Walled Structures*. 2003, Vol. 41. Issues 2–3. Pp. 149–166.
- 7. DiPaolo B.P., Tom J.G. A study on an axial crush configuration response of thin-wall, steel box components: The quasi-static experiments. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. Issues 25–26. Pp. 7752–7775.
- 8. Yuan-Qi Li, Zu-Yan Shen, Lei Wang, Yan-Min Wang, Hong-Wei Xu. Analysis and design reliability of axially compressed members with high-strength cold-formed thin-walled steel. *Thin-Walled Structures*. 2007. Vol. 45. Issue 4. Pp. 473–492.
- 9. Gardner L., Saari N., Wang F. Comparative experimental study of hot-rolled and cold-formed rectangular hollow sections. *Thin-Walled Structures*. 2010. Vol. 48. Issue 7. Pp. 495–507.
- 10. Young Ben, Rasmussen J.R. Kim. Behaviour of cold-formed singly symmetric columns. *Thin-Walled Structures*. 1999. Vol. 33. Issue 2. Pp. 83–102.
- 11. Young Ben, Rasmussen J.R. Kim. Inelastic bifurcation of cold-formed singly symmetric columns. *Thin-Walled Structures*. 2000. Vol. 36. Issue 3. Pp. 213–230.
- 12. Young Ben, Ellobody Ehab. Design of cold-formed steel unequal angle compression members. *Thin-Walled Structures*. 2007. Vol. 45. Issue 3. Pp. 330–338.
- 13. Zhang Yaochun, Wang Chungang, Zhang Zhuangnan. Tests and finite element analysis of pin-ended channel columns with inclined simple edge stiffeners. *Journal of Constructional Steel Research*. 2007. Vol. 63. Issue 3. Pp. 383–395.
- 14. Jurgen Becque, Maura Lecce, Rasmussen J.R. Kim. The direct strength method for stainless steel compression members. *Journal of Constructional Steel Research.* 2008. Vol. 64. Issue 11. Pp. 1231–1238.
- 15. Juhás P. [et al.] The elastic-plastic behaviour and stress-strain analysis of framed and flat structural members made from steel and composite materials. *Research report VEGA 1/0673/10*. Košice, 2010–2011.
- 16. Al Ali M., Tomko M., Demjan I., Badák M. Stress-strain analysis of thin-walled compressed steel members with closed cross-sections. *SSP Journal of Civil Engineering*. 2011. Issue 1. Pp. 85–96.
- 17. Al Ali M., Tomko, M. Badák M. Investigation and analysis of the resistance of compressed cold-formed steel members. *The research of the Institute of structural engineering*. Košice, Slovakia 2010. Pp. 13–18.
- 18. STN 73 1402:1988, Design of thin-walled profiles in steel structures. UNM, Prague, 1987.
- 19. EN 1993-1-3:2006, Design of steel structures. Part 3: Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. CEN, Brussels, 2006.
- 20. EN 1993-1-5:2006, Design of steel structures. Part 5: Plated structural elements. CEN, Brussels, 2006.
- 21. EN 1090-2:2009-12+A1:2012, Execution of steel structures and aluminium structures. Part 2: Technical requirements for steel structures. Brussels, 2012.

\* Mohamad Al Ali, Košice, Slovakia Phone number: +421905359228; e-mail: mohamad.alali@tuke.sk

© Al Ali M., Tomko M., Badak M., 2013

# Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

**Старший преподаватель Т.В. Назмеева\*,** ФГБОУ ВПО «Череповецкий государственный университет»

**Ключевые слова:** холодногнутый профиль; испытательный стенд; несущая способность; потеря устойчивости; тонкостенный элемент; численное моделирование

На данный момент в России наблюдается устойчивый спрос на легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК) [1]. Однако отсутствие нормативных документов по проектированию ЛСТК с учетом российских особенностей приводит к тому, что на практике ЛСТК применяются на основе рекомендаций фирм-производителей холодногнутого профиля. Таким образом, несущая способность тонкостенных конструкций используется не полностью, что приводит к необоснованному удорожанию зданий и сооружений из ЛСТК и, как следствие, сдерживает широкое применение данных эффективных конструкций.

Малый вес несущего стального каркаса (в пределах  $20-25 \text{ кг/м}^2$ ), быстрая окупаемость и высокая энергоэффективность зданий из ЛСТК делают их востребованными и в жилом малоэтажном строительстве, и в строительстве зданий промышленного и общественного назначения. Благодаря своим конструктивным особенностям ЛСТК способны решить главные проблемы реконструкции зданий: снизить нагрузку на стены и фундаменты, вести работы в условиях тесной городской застройки без применения тяжелой грузоподъемной техники и остановки технологического процесса в здании. ЛСТК применяются и при возведении так называемых «пассивных домов».

В европейских нормах [2], созданных на основе широких экспериментальных исследований, отражены различные особенности поведения тонкостенных элементов на основе холодногнутого профиля. В российских строительных нормах расчет тонкостенных элементов не систематизирован, поэтому для развития собственных национальных стандартов по ЛСТК требуется проведение большого количества комплексных исследований.

Автором статьи осуществляются численные и экспериментальные исследования несущей способности стоек различной длины из холодногнутого С-профиля сплошного и перфорированного сечения с целью получения достоверной методики их расчета.

Для проведения экспериментальных исследований автором статьи были разработаны методика проведения испытаний и испытательные стендовые комплексы С-12 (1200 мм / 20 т) и В-50 (2200 мм / 50 т). В ходе численного моделирования было получено в геометрически нелинейной постановке численное решение задачи устойчивости тонкостенного элемента из С-образного профиля в программном комплексе PLM Femap 10.1 Nastran.

#### Обзор литературы

ЛСТК – это конструкции на основе холодногнутого стального тонкостенного оцинкованного профиля толщиной до 3 мм. Профиль имеет открытое или закрытое сечение различной формы (С-образной, Z-образной и т. д.) в связи с тем, что несущая способность элементов из холодногнутых тонкостенных профилей зависит не только от площади сечения элементов, но и от их конструктивных особенностей.

Конструктивная система здания на основе ЛСТК представляет собой стержневую систему в виде стального каркаса из холодногнутых профилей с наружной обшивкой из плит. При креплении обшивки к стойкам каркаса создается сборный строительный элемент – панель.

Широкое внедрение в строительство холодногнутого профиля обусловливает использование в расчетах легких конструкций расчетной схемы тонкостенного стержня, который может рассматриваться не только как брус, но и как оболочка и обнаруживает свойства, существенно отличающие его от обычных стержней. Так, в частности, к нему не всегда применим

Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

принцип Сен-Венана, для него характерна депланация сечения, открытые холодногнутые профили весьма чувствительны к кручению.

Особенность работы сжатых тонкостенных стержней заключается в том, что потеря несущей способности может наступить как в результате потери общей устойчивости, так и в результате потери местной устойчивости элемента. Потеря общей устойчивости тонкостенного стержня может иметь три формы: изгибную, крутильную и изгибно-крутильную — в зависимости от вида сечения, длины стержня, способа закрепления и т. п.

Все существующие теории поведения тонкостенных элементов носят феноменологический характер, т. е. основаны на описании наиболее изученных экспериментальных явлений. Основную ценность для тонкостенных конструкций представляют техническая теория расчета тонкостенных стержней на основе гипотезы жесткого контура, предложенная В.З. Власовым [3] на основе работ С.П. Тимошенко, и теория закритической несущей способности, полученная в результате многочисленных экспериментальных исследований пластинок и балок (работы Т. Кармана, Дж. Винтера, Ф. Блейха).

Теорию стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля развивали А.А. Уманский, Г. Вагнер, Ф. Блейх, и другие ученые. Экспериментальные исследования многих авторов показали, что в большинстве случаев экстремальной формой потери устойчивости тонкостенных стержней является крутильная или изгибно-крутильная форма. Это связано с отклонением от закона плоских сечений при кручении тонкостенных стержней, сопровождаемым изгибом отдельных элементов [4].

Явлением потери местной устойчивости стенок, подвергнутых осевому сжатию, занимались П. Бижляр, Э. Стоуэл, К. Либов и Э. Лундквист, С. Ван дер Маас, Ф. Блейх. Проблемами закритической несущей способности пластинок занимались Т. Карман, Э. Шехлер, Л. Доннел. В своей работе А.С. Вольмир [5] описывает явление редукции сечения. Проблемы закритической несущей способности тонкостенных опор и балок рассматривали Дж. Хеймерль, А. Чилвер, Р. Нидхем, Дж. Винтер, Я. Брудка, З. Терешковский и др.

Влияние особенностей изготовления холодногнутого профиля на несущую способность тонкостенных конструкций было рассмотрено в работах И.С. Тришевского [6], в многочисленных исследованиях ЦНИИПСК им. Мельникова и т. д.

В настоящее время теория поведения тонкостенного профиля вполне проработана. Основное внимание в научно-исследовательской работе по ЛСТК уделяется прикладным исследованиям поведения различных видов конструкций, выполненных из тонкостенного профиля (стоек, ферм, прогонов и т. д.) с целью разработки достоверных методик их расчета и проектирования. Прикладные исследования обусловливают применение численного моделирования.

Следует отметить работы Э.Л. Айрумяна [7], Г.И. Белого [8], И.В. Астахова [9], работы сотрудников ЦНИИПСК им. Мельникова, узконаправленные исследования в вузах России [10–16]. Проблемами численного моделирования занимаются В.И. Сливкер [17], А.Р. Туснин [18], В.В. Лалин [19], В.А. Рыбаков [20], А.В. Осокин [21].

Современные зарубежные исследователи уделяют достаточное внимание проблемам тонкостенных элементов [22–23]. Значительный вклад в теорию поведения холодногнутого профиля внес американский ученый Б. Шафер и его последователи [24–25]. Д. Унгерманн (Германия) [26], Р. Ландольфо (Италия) [27], М. А. Брэдфорд (Австралия), В.В. Юрченко (Украина) [28] и другие ученые занимаются исследованиями напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонкостенных элементов и конструкций.

#### Постановка задачи

Для стоек панелей стального каркаса в зданиях на основе технологии ЛСТК используется С-образный холодногнутый профиль. По мнению ряда авторов, это наиболее рациональная форма профиля для работы на сжатие, обладающая более высокой прочностью и устойчивостью по сравнению с другими видами профиля, например, швеллерным. Для создания внутренних стен применяется С-профиль сплошного сечения, для наружных — С-профиль перфорированного сечения. По технологическим требованиям стойки в панелях изготавливаются и составного сечения. Толщина панели назначается исходя из обеспечения требований тепло- и звукоизоляции, поэтому для стоек применяется С-профиль высотой сечения 150 и 200 мм, толщина профиля — 1,5 и 2 мм.

Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

Следует отметить американского исследователя Дж. Винтера [29], который в начале XX века провел испытания более 150 изгибаемых балок с различными характеристиками. Дж. Винтер исследовал также большое количество стальных стоек с целью, прежде всего, проверить формулы для совместно работающей ширины балок. Хаймерль, Хертель также проводили исследования стоек из алюминиевого профиля.

Большое количество исследований холодногнутого профиля проводится численными методами, но достаточные натурные испытания стальных длинных стоек из С-образного холодногнутого профиля сплошного и перфорированного сечения на сжатие не проводились. Представляется также интересной и малоизученной совместная работа стоек составного сечения из холодногнутого профиля — исследование по этой теме было выполнено Э.Л. Айрумяном и Г.И. Белым. Проведение подобных исследований только численными методами в силу различных обстоятельств (граничные условия закрепления, начальные несовершенства и т. д.) весьма затруднительно — требуется проведение натурных испытаний с целью разработки достоверной методики их расчета.

#### Описание исследования

Автором проведены два этапа экспериментальных исследований несущей способности стоек из холодногнутого тонкостенного С-профиля: первый этап – натурные испытания одиночных стоек; второй – натурные испытания стоек составного сечения.

В ходе первого этапа проводились две основные серии испытаний одиночных стоек различной длины: первая серия – испытания коротких стоек длиной 1,25 м; вторая – натурные испытания длинных стоек длиной 2,2 м. Во второй серии было испытано 40 стоек (5 стоек на каждый вид сечения) из С-профиля сплошного и перфорированного сечения высотой 150 и 200 мм с номинальной толщиной сечения 1,5 и 2,0 мм. Просечки перфорированного профиля были получены путем вдавливания. Длина стойки 2,2 м соответствует наименьшей длине стойки в несущем каркасе здания, сечения высотой 150 и 200 мм соответствуют наиболее применяемым сечениям в несущем каркасе здания из условия обеспечения требуемых теплотехнических и звукоизоляционных свойств.

Для проведения испытаний был использован холодногнутый профиль производства ООО «Нординкрафт-Сенсор» (г. Череповец): ПС-150-1,5, ПС-150-2,0, ПС-200-1,5, ПС-200-2,0, ТС-150-1,5, ТС-150-2,0, ТС-200-1,5, ТС-200-2,0. Для изучения несущей способности стоек профили были изготовлены из стали 08пс по ГОСТ 14918-80 ОАО «Северсталь» (г. Череповец). Испытания были проведены на базе испытательного центра ФБГОУ ВПО «Череповецкий государственный университет».

Для проведения экспериментальных исследований автором статьи в соавторстве с аспирантом А.А. Осолодкиным были разработаны и смонтированы два испытательных стендовых комплекса С-12 (1200мм/20т) и В-50 (2200мм/50т) для испытания образцов различной длины (рис. 1). Стендовое оборудование выполнено с учетом специфики поведения тонкостенных конструкций в реальных условиях, применяется соответствующее закрепление испытуемых образцов и схема приложения нагрузки. Данное оборудование не имеет аналогов в России.

Следует отметить, что в настоящее время в России отсутствуют методики проведения испытаний по ЛСТК, поэтому для проведения экспериментальных исследований тонкостенных элементов из холодногнутого С-профиля на сжатие автором статьи была разработана методика с учетом требований Еврокода и рекомендаций Э.Л. Айрумяна, специалиста ЦНИИПСК им. Мельникова.

В разработанной методике представлены основные составляющие экспериментального исследования: выбор соответствующих моделей в зависимости от цели испытания; выбор способов и средств приложения силовых нагрузок; выбор способов и средств измерения деформаций и перемещений при испытаниях; проведение подготовительных операций, связанных с изготовлением моделей и стендов; проведение численного моделирования; непосредственно экспериментальные исследования; подготовка мероприятий по технике безопасности; обработка экспериментальных данных.







В-50 (2200мм/50 т)

Рисунок 1. Испытательные стенды

Основной частью программы испытаний является описание объекта испытаний. В качестве объектов испытаний могут выступать один или несколько элементов конструкции, часть конструкции, отдельные узлы или конструкция в целом в зависимости от выбранной методики испытаний [30]. Основное требование к экспериментальным объектам — они должны повторять основные параметры конструкции (площадь поперечного сечения, характер опирания и т. д.).

Работа стоек предполагает работу на устойчивость. Особенность работы сжатых тонкостенных профилей заключается в том, что потеря несущей способности может наступить как в результате потери общей устойчивости элемента, так и в результате потери местной устойчивости. Как правило, потеря местной устойчивости в сжатой зоне сечения происходит на ранних стадиях нагружения, при уровне напряжений, который существенно ниже расчетных значений. Но это не означает достижение профилем предельного состояния, сечение в целом остается работоспособным, имеет достаточный запас по несущей способности и может воспринимать внешнюю нагрузку. Потеря местной устойчивости учитывается использованием геометрических характеристик эффективного сечения, рассчитанных на основе значений эффективной ширины. Это закреплено в европейских нормах EN 1993-1-3:2009; EN 1993-1-5:2006, но в российских строительных нормах расчет тонкостенных элементов с учетом редуцированной площади сечения не имеет единой расчетной методики [31].

При центральном сжатии коротких стержней, для которых не существует опасности потери устойчивости, сопротивление их зависит от площади поперечного сечения и не зависит от формы сечения. Потеря местной устойчивости коротких тонкостенных элементов из холодногнутых профилей, как правило, связана с потерей устойчивости формы сечения, то есть искажением поперечного сечения, что способствует потере несущей способности раньше наступления потери общей устойчивости. Поэтому конструктивные особенности холодногнутого профиля оказывают значительное влияние на несущую способность тонкостенных элементов. В связи с этим С-образный профиль, имеющий краевые отгибы, обладает преимуществом по устойчивости и несущей способности. Наличие ребер жесткости в Сигма-профиле также повышает несущую способность элемента.

С увеличением длины стоек основную опасность представляет потеря общей устойчивости, поэтому при изучении поведения сжатых стоек большую роль играет длина испытуемых образцов. Чем больше длина, тем более интересной, с исследовательской точки зрения, представляется работа данного образца. В связи с этим и было разработано два испытательных стенда различной грузоподъемности для испытания стоек различной длины. Работу тонкостенных элементов на устойчивость трудно оценить на малых моделях, поскольку сложно в малой модели имитировать

Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

те особенности натурной конструкции, которые оказывают в ряде случаев существенное влияние на величину критических усилий.

Исследования устойчивости проводят, как правило, до разрушения с целью изучения закритической работы и определения резервов несущей способности при измерении напряженно-деформированного состояния системы, поэтому исследования целесообразно проводить на специальных испытательных установках — стендах. В ходе испытания на стендах объекты подвергаются действию нагрузок, сопоставимых или превышающих нагрузки в реальных условиях [32]. Преимуществом испытаний на стенде является возможность оценки реакции объекта на специфические условия (предельные значения нагрузки, определенный тип и величина нагрузки) при прочих фиксированных параметрах, что позволяет выявить скрытые конструктивные недостатки или резервы несущей способности конструкции. Стенд, как правило, представляет собой жесткую раму, на которую опирается модель. Принципиальное отличие стенда от других видов испытательных машин (пресс, разрывные машины и т. д.) состоит в размере и форме испытуемого образца. Проводить испытания длинных тонкостенных элементов на сжатие в обычных прессах представляется затруднительным, так как пресс не обеспечивает плавной подачи нагрузки и соответствующей высоты для установки образцов.

В связи с особенностью работы тонкостенных стоек в данных испытаниях нагрузка подавалась снизу при помощи гидравлических домкратов, величина нагрузки контролировалась цилиндрическим тензодатчиком сжатия. Нагрузки прикладывались небольшими порциями, после каждого этапа нагружения выполнялось измерение деформаций при помощи методов тензометрии и перемещений специальным методом. В таблице 1 представлены результаты испытаний короткой и длинной стоек. На рисунке 2 представлен график полученных перемещений.

Таблица 1. Результаты экспериментального исследования

	Длина 1,25 м	Длина 2,2 м	Длина 2,2 м
Наименование	Сплошное сечение	Сплошное сечение	Перфорированное
	ПС-150-2,0	ПС-150-2,0	сечение ТС-150-2,0
	Стенд С-12	Стенд В-50	Стенд В-50
Участок образца	5.3 0.5.1		
Образец после проведения испытаний			

В данной работе применялись тензорезисторы и измерительное оборудование японской фирмы «Tokyo Sokki Kenkyujo Co., Ltd.». Данные тензорезисторы имеют базу от 1 до 120 мм, диапазон рабочих температур от -20 °C до +80 °C, предназначены для установки на металл, дерево, бетон, стекло и т. д.; разработаны для различных исследований и подходят для изучения закритической работы оцинкованных профилей. Для работы с датчиками и измерительным оборудованием автором статьи получен соответствующий сертификат обучения.

Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

Во избежание погрешностей, связанных с релаксацией материала, отсчеты с измерительных приборов снимались достаточно быстро. В ходе проведения экспериментов в помещении выдерживалась комфортная температура для адекватной работы измерительного оборудования. После проведения экспериментов была проведена обработка результатов измерений с учетом нелинейной работы материала.

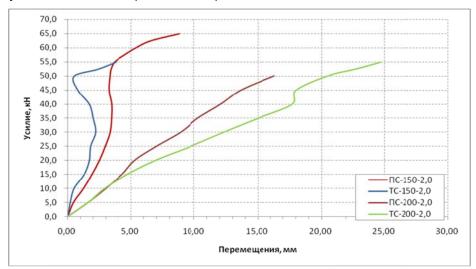


Рисунок 2. Наибольшие перемещения стенки стойки, мм от нагрузки, кН

С целью проверки экспериментальных исследований было выполнено численное моделирование работы тонкостенных элементов в программном комплексе PLM Femap 10.1 Nastran. Было получено в геометрически нелинейной постановке численное решение задачи устойчивости тонкостенного элемента из С-образного профиля.

Для создания конечно-элементной модели целой стойки были использованы треугольные и четырехугольные конечные элементы типа plate комплекса Nastran. Сгущение сетки в местах отгибов и погибей производилось вручную. Дискретная конечно-элементная модель целой стойки исследовалась с помощью шагового нагружения и итерационного процесса Ньютона—Рафсмона [33]. Модуль упругости и коэффициент Пуассона принимались как для стали ( $E = 2,1\cdot10^5 \, \mathrm{MTa}$ , V = 0,3). Были использованы соответствующие диаграммы растяжения стали. Результаты приведены на рисунке 3.

Геометрически нелинейный расчет был выполнен, чтобы увидеть закритическое поведение стойки. В данной постановке задача показала практически полную сходимость с результатами экспериментальных исследований.

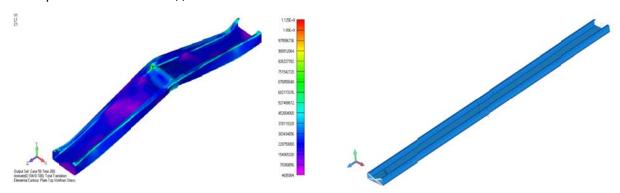


Рисунок 3. Результаты численного моделирования в PLM Femap 10.1 Nastran

#### Заключение

В ходе работы были выполнены экспериментальные и численные исследования тонкостенных элементов из холодногнутого стального оцинкованного С-профиля.

Анализ результатов показал, что короткие стойки во время испытаний испытывают ярко выраженную потерю местной устойчивости при ранней стадии нагружения, но сохраняют работоспособность. У длинных стоек начинают появляться горизонтальные перемещения оси уже на начальном этапе нагружения, при нагрузке более 35 кН они начинают резко расти, стойка приобретает изогнутую форму, потеря несущей способности происходит в результате общей потери устойчивости.

Экспериментальные исследования показали, что потеря общей устойчивости стоек из холодногнутого С-профиля сплошного сечения происходит по изгибно-крутильной форме, а перфорированного сечения – по изгибной. Просечки в данном случае работают в качестве ребер жесткости сечения. При проведении натурных испытаний наблюдалась потеря формы сечения (distortional) стоек.

Численные исследования показали, что механические свойства стали, из которой изготовлен профиль, не оказывают влияния на несущую способность профиля. На несущую способность профиля и форму потери устойчивости влияет высота сечения профиля h и его толщина t, а точнее, соотношение h/t. Профиль с высотой сечения 150 мм испытывает меньшие перемещения стенки при больших нагрузках, чем профиль с высотой сечения 200 мм.

В дальнейшем будет продолжена обработка результатов исследования с целью получения соответствующих зависимостей для разработки методики расчета тонкостенных элементов на сжатие.

Результаты экспериментально-теоретических исследований и предложенные коэффициенты и зависимости будут использованы при разработке стандартов организации (СТО) НП МАЛСС по проектированию зданий и надстроек на основе каркаса из ЛСТК и реконструкции покрытий с применением технологии ЛСТК.

#### Литература

- 1. Жмарин Е.Н. Международная ассоциация легкого стального строительства // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2012. №2. С. 27–30.
- 2. Eurocode 3: Design of steel structures. EN 1993-1-3: 2004 Part 1-3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. CEN. European Committee for Standardisation. 2004.
- 3. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Стройиздат, 1940. 275 с.
- 4. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 475 с.
- 5. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956. 419 с.
- 6. Тришевский И.С., Донец Г.В., Мирошниченко В.И. [и др.] Производство и применение гнутых профилей проката: (Технология, оборудование, сортамент, методы расчета, области применения, эффективность): Справочник. Под ред. И.С. Тришевского. М.: «Металлургия», 1975. 535 с.
- 7. Айрумян Э.Л., Белый Г.И. Исследования работы стальной фермы из холодногнутых профилей с учетом их местной и общей устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №5. С. 41–44.
- 8. Белый Г.И., Астахов И.В. Пространственная устойчивость элементов конструкций из стальных холодногнутых профилей // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2006. №9. С. 21–25.
- 9. Астахов И. В. Пространственная устойчивость элементов конструкций из холодногнутых профилей: Автореф. дисс. канд. техн.наук. СПб, 2006. 24 с.
- 10. Ватин Н.И., Рыбаков В.А. Расчет металлоконструкций седьмая степень свободы // СтройПРОФИЛЬ. 2007. № 2(56). С. 60–63.
- 11. Катранов И.Г. Несущая способность винтовых и заклепочных соединений стальных тонкостенных конструкций: Автореф. дисс. канд. техн. наук. Москва, 2011. 22 с.

Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

- 12. Куражова В.Г., Назмеева Т.В. Виды узловых соединений в легких стальных тонкостенных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 47–52.
- 13. Лапшин А.А., Жданова С.А. Определение редуцированной площади поперечного сечения тонкостенного гнутого профиля // Приволжский научный журнал. 2012. №4. С. 41–46.
- 14. Лещенко А.П., Евтушенко С.И., Текутов Е.Г. Экспериментальные исследования устойчивости тонкостенных стержней // Вестник ВолгГАСУ. Строительство и архитектура. 2009. №16(35). С. 24—27.
- 15. Марченко Т.В., Банников Д.О. Сопоставительный анализ форм потери устойчивости тонкостенных стержневых элементов // Металлические конструкции. 2009. №3(15). С. 178–188.
- 16. Семенов А.С. Ферма из холодногнутых профилей повышенной жесткости с болтовыми соединениями: Автореф. дисс. канд. техн. наук. Воронеж, 2009. 21 с.
- 17. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
- 18. Tusnin A.R. Finite element for numeric analysis of structures of thin-walled open profile bars // Metal Constructions. 2009. Vol. 15. No.1. Pp. 73–78.
- 19. Лалин В.В., Рыбаков В.А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №8. С. 69–80.
- 20. Рыбаков В.А. Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера для анализа напряженно-деформированного состояния систем тонкостенных стержней: Автореф. дисс. канд. техн. наук. СПб, 2012. 21 с.
- 21. Осокин А.В. Развитие метода конечных элементов для расчета систем, включающих тонкостенные стержни открытого профиля: Автореф. дисс. канд. техн. наук. Москва, 2010. 26 с.
- 22. Basaglia C., Camotim D., Silvestre N. Post-buckling analysis of thin-walled steel frames using generalised beam theory (GBT) // Thin-Walled Structures. 2013. Vol. 62. Pp. 229–242
- 23. Chou S.M., Rhodes J. Review and compilation of experimental results on thin-walled structure // Computers & Structures. 1997. Vol. 65. No.1. Pp. 47–67.
- 24. Li Z., Schafer B.W. Application of the finite strip method in cold-formed steel member design // Journal of Constructional Steel Research. 2010. Vol. 66. No.8–9. Pp. 971–980
- 25. Schafer B.W., Li Z., Moen C.D. Computational modeling of cold-formed steel // Thin-Walled Structures. 2010. Vol. 48. No.10–11. Pp. 752–762.
- 26. Brune B., Ungermann D. Coupled instabilities of cold-formed steel members in minor axis bending // 5<sup>th</sup> International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, CIMS 2008. Sydney, Australia, 23–25 June, 2008. 9 p.
- 27. Ghersi A., Landolfo R., Mazzolani F. M. Design of Metallic Cold-formed Thin-walled Members. London: Spon press, 2002. 174 p.
- 28. Юрченко В.В. Разработка аналитических зависимостей для оценки значений критических сил потери местной устойчивости и потери устойчивости формы сечения тонкостенных стержней открытого профиля // Металлические конструкции. 2012. №3. Т. 18. С. 185–196.
- 29. Winter G. Light gage (thin walled) steel structures for buildings in the USA // IV Congress International Association for Bridge and Structural Engineering. Cambridge, 1952.
- 30. Кузнецов В.В, Беленя Е.И., Стрелецкий Н.Н. [и др.] Развитие металлических конструкций: Работы школы Н.С. Стрелецкого. Под ред. В.В. Кузнецова. М.: Стройиздат, 1987. 576 с.
- 31. СП 16.13330.2011 Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81\* М., 2011.
- 32. Лужин О.В., Злочевский А.Б., Горбунов И.А., Волохов В.А. Обследование и испытание сооружений: Учеб. для вузов. Под ред. О.В. Лужина. М.: Стройиздат, 1987. 263 с.
- 33. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. М.: ДМК, 2003. 448 с.

\*Татьяна Вильсовна Назмеева, г. Череповец, Россия Тел. моб.: +7(921)5451545; эл. почта: naztv@mail.ru

© Назмеева Т.В., 2013

Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля

# Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования

**Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов\*,**ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»; **к.т.н., доцент Т.М. Андреевская,**ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Ключевые слова: деформации; ферма; мачта; позиционирование; антенна; локатор

При вращении локатора (рис. 1), установленного на мачте, изменение положения центра тяжести приводит к перераспределению нагрузок на мачту и к ее деформации, что влияет на позиционирование локатора. Существующие численные расчеты по стандартным программам с использованием известных несложных и довольно точных алгоритмов позволяют вычислить соответствующие поправки и внести их в управление системы. Значительно большей эффективностью обладают аналитические решения аналогичных задач [1-4]. Готовые формулы, в отличие от таблиц численных решений, легче и надежнее программируются, обладают значительно большей универсальностью, особенно если они учитывают все параметры задачи. Так, в работе [1] найдены предельные характеристики фермы, а явное выражение для прогиба подсказало причину непредсказуемого на первый взгляд увеличения прогиба фермы при увеличении числа стержней. В работе [2] показано, что зависимость прогиба от высоты пространственной фермы обнаруживает особенность, при которой прогиб растет неограниченно. Определяются оптимальные размеры конструкции. Прогиб пространственной балочной фермы за счет перераспределения материала в системе аналитически оптимизируется в работе [3]. Теоретические и практические аспекты оптимизации и расчета плоских и пространственных статически определимых и статически неопределимых ферм исследуются в работах [4-8]. Анализ разрушения и проблем проектирования треугольных мачтовых антенных конструкций приведен в работе [9].

В частности, показана впечатляющая фотография разрушения самой высокой в мире опоры высотой 648 метров, которое произошло в 1991 г. в Польше, в городе Константинове. Вариантному проектированию и оптимизации прогибов, а также прочности и весу стальных конструкций посвящена объемная монография [10].

В работе [11] анализируются возможности и перспективы использования САПР в проектировании линий электропередач, основой которых являются решетчатые опоры. При этом указывается, что важнейшими целями проектирования являются снижение веса и увеличение прочности конструкций. Отмечается, что численные системы, в частности, «Транслайн» и SCAD, могут давать различные результаты (до 6%).

В работе [12] приведены сведения об опорах воздушных линий электропередачи, их классификация. Дана расчетная модель металлической опоры, рассмотрены силы, действующие на эти опоры, и приведен пример расчета металлической опоры. Проектирование мачт с использованием МКЭ рассмотрено в работе [13].



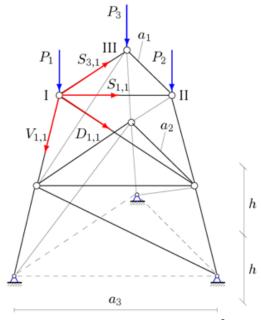
Рисунок 1. Мачта [9]

#### Постановка задачи. Мачта. Усилия в стержнях

Цели, аналогичные тем, что были поставлены в работах [1—4], ставятся и в настоящей работе в связи с позиционированием вращающегося на мачте локатора. В число параметров исследуемой задачи входят размеры мачты, ее упругие характеристики, величины нагрузок. Для мачты с определенным числом стержней n аналитическое решение можно получить достаточно просто. Обобщение аналитического решения на произвольное n составляет содержание

настоящей работы. Для достижения поставленной цели используется система аналитических вычислений Maple [14–17] и индуктивный метод [1–4].

Мачта представляет собой пространственную статически определимую ферму, состоящую из трех одинаковых плоских ферм, соединенных в правильную усеченную пирамиду (рис. 1, 2). По высоте ферма разбита на n поясов одинаковой высоты. Вертикальная нагрузка от локатора приводится к трем верхним узлам. При небольшой скорости вращения локатора можно пренебречь горизонтальной нагрузкой, вызванной центробежными силами. Усилия горизонтальных стержнях, образующих контур пояса (равносторонний треугольник), обозначим как S, усилия боковых наклонных стойках – V, усилия в раскосах – D. Индексами обозначим положение соответствующего стержня в конструкции. Первый индекс - номер грани (1, 2, 3), второй – номер пояса (1,...,n). На рисунке 2 показаны усилия, приложенные к узлу I. К узлу II приложены, соответственно, усилия  $S_{1,1},\,S_{2,1},\,V_{2,1},\,D_{2,1}$ . Каждый пояс содержит 9 стержней. Всего необходимо найти 9n усилий из равновесия 3n узлов. Задача статически определимая, так как для каждого узла надо составить три уравнения равновесия в проекциях. Расчет усилий в стержнях проведем по программе [2-5], написанной для системы Марle применительно к произвольным пространственным статически определимым фермам. Для расчета в программе требуется задать координаты шарниров (узлов), описать структуру фермы (задать номера концов стержней) и нагрузку.



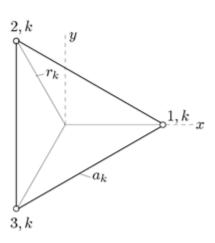


Рисунок 2. Схема мачты, n = 2

Рисунок 3. Узлы k-го контура

Зададимся геометрией мачты, характеризующейся следующими размерами: h — высота пояса; H=nh — общая высота мачты;  $a_1=h/t$  — длина стержней верхнего контура; t — безразмерный параметр, определяющий размер фермы. Длины стержней других контуров (нумерация ведется сверху вниз):  $a_k=a_1(1+u(k-1))$ . Безразмерный параметр u определяет угол наклона боковых стоек. При u=0 мачта представляет собой призму. Введем систему координат с началом в центре тяжести контура (рис. 3) и получим:

$$x_{1,k} = r_k, \ y_{1,k} = 0, \ z_{1,k} = h(n-k+1),$$
  
 $x_{2,k} = -r_k / 2, \ y_{2,k} = r_k \sqrt{3} / 2, \ z_{2,k} = z_{1,k},$   
 $x_{3,k} = -r_k / 2, \ y_{3,k} = -r_k \sqrt{3} / 2, \ z_{3,k} = z_{1,k},$ 

где  $r_k = a_k \sqrt{3} / 3$  – радиус описывающей контур окружности (рис. 3). Принцип составления системы уравнений метода вырезания узлов основан на вычислении направляющих косинусов усилий, вычисляемых по заданным координатам, и организации их записи в матрицу [6].

Результатом работы программы являются следующие усилия для стержней первой грани: Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования

$$\begin{split} V_{1,k} &= -\frac{\sqrt{3}}{tf} \sqrt{u^2 + 3t^2} \left( P_1(3 + 2u(2k - 1) + u^2k(k - 1)) + P_2ku(u(k - 1) + 1) + P_3u(k - 1)(uk + 1) \right), \\ D_{1,k} &= -\frac{u\sqrt{3}(P_1 - P_2)}{tf} \sqrt{3(1 + t^2 + u(2k - 1)) + u^2(3k(k - 1) + 1)}, \\ S_{1,k} &= \frac{u(P_1 - P_2)}{3(1 + u(k - 1))t}, \ k \neq 1, \ S_{1,1} = -\frac{uP_2}{3t}, \ k = 1 \dots n, \end{split}$$

где f=9(1+ku)(1+(k-1)u). Формулы для усилий других граней получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3; сил  $P_i$  и первого индекса усилия. Представленные зависимости от k получены методом индукции. Для этого в процессе решения выписывались последовательности коэффициентов при степенях u. Затем в пакете **genfunc** системы Maple [14–17] применялась функция  $\operatorname{rgf\_findrecur}$ , возвращающая рекуррентное уравнение для коэффициентов. Например, коэффициент при  $u^2$  в выражении для усилия  $D_{1,k}$  в раскосе обнаруживает последовательность 1, 7, 19, 37, 61, 91. Для нее с помощью указанной функции получается уравнение:

$$\xi_k = 3\xi_{k-1} - 3\xi_{k-2} + \xi_{k-3}.$$

Решение этого уравнения можно найти, применяя оператор  $\mathbf{rsolve}$ :  $\xi_k = 3k(k-1)+1$ . Другие коэффициенты оказались проще, и для них не потребовалось привлекать систему Maple. Заметим, что аналитические преобразования в Maple выполняются значительно медленнее, чем численные. Работа программы даже на мощном компьютере уже при n=6 занимает слишком много времени, поэтому индуктивный метод здесь — единственная возможность получить аналитическое решение. Контроль результатов легко проводится численно по той же программе с заданием вещественных значений размеров и нагрузок.

#### Прогиб от вертикальной нагрузки

Найдем вертикальное смещение верхних узлов мачты. Очевидно, горизонтальные смещения узлов не определяют позиционирование локатора. Искомый прогиб состоит из прогиба от постоянной нагрузки (вес мачты) и прогиба от временной нагрузки (вес локатора). Прогиб от постоянной нагрузки одинаков для всех верхних узлов мачты и вызывает несущественное поступательное смещение прибора. Временная же нагрузка в силу эксцентриситета нагрузки приводит к наклону локатора, учесть который и предназначены искомые зависимости.

Вертикальный прогиб какого-либо верхнего узла, например I, определяем по формуле Максвелла–Мора [18]. Прикладываем к узлу единичную вертикальную силу и определяем усилия  $s_{i,k},\ v_{i,k},\ d_{i,k},\ k=1,...,n,\ i=1,...,3$ . Очевидно, вид формул для этих усилий будет тем же, как и для усилий от внешней нагрузки, но для значений  $P_1=1,\ P_2=P_3=0$ . Запишем формулу Максвелла–Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{i,k} s_{i,k} a_k}{EF_S} + \frac{V_{i,k} v_{i,k} l}{EF_V} + \frac{D_{i,k} d_{i,k} c_k}{EF_D}, \tag{1}$$

где

$$l = a_1 \sqrt{u^2 / 3 + t^2}$$
,  $c_k = a_1 \sqrt{1 + u(2k - 1) + t^2 + u^2(k(k - 1) + 1/3)}$ 

– длины наклонных стоек и раскосов k-го пояса соответственно;  $EF_S$ ,  $EF_D$ ,  $EF_V$  – жесткости стержней контура, раскосов и стоек. Выполняя в (1) суммирование по i = 1,...,3, получим:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{S,k}}{EF_S} + \frac{\Delta_{V,k}}{EF_V} + \frac{\Delta_{D,k}}{EF_D},$$

где

$$\begin{split} \Delta_V &= \frac{\sqrt{3}(u^2+3t^2)^{3/2}h}{f^2t^3} (P_1(3k^2(k-1)^2u^4+6k(k-1)(2k-1)u^3+(24k(k-1)+5)u^2+12(2k-1)u+9) + \\ &+ (P_2+P_3)(3k^2(k-1)^2u^3+6k(k-1)(2k-1)u^2+(15k(k-1)+2)u+6(2k-1))), \\ \Delta_D &= \frac{\sqrt{3}\,u^2(3(1+t^2+u(2k-1))+u^2(3k(k-1)+1))^{3/2}h}{f^2t^3} (2P_1-P_2-P_3), \\ \Delta_S &= \frac{u^2(2P_1-P_2-P_3)h}{(1+u(k-1))t^3}. \end{split}$$

Дальнейшее суммирование по k=1,...,n-1 в системе Maple возможно, но оно приводит к весьма громоздким выражениям, содержащим специальные функции (пси-функции и гаммафункции), и потому не имеет практического смысла. Однако для малых углов наклона стоек легко получить приближенное аналитическое выражение для прогиба. Раскладывая  $\Delta_S, \Delta_D, \Delta_V$  в ряд по u до второго порядка (можно применить оператор **mtaylor**), получим:

$$\Delta = \frac{nh}{3} \left( \frac{un(P_2 + P_3) - P_1(un - 3)}{EF_v} + \frac{u^2(2P_1 - P_2 - P_3)}{3t^3} \left( \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{EF_D} + \frac{1}{EF_S} \right) \right). \tag{2}$$

Найдем зависимость прогиба от положения нагрузки. Под нагрузкой здесь понимаем вес локатора G, смещенный относительно центра тяжести верхнего контура на  $\rho$ . Из условия равновесия получим выражения для узловых вертикальных нагрузок (рис. 4):

$$P_{1} = G(a_{1} + 2\sqrt{3}\rho\cos\varphi) / (3a_{1}),$$

$$P_{2} = G(a_{1} + \sqrt{3}\rho(3\sin\varphi - \cos\varphi)) / (3a_{1}),$$

$$P_{3} = G(a_{1} - \sqrt{3}\rho(3\sin\varphi + \cos\varphi)) / (3a_{1}).$$

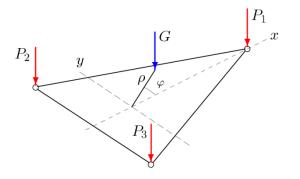


Рисунок 4. Приведение нагрузки G к узлам

Графики зависимости относительного прогиба  $\tilde{\Delta}=EF_V\Delta/G$  при  $\rho=1$ м, h=10м,  $u=0,2,\ t=2,\ n=4$  (рис. 5), построенные для стержней одинаковой жесткости  $EF_S=EF_D=EF_V$  и для случая, где жесткость решетки (раскосов и горизонтальных стержней) уменьшена, показывают, что разность результатов невелика, но в одном случае ( $\varphi=0$ ) экономный вариант по расходу материала на стержни решетки ( $EF_S=EF_D=EF_V/5$ ) приводит к увеличению прогиба, в другом (при  $\varphi=\pi$ ) — к уменьшению.

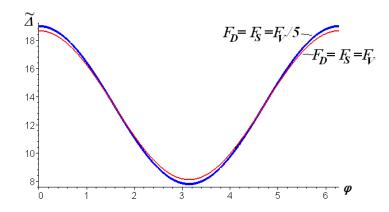


Рисунок 5. Зависимости относительного прогиба от угла  $\varphi$ 

Сравним приближенное решение (1) и точное (2) при  $\rho = 1 M$ , h = 10 M, u = 0,1, t = 2, n = 4, жесткости всех стержней одинаковые (рис. 6).

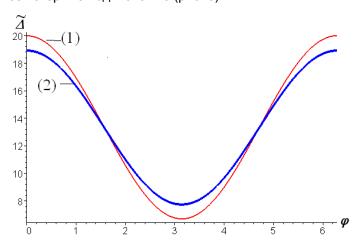


Рисунок 6. Приближенное решение и точное в зависимости от угла  $\, arphi \,$ 

Совпадения решений приходятся на углы, близкие к  $\pi/2$  и  $3\pi/2$ . С ростом u увеличивается расхождение решений. Проверка показывает, что решением (2) для практических расчетов можно пользоваться при u<0,2.

#### Прогиб от горизонтальной нагрузки

Несмотря на то, что прогиб от постоянных нагрузок на позиционирование локатора влияет незначительно, имеет смысл оценить их величину, хотя бы для того, чтобы, во-первых, сравнить их с уже найденными, а во-вторых, найти возможность их уменьшения. Последняя цель стоит отдельно от поставленной задачи о позиционировании локатора, но имеет самостоятельное значение как часть задачи о прочности и деформативности всего сооружения в целом. Это тем более просто, что использованная программа является универсальной, и для получения аналитических формул при другой нагрузке достаточно изменить правую часть системы уравнений. Очевидно, наиболее существенной постоянной нагрузкой для таких сооружений, обладающих достаточно большой высотой и значительной парусностью локатора, является горизонтальная боковая (например, ветровая). Моделируем эту нагрузку горизонтальной силой  $G_H$ , приложенной по оси x к одному из верхних узлов, например, к I. Аэродинамической нагрузкой на стержни фермы пренебрегаем. Получим следующие выражения для усилий:

$$\begin{split} V_{1,k} &= \frac{3\sqrt{u^2 + 3t^2} \left(2k - 1 + 2k(k - 1)u\right)}{f} G_H, \ V_{2,k} = -\frac{(k - 1)\sqrt{u^2 + 3t^2}}{3(1 + (k - 1)u)} G_H, \ V_{3,k} = -\frac{k\sqrt{u^2 + 3t^2}}{3(1 + (k - 1)u)} G_H, \\ D_{1,k} &= -\frac{3G_H}{f} \sqrt{3(1 + t^2 + u(2k - 1)) + u^2(3k(k - 1) + 1)}, \quad D_{2,k} = 0, \quad D_{3,k} = -D_{1,k}, \\ S_{1,1} &= 0, \ S_{1,k} = \frac{\sqrt{3} \ G_H}{3(1 + u(k - 1))}, \quad k \neq 1, \quad S_{2,k} = 0, \quad S_{3,k} = -\frac{\sqrt{3} \ G_H}{3(1 + u(k - 1))}, \quad k = 1, \dots, n. \end{split}$$

Прогиб определяем по той же формуле (1) и с теми же единичными усилиями  $v_{i,k}, d_{i,k}, s_{i,k}$ . Простое приближенное выражение для прогиба находим разложением в ряд Тейлора по малым величинам u, характеризующим наклон боковых стоек. Наиболее короткое и точное выражение получается, если в формуле для прогиба стоек удерживать слагаемые до второго порядка, а в остальных – только линейные:

$$\Delta = \frac{nh\sqrt{3}}{3} \left( \frac{ut(1+4n^2)/3 - u^2n(3+t^2(5+9n^2))/(6t) - nt}{EF_v} + \frac{2u(1+t^2)^{3/2}}{3t^2EF_D} + \frac{2u}{3t^2EF_S} \right).$$
 (3)

График зависимости относительного прогиба  $\tilde{\Delta} = EF_V\Delta / G_H$  при h=10м, t=2, n=4 (рис. 7), построенный для стержней одинаковой жесткости, показывает, что приближенную формулу можно применять с достаточной степенью точности до u<0,06.

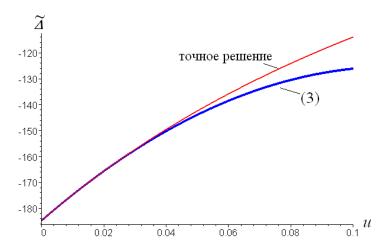


Рисунок 7. Смещение от горизонтальной нагрузки. Приближенное решение и точное

Из этого результата можно также сделать вывод, что прогиб от боковой нагрузки на порядок выше, чем от эксцентриситета локатора, даже если считать величины аэродинамической нагрузки  $G_{\scriptscriptstyle H}$  и веса локатора G одинаковыми.

Смещение от горизонтальной нагрузки можно уменьшить, несколько оптимизировав конструкцию.

Пусть распределение площадей сечений между стержнями будет следующим:

$$F_S = F_V(1 - c\alpha), \quad F_D = F_V(1 + c),$$
 (4)

т. е. площади сечений стержней горизонтальных контуров немного уменьшатся, а раскосов – увеличатся. Для того чтобы общий объем не изменился, введен коэффициент  $\alpha$ , отчасти учитывающий то, что раскосы длиннее стержней контуров. Здесь неизбежна некоторая погрешность, исчезающая только при u = 0. Функция (3) с учетом (4) имеет минимум по параметру перераспределения c (рис. 8). Графики построены при u = 0,1, h =  $10 \, M$ , t = 2. Соответствующее значение можно найти аналитически:

$$c = \frac{\alpha + \alpha (1 + t^2)^{3/2} - (1 + t^2)^{3/4} (1 + \alpha) \sqrt{\alpha}}{\alpha (\alpha (1 + t^2)^{3/2} - 1)}.$$

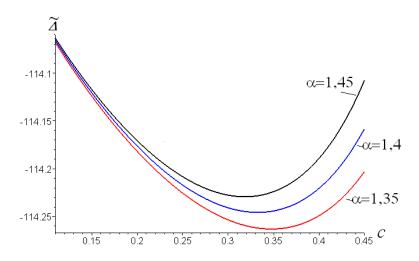


Рисунок 8. Смещение от горизонтальной нагрузки. Перераспределение материала

#### Выводы

Получены аналитические зависимости для усилий в стержнях и для прогиба конструкции от горизонтальной и вертикальной нагрузки, содержащие пять параметров задачи:  $\rho$ , h, u, t и n. Найдены условия, при которых прогиб минимальный. Показана зависимость решения от величины однопараметрического перераспределения материала по стержням системы (дополнительный, шестой параметр задачи c). В тех случаях, где точные решения оказываются громоздкими и неудобными для практического использования, получены их приближенные аналитические аналоги. Найденные выражения могут быть полезными как для оценки численных решений задач для пространственных ферм-мачт треугольного типа с произвольным числом горизонтальных контуров в широком диапазоне изменения геометрических параметров конструкций, так и в конкретных практических расчетах.

#### Литература

- 1. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: ПаркКом, 2010. 644 с.
- 2. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011. 800 с.
- 3. Матросов А.В. Марle 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 526 с.
- 4. Кирсанов М.Н. Марle и Maplet. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
- 5. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерностроительный журнал. 2011. №6(24). С. 28–34.
- 6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49–53.
- 7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. №5. С. 5–8.
- 8. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11–15.
- 9. Behrooz Farsi, Ali Aliania-ziazi. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Issues 18–19. Pp. 2508–2524.
- Rychter Z., Musiuk A. Topological sensitivity to diagonal member flips of two-layered statically determinate trusses under worst loading\_// International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. Issues 14–15. Pp. 4942–4957.
- 11. Mostafa S.A. Elsayed, Damiano Pasini. Multiscale structural design of columns made of regular octet-truss lattice material\_// International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Issues 14–15. Pp. 1764–1774.
- 12. Ligarò S.S., Valvo P.S. Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Issue 16. Pp. 4867–4887.
- 13. Stottrup-Andersen U. Masts and Towers // Proceedings of the IASS Symposium,, Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, 28 September 2 October 2009. Valencia, Spain, 1997. Pp. 127–138.
- 14. Лихтарников Я.М. Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций. М., Стройиздат, 1979. 320 с.
- 15. Смазнов Д.Н. Использование САПР для решения исследовательских задач при проектировании опор воздушных линий электропередачи // Инженерно-строительный журнал. 2009. №1(3). С. 6–12.
- 16. Подколзин Г.П., Макеев С.А., Ядров В.И. Расчет опор ЛЭП. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2005. 36 с.
- 17. Lee W.H. Conceptual design for scaled truss antenna flight experiment (US. NASA techn. memorandum; N 85804). 1984. 40 p.
- 18. Потапов В.Д., Александров А.В., Косицын С.Б., Долотказин Д.Б. Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем. Под ред. В.Д. Потапова. М.: Высшая школа, 2007. 511 с.

\*Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия

Тел. раб.: +7(495)5032793; эл. почта: mpei2004@yandex.ru

© Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М., 2013

# Determination of the stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic and moist properties of soil and large strains

D.Sc., professor, chief of department M.M. Mirsaidov\*; Ph.D., associate professor, vice-rector T.Z. Sultanov, Tashkent Institute of Irrigation and Melioration; lecturer Sh.A. Sadullaev, Tashkent State Technical University

**Key words:** earth dams; structure heterogeneity; elastic-plasticity and moisture content of soil; finite (large) strains; stress-strain state; strength

#### Introduction

A necessity to take into consideration real properties of soil and finite strains is now increasing in connection with world-wide construction of high earth dams. Not all the aspects of the work of soil under the load are clarified through. There is a great number of different theories more or less easily realized in solution of concrete problems. One of the most important problems in assessment of the structure strength is an account of elastic-plastic, moist properties of soil and large strains, occurring in earth dams under different effects [1–6].

Scientific papers [7–20] are devoted to the solution of certain aspects of this problem:

- in [8] the method for simulation of the structure response subjected to seismic excitation of high level is offered; it allows to account geometric non-linearity and inelastic character of material. Performed studies in non-linear dynamics show a good agreement with experimental results;
- in [10] finite element is used for numeric calculation of earth dams; it takes into consideration moist, non-moist and plastic properties of soil. Calculations of three dams were carried out with the use of the offered model;
- the work [11] considers the model which takes into account geometric factors, depending on stress-strain state of earth dams at the process of filling it with water. The use of such model allows determining factual mechanism of strains and explaining the reasons of strain in case of unexpected behavior of the structure under the study;
- the work [12] with the use of different software evaluates a possibility of occurrence of large displacements; it is noted that input acceleration increases with the rise of the height of a dam and in the crest of a dam the large displacements appear; so the evaluation of the dam strength should be carried out with consideration of both static and seismic loads;
- the work [13] offers the methods which allow predicting the behavior of a dam and the degree of
  its reliability under given expected strains from external effects and calculating the parameters
  of required protective constructive-technological measures;
- [14] considers the determination of stress-strain state of heterogeneous structure, which rests on elastic half-space; its mathematical model and algorithm of design were realized for investigation of stress-strain state of earth dam.

Numerical simulation of stress-strain state of earth dams furnished with aseismic belts with account of both elastic and moist properties of soil is considered in [15]; these studies allow to reveal that an installation of aseismic belts strengthens the area of slope directly adjoining it.

The problem of influence of these factors on the stress-strain state and strength of earth dams is not thoroughly studied and needs detailed research.

The paper presented below is devoted to the development of mathematical model, methods and algorithms for determination of the stress-strain state of earth structures with account of elastic-plastic properties, moisture content of soil and large strains; it presents the study of stress-strain state of concrete earth dams of different heights with account of mentioned factors under different static effects.

### 1. Models, methods and algorithms for determination of the stress-strain state of the structures

#### 1.1. Statement of a problem

Earth dam [18] with volume  $V=V_1+V_2+V_3$ , under the effect of mass forces  $\vec{f}$  on the surface  $S_p$  with hydrostatic water pressure  $\vec{p}_c$  is considered. The crest and lower slope of a dam are stressfree. The structure is essentially heterogeneous: physical properties of its parts  $(V_1,V_2,V_3)$  greatly differ from each other. Moreover, displacements, normal and tangential stresses are continuous on the boundary of division.

The task is to assess stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic, moist properties of soil and large strains.

The problem is considered within the limits of plane deformation of a structure.

Initial variation equation is written in the form:

$$-\int_{V_1+V_2+V_3} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_1+V_2+V_3} \vec{f} \delta \vec{u} dV + \int_{S_p} \vec{r} \delta \vec{u} dS = 0 .$$

$$\tag{1}$$

In the base  $\sum_u$  homogeneous boundary conditions are taken into consideration:

$$\vec{x} \in \sum_{u} : \vec{u} = 0. \tag{2}$$

Displacement vector has two components  $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$  in the system of coordinates  $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$ , i, j = 1, 2;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – are tensors of strains and stresses, respectively;  $\delta \vec{u}$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$  – isochronic variations of displacements and strains;  $V_1, V_2, V_3$  – volumes of upper, lower retaining prisms and central kernel of a dam, respectively.

**1.1.1.** The connection between the components of tensors of stresses  $\sigma_{ij}$  and strains  $\varepsilon_{ij}$  is expressed by Hooke's generalized law for linear elastic body, and components of tensor of large strains  $\varepsilon_{ij}$  are taken in a general form with account of both linear and quadratic summands:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{i,j} + u_{j,i} + u_{\ell,i} * u_{\ell,j} \right), \ i, j, \ell = 1, 2.$$
 (3)

**1.1.2.** When solving the problem with account of elastic-plastic strain of soil the hypothesis of energy forming is used to describe the equation of state of media. According to it, the transfer from elastic state into plastic one in discussed point of medium is realized after satisfying the condition  $\sigma_i = \sigma_y$  ( $\sigma_i$  – stress intensity;  $\sigma_y$  – yield limit). In different parts of the body the state of media may be different, depending on the fact whether yield limit is passed in that or this part.

Here in Hooke's generalized law instead of elastic parameters  $E_n, \nu_n, \mu_n$  variable parameters  $E_n^*, \nu_n^*, \mu_n^*$  are used, determined by the following way [21]:

$$E_n^* = \frac{\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1 - 2\nu_n}{3E_n} \frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}; \ \mu_n^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\nu_n}{3E_n} \frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1 - 2\nu_n}{3E_n} \frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}},$$
(4)

where  $E_n$ ,  $v_n$ ,  $\mu_n$  are modulus of elasticity, shear modulus and Poison's coefficient of soil, respectively; n refers to the part of the dam, which these mechanical characteristics are selected for.

Variable parameters (4) in each point of a body are determined from reached strain state  $\varepsilon_i$  (strain intensity) and corresponding to it stress intensity  $\sigma_i^*$ , selected from experimental diagram of strains  $\sigma_i^* = \sigma_i^*(\varepsilon_i)$  for concrete soils [2,22].

Dependence between components of strain tensors and displacement vector is determined by Cauchy linear correlation.

**1.1.3.** As a result of water filtration through the body of a dam, the soil, located under depression curve, becomes a water-saturated one; characteristics of soil, which determine stress-strain state of a dam, are changed. In this case the model is used, which accounts non-linear law of volume deformation with account of structural damage and moisture content of soil, defined by dependencies [23–26]

$$P = K_n(I_S, I_W) \cdot \theta,$$

$$S_{ij} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} e_{ij}.$$
(5)

Compression modulus, being the function of parameters of structural change of soil under compression  $I_s$  and moisture content  $I_w$ , is determined according to formula

$$K_n(I_S, I_W) = K_{ns} \exp(\alpha_1(1-I))$$
 (6)

The parameter of structural change of soil  $I \in [0,1]$  under compression and moisture content is determined by

$$I = I_S + I_W. (7)$$

The parameter, characterizing structural change of soil under compression load, is determined form formula:

$$I_S = \theta / \theta_*. \tag{8}$$

Structural change of soil under saturation is determined by:

$$I_W = W/W_*, (9)$$

here:  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \theta \delta_{ij} / 3$ ;  $\theta = \varepsilon_{ij}$ ;  $S_{ij}$ ,  $e_{ij}$  - are components of deviators of stresses and strains;  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  - intensity of stresses and strains;  $\delta_{ij}$  - Kronecker's symbol; P - total pressure;  $\theta$  - volume strain;  $\theta_*$  - the value of volume strain, when soil structure is subjected to complete destruction;  $W_*$  - the value of moisture content, determined from experiment [27], when soil skeleton completely loses its strength;  $K_{ns}$  - modulus of soil compression, its state is corresponding to the case  $\theta = \theta_*$  and  $W = W_*$ ;  $\alpha_1$  - dimensionless coefficient, which characterizes the degree of change of compression modulus under wetting, determined form tests.

In solution of concrete problems within the law of deformation of saturated soil a modified method of variable parameters of elasticity is used; it uses not a traditional dependence  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  [22], but the law of deformation (5), offered in [23], which connects volume strain  $\theta$  and total pressure P in soil. Expressions, determined by the value of variable parameters of elasticity, include variable modulus of compression  $K_n(I_S,I_W)$ , which depends not only on the degree of soil destruction  $I_S$ , but its moisture content  $I_W$  as well:

$$E_n^* = \frac{\sigma_i / \varepsilon_i}{1 + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \frac{1}{9K_n(I_S, I_W)}}; \ \mu_n^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}; \ \nu_n^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \frac{1}{9K_n(I_S, I_W)}}{1 + \frac{1}{9K_n(I_S, I_W)}}.$$
(10)

So, the developed method may be also called the method of variable elastic parameters, which differs from known method [21, 22] by design formulae.

In solving the problem with account of soil wetting, Cauchy linear relation is also used.

#### 1.2. The method and algorithm of solution of the problem

All problems are solved using finite element method.

**1.2.1.** In determination of the stress-strain state of heterogeneous structure with account of large strains the problem with the procedure of finite element method [5, 28] is reduced to resolving system of non-linear algebraic equations of *N* order

$$[K(u)]\{u\} = \{F\},$$
 (11)

where the elements of rigidity matrix [K(u)] depend not only on geometrical and physical parameters of a structure, but on its strain state as well;  $\{u\}$  is a vector of nodal displacements;  $\{F\}$  – vector of external load from mass forces, hydrostatic water pressure and other aspects.

Further the system of non-linear algebraic equations (11) is substituted by equivalent system of the following type [5, 29]:

$$[K]{u} = {F} - [K_n(u)]{u},$$
 (12)

where [K] is rigidity matrix of linear-elastic problem;  $[K_n\{u\}]$  – non-linear part of rigidity matrix, depending on displacement of nodes of a system, obtained as a result of extraction from matrix  $[K\{u\}]$  its linear component – [K].

To solve an equation (12) the method of consecutive approximation is used [29], its convergence defined by selection of initial approximation  $\{u_0\}$ . As an initial approximation a solution of linear-elastic problem is used:

$$[K](u_0) = \{F\}.$$
 (13)

Further approximations are found by formula:

$$[K]\{u_{s+1}\} = \{F\} - [K_n\{u_s\}\{u_s\}], \ s = 0,...,n.$$
(14)

A criterion of the end of iteration is a realization of condition:

$$\left|u_{s+1} - u_s\right| \le \varepsilon \,, \tag{15}$$

where  $\varepsilon$  is a given accuracy.

**1.2.2.** In determination of the stress-strain state of a structure with account of elastic-plastic deformation of material the problem is reduced to non-linear algebraic system of equations

$$[K(\sigma_i, \varepsilon_i)]\{u\} = \{F\}. \tag{16}$$

Here the elements of rigidity matrix  $[K(\sigma_i, \varepsilon_i)]$  depend not only on elastic parameters, but on reached stress-strain state of the structure as well. Solution of equation (16) is carried out with iteration method; on each step Gauss' method is used.

The first step is elastic design of earth structure, being in a state of balance under the effect of applied forces. Then the stress-strain state is analyzed in all finite elements. If in certain elements the

intensity of stresses  $\sigma_i$  exceeds the yield limit  $\sigma_y$  for given material, then with (10) for these elements new parameters of elasticity are determined, rigidity matrixes are built and then general matrix  $[K(\sigma_i, \varepsilon_i)]$  is formed for the whole structure. Such procedure goes on till the convergence  $\sigma_i$  is reached along the whole structure with a given accuracy. The described method presents a modified method of variable elastic parameters [5, 21, 22].

**1.2.3.** In determination of the stress-strain state of a structure with account of non-linear volume strain and water-saturation of soil the problem is reduced to the system of non-linear algebraic equations of *N* order:

$$[K(P_i, \theta_i)]\{u\} = \{F\},$$
 (17)

where  $[K(P_i, \theta_i)]$  is a rigidity matrix, determined with modified method of variable elastic parameters;  $\{F\}$  – vector of external load.

So, the method offered here consists in performing the following iteration procedure: in each step an equation (17) is solved by Gauss' method; in each finite element an intensity of stresses and strains  $(\sigma_i \text{ and } \varepsilon_i)$ , total deformation  $(\theta)$  are determined and then with non-linear dependency (5) – new values of variable elastic parameters (10) are obtained; further they are used to obtain the following approximation for the components of stress-strain state of the structure –  $\sigma_{ij}$  and  $\varepsilon_{ij}$ . Initial value of compression modulus at zero strain and moisture content [23, 25] is used as a zero approximation:

$$K_n = K_{ns} \exp(\alpha). \tag{18}$$

The process is reiterated till the given accuracy between two subsequent values of stress intensity  $\sigma_i$  in each finite element of the structure is reached.

#### 2. Results of the stress-strain state determination

In this chapter stress-strain state of three earth dams under different static loads with account of elastic-plastic properties, moisture content of soil and large deformations are studied using the developed methods, algorithms and PC design program: 1) Nurek dam: height H=296m, crest width  $b_g$ =20.0m, slopes laying  $m_1$ =2.25 (upper) and  $m_2$ =2.2 (lower); 2) Ghissarak dam: height H=138.5m, crest width  $b_g$ =16.0m, slopes laying  $-m_1$ =2.2 and  $m_2$ =1.9; 3) Sokh dam: height H=87.3m, crest width  $b_g$ =10.0 m, slopes laying  $m_1$ =2.5 and  $m_2$ =2.2. In specific calculations the heterogeneity, structural specific features, real geometry and elastic characteristics of material were taken into consideration for each part of the structure [5, 18–20].

### 2.1. Determination of the stress-strain state with account of elastic-plastic properties of soil

In this chapter the stress-strain state of earth dams is studied with account of elastic-plastic properties of soil and heterogeneity of the structure under the effect of mass forces.

In design, elastic-plastic properties of soil are considered according to bilinear strain diagram  $\sigma_i=f(\varepsilon_i)$  with degree of strengthening  $\overline{\lambda}=\left(1-E_p\,/\,E\right)=0.75$ , that is an angle of incline of plastic part  $E_p$  is four times less than an incline of elastic part  $E:E_p=E/4$  [30]. Yielding limit is taken according to [31], for kernel material (loamy soil)  $\sigma_y=0.3\,\mathrm{MPa}$ , and for material of retaining prisms within the limits 0.45MPa - 0.50 MPa.

Figure 1 shows isolines of intensity distribution ( $\sigma_i$ ) and tangential ( $\sigma_{12}$ ) stresses in Sokh dam, obtained with account of heterogeneity of the structure, elastic (Fig. 1a, 1c) and elastic-plastic (Fig. 1b, 1d) properties of soil under own weight. Comparison of results shows that an account of elastic-plastic properties of soil of retaining prisms leads to the change in values and character of stress state of a dam, namely to 20% decrease in intensity ( $\sigma_i$ ) and vertical stresses ( $\sigma_{22}$ ) and to the strengthening of arch effect in the kernel of a dam. The reason is a difference of straining properties and limits of yielding of soils in a kernel and retaining prisms. An increase up to 0.05 MPa of horizontal stresses  $\sigma_{11}$  in upper

part of a dam may be the cause of a change of its profile. Vertical stresses  $\sigma_{22}$  in lower level of a kernel are decreasing down to 20%. In slope zones tangential stresses  $\sigma_{12}$  are increasing up to 0.05-0.06 MPa, this also may lead to the change of profile form and to the drop of safety factor of dam slopes.

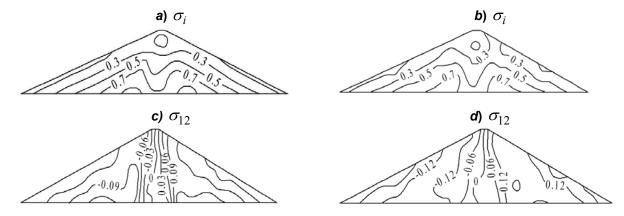


Figure 1. Isolines of distribution of intensity  $\sigma_i$  and tangential  $\sigma_{12}$  stresses (MPa) in Sokh dam with account of heterogeneity of the structure, elastic (a, c) and elastic-plastic (b, d) properties of soil

Analysis of data obtained states that an account of elastic-plastic properties of soil leads to the occurrence of residual strains in the most stressed sections inside the body of a dam and in slopes zones.

In Figure 2 isolines of distribution of intensity  $\sigma_i$  and tangential stresses  $\sigma_{12}$  in heterogeneous Ghissarak dam are shown with account of elastic-plastic properties of soils.

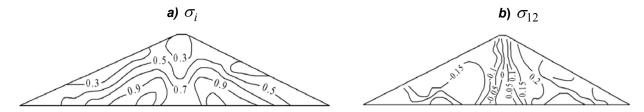


Figure 2. Isolines of distribution of intensity  $\sigma_i$  (a) and tangential  $\sigma_{12}$  (b) stresses (MPa) in heterogeneous Ghissarak dam with account of elastic-plastic properties of soil

Isolines of distribution in Figure 2 show that an account of elastic-plastic properties of soil leads to re-distribution of stress state of high dams by the following way: intensity -  $\sigma_i$  and vertical stresses –  $\sigma_{22}$  in a kernel become 15% less (arch effect is stronger), and tangential stresses in upper and lower slope zones are increasing considerably up to 50%, that leads to decrease of safety factor near the slopes. It is stated that the effect of elastic-plastic properties of soil on stress-strain state of a dam is increasing with the height of a dam. The greatest difference in stresses is observed near the slopes; this may lead to the occurrence of shear strains and landslides. In the zone of a kernel the values of tangential stresses remain insignificant.

Theoretical investigations, given above, show that in assessment of the strength of high and average dams it is necessary to account heterogeneity of structures and real elastic-plastic properties of soil.

### 2.2. Determination of the stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic properties and optimal moisture content of soil

In this chapter stress-strain state of earth dams is studied with account of heterogeneity of the structure, elastic-plastic properties and optimal moisture content of soil under the effect of own weight.

In correspondence with data, given in [32], the values of optimal moisture content of soil under strengthening are taken within the limits: for sandstone ≈7–10%, for sandy loam ≈9–15%, for loamy

soil ≈12–20%. Under compaction of gravel-pebbles alluvial soils and rock mass the value of optimal moisture content may be taken as equal to moisture content of soil in natural state, that is ≈5–12%.

The values of soil parameters, used in design, were selected according to [23, 25]: for loamy soil  $K_{ns}$  =28-30 MPa,  $\alpha$  =2.5,  $\theta_*$  =0.0015; for material of prisms  $K_{ns}$  =38-42 MPa,  $\alpha$  =2.0,  $\theta_*$  =0.002.

To analyze the effect of elastic-plastic properties and moisture content of soil on stress-strain state of dam some static calculations were carried out with account of elastic-plastic law of straining and optimal moisture content of soil under prisms and kernel.

Figure 3 shows isolines of distribution of stresses in Sokh dam with account of elastic-plastic properties and optimal moisture content of soil. In calculations, the values of optimal moisture content for soil under prisms – W=10% and under kernel – W=16% were used.

Comparison of obtained results with results of elastic statement (Fig. 1a, 1c) shows that an account of elastic-plastic properties and optimal moisture content of soil leads to the change of the character of stress-strain state of a dam. Considered factors lead to an increase of arch effect in a kernel, typical for  $\sigma_i$  and  $\sigma_{22}$ . In the kernel the intensity of stresses  $\sigma_i$  becomes  $\approx$ 25% less, and vertical stresses  $\approx$ 20% less. The value of tangential stresses  $\sigma_{12}$  reaches 0.06 MPa. The greatest straining is observed in the most stressed section of a dam – in its lower part. In kernel zone the intensity and vertical straining have smooth character, which is not so for stress isolines. This happens due to the difference of deformation and physical-mechanical properties of a kernel and retaining prisms. Though stress value in a kernel is less, but due to more intensive straining of kernel soil, strain isolines have smooth character. Shear strains are distributed similar to tangential stresses along the section of a dam.

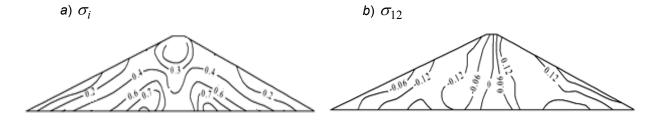


Figure 3. Isolines of intensity distribution  $\sigma_i$  and tangential  $\sigma_{12}$  stresses (MPa) in heterogeneous Sokh dam with account of elastic-plastic properties and water saturation of soil (moisture content of prism soil – W=10%, kernel soil – W=16%)

According to bilinear model, elastic-plastic straining of soil begins after the moment of time when stress intensity  $\sigma_i$  reaches the limit of yielding, but in model, offered in [23, 25], non-linear elastic-plastic properties of soil occur at the very beginning of loading. So the model from [23, 25] may be used to account residual strains on those sections of a dam, where the values of stress intensity do not exceed yielding limit  $\sigma_{22}$ . The main advantage of this model is the possibility to take into consideration moisture content and to use real parameters  $(K_{NS}, \alpha, \theta_*)$  of soil in concrete design.

Results obtained on each of these two models give similar character of stress-strain state of earth dams, with ≈7% difference for some components of stresses.

Based on obtained results we may draw a conclusion on a necessity to account moisture content and elastic-plastic properties of soil, as moisture content considerably effects stress-strain state of a dam, making stronger arch effect in a kernel typical for  $\sigma_i$  and  $\sigma_{22}$ . Stress intensity near the base and prisms of a dam become approximately 10% less, horizontal stresses in lower part of a dam are 8% greater and tangential stresses  $\sigma_{12}$  in a kernel are two times greater. The difference in mentioned stresses becomes greater with the height of a dam: the higher is the dam the greater is the difference.

The decrease of  $\sigma_i$  and increase of  $\sigma_{11}$  in lower part near the base lead to the drop in resistance of the structure to shear horizontal forces; an increase of tangential stresses  $\sigma_{12}$  in a kernel and near upper slope may lead to the occurrence of cracks and landslides.

#### 2.3. Determination of the stress-strain state of earth dams with account of large strains

In this chapter stress-strain state of earth dams with account of large strains and heterogeneity of structures is studied under the effect of mass forces and hydro-static pressure on a dam.

1. Model problem of stress-strain state of homogeneous earth dams of different height (H=25 m; H=50 m; H=70 m) and similar physical-mechanical parameters of material with account of finite strains under the effect of mass forces was solved.

Analysis of results shows that an account of large strains leads to 2% increase of stresses comparing with linear case at each 20 meter increase of the structure height.

2. The problem of the stress-strain state determination of the homogeneous Ghissarak dam model with account of large strains was considered.

Figure 4 shows isolines of distribution of horizontal stresses –  $\sigma_{11}$  for homogeneous Ghissarak dam under the effect of mass forces: in Figure 4a –  $\sigma_{11}^{gn}$ , obtained with account of large strains, in Figure 4b – relative difference of linear –  $\sigma_{11}^{lin}$  and non-linear –  $\sigma_{11}^{gn}$  design, obtained by formula  $\left(\left(\sigma_{11}^{gn}\right) - \left(\sigma_{11}^{lin}\right) + 100\%\right) / \left(\sigma_{11}^{lin}\right)$ .

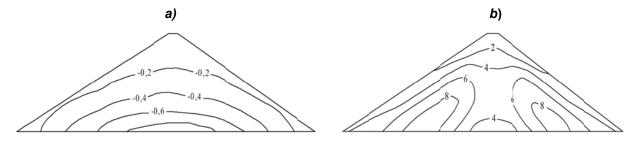


Figure 4. Isolines of distribution of horizontal stresses  $\sigma_{11}$  ( MPa) in section of homogeneous dam under the effect of mass forces with account of large strains of the structure (a) and relative difference (in %) of linear and non-linear design (b)

Figure 5 shows results of design (isolines of distribution) vertical stresses –  $\sigma_{22}$  for Ghissarak dam under the effect of mass forces: in Figure 5a – with account of large strains –  $\sigma_{22}^{gn}$ , Figure 5b – relative difference of linear and non-linear design.

Analysis of results in Figures 4 and 5 shows that in high structures there occur large strains approximately 10% higher than results of linear design; this proves the conclusions, obtained in model problem about 2% increase in stresses with every 20 m of the height of a dam.

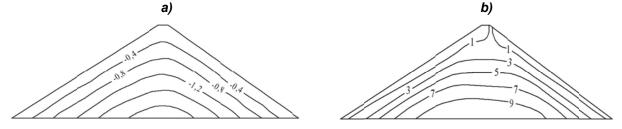


Figure 5. Isolines of distribution of vertical stresses  $\sigma_{22}$  (MPa), in a section of homogeneous dam under the effect of mass forces with account of large strains (a) and relative difference, (in %) of linear and non-linear design (b)

3. The problem of the stress-strain state determination with account of large strains and heterogeneous specific feature of Ghissarak dam under the effect of mass forces was considered.

Figure 6 shows isolines of distribution of intensity of stresses –  $\sigma_i$  in section of heterogeneous Ghissarak dam under own weight; Figure 6a – design with account of large strains –  $\sigma_i$ ; Figure 6b – relative difference of linear and non-linear design (in %).

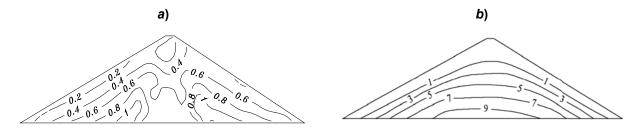


Figure 6. Isolines of distribution of stress intensity  $\sigma_i$  (MPa) in a section of heterogeneous dam under own weight with account of large strains of the structure (a) and difference (in %) between linear and non-linear design (b)

Analysis of stresses  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , obtained with account of large strains, shows that heterogeneity of a dam considerably changes the stresses in the middle part of slope zones, in the center of upper slope and in a kernel. An abrupt stress drop is observed in the lower part of a kernel in the joint point of a filter and upper retaining prisms; this may lead to crack-forming.

Maximal tangential stresses  $au_{
m max}$  and intensity of stresses  $\sigma_i$  in heterogeneous dams, obtained with account of large strains, differ essentially from intensity of stresses  $\sigma_i$ , obtained in linear statement for homogeneous model. Here the greatest stresses are observed in the upper part of a dam and on kernel-slope contact. Maximal tangential stresses  $au_{
m max}$  are reached on the upper part of upper slope; this may damage stability of this zone.

Abrupt change of stress intensity in joint point of a kernel with transient zones of a dam may lead to formation of cracks in these sections. Mentioned effects occur in sufficiently high heterogeneous dams. Thus, in assessment of high structures strength it is necessary to take into account large strains of the structure and real structural specific features.

#### Conclusion

Methods, algorithms and PC programs to assess stress-strain state of heterogeneous earth dams with account of moisture content, elastic-plastic properties of soil and large strains under static effects were worked out. Performed studies show, that:

- an account of elastic-plastic properties of material leads to qualitative and quantitative changes
  of stress-strain state of high earth dams. The difference of strain properties and yield limits of a
  kernel and prisms leads to an increase of arch effect, typical for vertical stresses and to
  occurrence of plastic shear strains in slope zones; this may facilitate the change of dam profile;
- an account of moisture content of soils alters stress state of a dam and leads to an increase of horizontal stresses in the lower part of a dam and almost two times increase of tangential stresses in a kernel and near upper slope;
- an account of large strains and heterogeneity of the high dam leads to considerable change of stress-strain state of the whole structure and to stress drop in a contact of different parts of it.

#### References

- Zaretsky Yu.K., Lombardo V.N. Statika i dinamika gruntovykh plotin [Statics and dynamics of earth dams]. Moscow: Energoizdat, 1983. 256 p. (rus)
- 2. Krasnikov N.D. *Seismostoikost gidrotekhnicheskikh sooruzheniy iz gruntovykh materialov* [Seismic stability of hydro-technical structures from soil materials]. Moscow: Energoizdat, 1981. 240 p. (rus)
- 3. Lyakhter V.M., Ivashchenko I.N. Seismostoikost gruntovykh plotin [Seismic stability of earth dams]. Moscow: Nauka. 1986. 233 p. (rus)
- 4. Sultanov K.S., Salyamova K.D., Khusanov B.E. *Problems of Development of Transport and Engineering communications*. 2001. No.1. Pp. 37–40. (rus)
- 5. Mirsaidov M.M. *Teoriya i metody rascheta gruntovykh sooruzheniy na prochnost i seismostoykost* [Theory and methods of design of earth structures on strength and seismic stability]. Tashkent: FAN, 2010. 312 p. (rus)

- 6. Mirsaidov M.M. Seismic stability of different earth dams. 6-th International Conference on Dam Engineering. 15–17 February 2011. LNEC. Lisbon, Portugal. Pp. 787–798.
- 7. Saman Yaghmaei-Sabegh, Roya Motallebzade. An effective procedure for seismic hazard analysis including nonlinear soil response. *Natural Hazards*. 2012. Vol. 64. Issue 2. Pp. 1731–1752.
- 8. Rui Pinho. Nonlinear Dynamic Analysis of Structures Subjected to Seismic Action. *Advanced Earthquake Engineering Analysis*. 2007. Vol. 494. Pp. 63–89.
- Meen-wah Gui. Numerical modeling of an advancing hydraulically-driven pile in sand. Journal of Zhejiang University SCIENCE A. 2011. Vol. 12. Issue 1. Pp. 15–23.
- 10. Khoei A.R., Azami A.R., Haeri S.M. Implementation of Plasticity Based Models in Dynamic Analysis of Earth and Rockfill Dams: A Comparison of Pastor–Zienkiewicz and Cap Models. *Computers and Geotechnics*. 2004. Vol. 31. Issue 5. Pp. 384–409.
- 11. Szostak-Chrzanowski A., Chrzanowski A., Massiéra M. Use of Deformation Monitoring Results in Solving Geomechanical Problems-case Studies. *Engineering Geology*. 2005. Vol. 79. Issues 1–2. Pp. 3–12.
- 12. Chakraborty D., Choudhury D. Investigation of the Behavior of Tailings Earthen Dam Under Seismic Conditions. *American Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2009. Vol. 2. Issue 3. Pp. 559–564.
- 13. Bulatov G.Ya., Gatanov D.S. Magazine of Civil Engineering. 2012. Vol. 30. No.4. Pp. 2-9.(rus)
- 14. Khodjiboev A.A. Vestnik MGSU. 2012. No.7. Pp. 96-100. (rus)
- 15. Sultanov T.Z., Mirsaidov M.M. An Assessment of Potential of Strength Increase in Earth Dams Due to the Use of Anti-seismic Belts. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Vol. 9. Issue 2. Pp. 140–149.
- 16. Sultanov T.Z., Mirsaidov M.M., Khodjaev D.A. Evaluation of Dynamic Behavior of Non-uniform Structures with Account of Non-linear and Viscous-elastic Characteristics of Material. *Proceedings of Australasian Structural Engineering Conference*. 11–13 July 2012. ASEC. Perth, Australia. Pp. 63–70.
- 17. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A. Assessment of the Stress-Strain State of Earth Dams. Civil-Comp Proceedings 100 of 8-th International Conference on Engineering Computational Technology (ECT 2012). 4–7 September 2012, Dubrovnik, Croatia. Vol. 1. Pp. 1482–1499.
- 18. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A. Stability evaluation of slopes of earth dams with account of soil rheological properties. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. Vol. 35. No.9. Pp. 49–58.
- 19. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A. Electronic modeling. 2012. Vol. 34. No.6. Pp. 41–54. (rus)
- 20. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2013. Vol. 49. Issue 6. Pp. 250–256.
- 21. Birger I.A. Applied mathematics and mechanics. 1951. Vol. 15. No.6. Pp.765–770. (rus)
- 22. Malinin N.N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creeping]. Moscow: Mashinostroeniye, 1975. 400 p. (rus)
- 23. Sultanov K.S. Applied mathematics and mechanics. 1998. Vol. 62. No.3. Pp. 503-511. (rus)
- 24. Sultanov K.S., Khusanov B.E. Uzbek Journal Problems of Mechanics. 2004. No.5-6. Pp.27-31. (rus)
- 25. Sultanov K.S. Reports of Ac. of Sci. RUz. 1997. No.9. Pp. 21-24. (rus)
- 26. Khusanov B.E. Reports of Ac. of Sci. RUz. 2004. No.2. Pp.3 5-40. (rus)
- 27. Mirzaev A.G. Architecture and construction in Uzbekistan. 1992. No.1. Pp. 33-35. (rus)
- 28. Bate K., Wilson E. *Chislennye metody analiza i MKE* [Numeric Methods of Analysis and the Method of Finite Elements]. Moscow: Stroyizdat, 1982. 448 p. (rus)
- 29. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numeric Methods]. Moscow: Nauka, 1978, 512 p. (rus)
- 30. Aleksandrov A.V., Potapov V.L. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Bases of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1990. 400 p. (rus)
- 31. Barkan D.D. *Dinamika osnovaniy i fundamentov* [Dynamics of Foundations and Bases]. Moscow: Stroyvoenizdat, 1948. 411 p. (rus)
- 32. Yasinetsky V.G., Fenin N.K. *Organizatsiya i tekhnologiya gidromeliorativnykh rabot* [Organization and Technology of hydro-melioration works]. Moscow: Agropromizdat, 1986. 352 p. (rus)

\* Mirziyod Mirsaidov, Tashkent, Uzbekistan

Phone number: +7(987)2370981; e-mail: theormir@mail.ru

© Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Sadullaev Sh.A., 2013

## Расчет надежности грунтового основания на стадии эксплуатации при внецентренно нагруженном фундаменте

Д.т.н., профессор В.С. Уткин\*,

ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный технический университет»

**Ключевые слова:** основание фундамента; осадка; краевое давление; эксцентриситет силы; расчетное сопротивление; вероятность; возможность; интервал надежности.

Надежность любого грунтового основания зданий и сооружений на стадии эксплуатации прежде всего служит мерой безопасности эксплуатации зданий и сооружений в целом. В последнее время уделяется особое внимание механической (конструкционной) безопасности зданий и сооружений из-за старения жилого фонда, применения конструкций для опасных производств, а также в связи с интенсивным строительством высотных зданий и рядом крупных аварий. Этим объясняется появление новых правительственных и нормативных документов, таких как закон Российской Федерации №384 от 2009 г. «Технический регламент по безопасности зданий и сооружений», стандарт ГОСТ Р 54257-2010 «Надежность строительных конструкций», СП 22.13330.2011 «Основания зданий и сооружений» и др.

Рекомендованные стандартом ГОСТ Р 54257-2010 вероятностно-статистические методы расчетов надежностей описаны для конструкций и оснований фундаментов в работах [1, 2, 3 и др.]. Проблема заключается в том, что в ряде случаев эти методы не могут быть применены для конструкций из-за ограниченности статистической информации, получаемой в результате измерений контролируемых параметров для расчетных моделей. Особую трудность в получении статистической информации о параметрах несущих элементов в зданиях и сооружениях вызывают основания фундаментов из-за ограниченной доступности к ним.

В последнее время в России и за рубежом появились теории и методы расчетов надежности для различных отраслей в интервальной форме [4, 5, 6, 7 и др.]. Данные об использовании их применительно к расчетам надежности оснований фундаментов при ограниченной статистической информации о контролируемых параметрах можно найти в работах [8, 9]. В предлагаемой работе рассматривается метод расчета надежности грунтовых оснований фундаментов на стадии эксплуатации по критерию деформации (осадки фундамента), связанной с внешней нагрузкой, приложенной с эксцентриситетом. Это наиболее распространенный вариант работы оснований фундаментов зданий и сооружений.

На стадии эксплуатации зданий возможно появление эксцентриситета нагрузки или его изменение, которые невозможно предвидеть на стадии проектирования основания фундамента. Эти изменения в работе основания фундамента могут привести к снижению его надежности и к изменению безопасности здания или сооружения в целом. Для расчета надежности грунтового основания в новых условиях его эксплуатации необходимо выявить значения нагрузки (давления) под подошвой фундамента, эксцентриситета ее приложения и физико-механических свойств грунта. В дальнейшем будем исходить из линейного закона распределения давления от подошвы фундамента на грунт основания [3].

Выявление значения нагрузки, передаваемой на грунт основания, можно определить методом сбора нагрузок, как это делается на стадии проектирования. Такой метод на стадии эксплуатации не применяется из-за трудоемкости, неточности, неэкономичности. Предлагается давление на грунт основания от фундамента (см. рис. 1а) определить косвенно через измерения деформаций в материале фундамента (см. рис. 1б) для одного варианта распределения давления на грунт основания под подошвой фундамента, предусмотренного в СП 22.13330.2011.

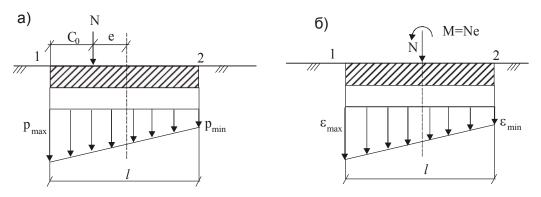


Рисунок 1. Эпюры давления p и деформаций  $\varepsilon$  грунта по подошве фундамента при внецентренном нагружении основания

Деформации  $\varepsilon_{\min}$  и  $\varepsilon_{\max}$  предлагается измерять с помощью тензорезисторов [10, 11] или других средств измерения. Для этого в теле фундамента с обеих сторон на одном уровне на расстоянии 50–60 см от подошвы фундамента наклеивают на его поверхность тензорезисторы и измеряют их омическое (электрическое) сопротивление  $R_0$ . Затем ниже тензорезисторов образуют карман глубиной 10 см и вновь измеряют сопротивление тензорезисторов  $R_1$ . Подробно

этот метод описан в работе [11]. По формуле  $\varepsilon = \frac{\left|R_1 - R_0\right|}{kR_0}$  находят значение деформаций  $\varepsilon$  в

материале фундамента, где k — коэффициент тензочувствительности тензорезисторов. Давление p на грунт основания находят по формуле  $p=\varepsilon E+\gamma h$ , где E — модуль упругости материала фундамента, определяемый неразрушающими методами [10];  $\gamma$  — удельный вес материала фундамента (в соответствии с терминологией СП 22.13330.2011); h — расстояние от тензорезисторов до подошвы фундамента;  $\varepsilon$  — деформации в материале фундамента ( $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_{\min}$ ), как показано на рисунке 1б. Для расчета надежности основания фундамента по критерию деформации, зависящей от нагрузки на основание, по СП.22.13330.2011 используется математическая модель предельного состояния вида  $\widetilde{p} \leq \widetilde{R}$ , записанная с учетом изменчивости давления  $\widetilde{p}$  на грунт основания и сопротивления грунта  $\widetilde{R}$  (изменчивость отмечена волнистой линией над буквами). При расчете надежности основания фундамента из двух значений давления  $p_{\max}$  и  $p_{\min}$  в математическую (расчетную) модель вводится наибольшее краевое давление  $\widetilde{p}_{\max}$ .

С учетом многократного измерения деформаций  $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_{\min}$  для статистики находят  $\widetilde{p}_{\max} = \widetilde{\varepsilon}_{\max} E + \not\! h$  и  $\widetilde{p}_{\min} = \widetilde{\varepsilon}_{\min} E + \not\! h$ .

Примем, как вариант, модуль упругости E детерминированной величиной. В дальнейшем будет рассмотрен вариант E в виде случайной величины, требующий более сложного математического решения.

Вместо измерения деформаций можно измерять давление  $p_M$  масла по манометру насоса, с помощью которого масло нагнетается в коробку, распложенную в кармане, до приведения сопротивления тензорезисторов  $R_1$  к первоначальному значению  $R_0$ . В этом случае отпадает необходимость измерения модуля упругости материала фундамента. Подробную информацию об этом методе эксперимента можно найти в работе [11]. Давление на грунт основания определяется по формуле  $p=p_M+n$ . Могут использоваться и другие способы измерения давления p.

Расчетная формула для оценки надежности, с учетом указаний о значении краевого давления по СП 22.13330.2011, примет вид:

$$\widetilde{p}_{\max} \le 1,2\widetilde{R}$$
 (1)

По СП 22.13330.2011 расчетное сопротивление  $\widetilde{R}$  определяется по формуле:

$$\widetilde{R} = \alpha \left[ M_{\gamma} k_z b \widetilde{\gamma}_{II} + M_q d_1 \widetilde{\gamma}_{II}' + \left( M_q - 1 \right) d_0 \widetilde{\gamma}_{II}' + M_c \widetilde{c}_{II} \right], \tag{2}$$

где  $\widetilde{\gamma}_{II}$ ,  $\widetilde{\gamma}'_{II}$ ,  $\widetilde{c}_{II}$  — контролируемые параметры (случайные величины), определяемые испытаниями образцов грунта, отбираемых из-под фундамента и испытываемых в лаборатории согласно ГОСТ 30416-96. Рассмотрим вариант, в котором ширина фундамента b < 10 м. В этом случае  $k_z = 1,3$ . Значения  $M_{\gamma}$ ,  $M_q$ ,  $M_c$  принимают детерминированными величинами, если угол

внутреннего трения  $\varphi_{II}$  определяется по таблице 5.5 СП 22.1333.2011.  $\alpha=1,2\frac{\gamma_{c_1}\cdot\gamma_{c_2}}{k}$  — детерминированная величина, принимаемая по указаниям СП 22.13330.2011.

Таким образом, формула (1) с учетом (2) содержит четыре случайные величины. Способы их описания методами теории вероятностей и математической статистики зависят от объема и точности измерений контролируемых параметров в формулах (1) и (2). Отсутствие краевого отрыва подошвы фундамента от грунта определяется условием  $e \le l/6$ .

Для этого по своду правил эксцентриситет e нагрузки определяется по формуле  $e=M/(N+\gamma_{ml}dlb)$ .

На практике приведенной формулой для определения эксцентриситета e на стадии эксплуатации здания воспользоваться не удается в связи с трудностью определения значения всех параметров формулы. Предлагается определять эксцентриситет e по результатам измерения деформации материала фундамента. Известно, что при внецентренном сжатии бруса

прямоугольного сечения 
$$\varepsilon_{\max} = \left(\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W}\right)/E$$
 ,  $\varepsilon_{\min} = \left(\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W}\right)/E$  [12]. Как отмечено выше,

вместо деформаций  $arepsilon_{\max}$  и  $arepsilon_{\min}$  можно использовать давление масла  $p_{\max}$  и  $p_{\min}$ . Отсюда

совместным решением двух уравнений найдем 
$$e=rac{W}{A}rac{\left(arepsilon_{
m max}-arepsilon_{
m min}
ight)}{\left(arepsilon_{
m max}+arepsilon_{
m min}
ight)}$$
, где  $A$  – площадь

фундамента на уровне наклеенных тензорезисторов; W – момент сопротивления площади фундамента на том же уровне.

Рассмотрим расчет надежности основания фундамента по критерию (1) при  $e/l \le 1/6$  (см. рис. 1). На уровне подошвы фундамента, как было описано выше, краевое давление на грунт основания составит:

$$\widetilde{p}_{\max} = \widetilde{\varepsilon}_{\max} E + \gamma h. \tag{3}$$

Значения  $\gamma$  и h можно определить с высокой точностью по сравнению с  $\varepsilon$  , кроме того, вклад члена  $\not h$  в значение  $\widetilde p_{\max}$  мал, поэтому примем  $\not h$  детерминированной величиной.

Расчетная модель (1) с учетом (3) и (2) примет вид:

$$\widetilde{\varepsilon}_{\max} E + \gamma h \le \alpha \left[ M_{\gamma} b \widetilde{\gamma}_{II} + M_{\alpha} d_1 \widetilde{\gamma}_{II}' + \left( M_{\alpha} - 1 \right) d_b \widetilde{\gamma}'_{II} + M_c \widetilde{c}_{II} \right] . \tag{4}$$

Если число измерений  $\widetilde{\varepsilon}_{\max}$ , получаемых с помощью неразрушающих методов согласно источникам [10, 11], может быть достаточным для анализа и подбора для нее вероятностной функции распределения [1, 13 и др.], то  $\widetilde{\varepsilon}_{\max}$  может быть хорошо описана усеченным нормальным [14] или нормальным (гауссовским) распределением [1, 13] с плотностью вероятности:

$$f_{\widetilde{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{\varepsilon}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_{\varepsilon})^2}{2S_{\varepsilon}^2}},$$
 (5)

где  $m_{\mathcal{E}}$  – статистическое математическое ожидание случайной величины  $\widetilde{\mathcal{E}}$ ;  $S_{\mathcal{E}}$  – среднее квадратическое отклонение деформации  $\widetilde{\mathcal{E}}$ . Обозначим в (3)  $\widetilde{p}_{\max}=\widetilde{\mathcal{E}}_{\max}E+\gamma\hbar=X$ , тогда (5) для  $\widetilde{p}_{\max}=X$  примет вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_Y} e^{-\frac{(x - m_X)^2}{2S_X^2}},$$
 (5')

где  $m_X = m_{\varepsilon}E + \gamma h$ ;  $S_X = S_{\varepsilon}E$  .

Если статистической информации для объективного описания деформации недостаточно для принятия решения о виде распределения  $\widetilde{\varepsilon}$  и его проверки на адекватность, то для этой цели используются другие подходы [4, 5, 6, 7, 8], которые в данной статье не рассматриваются.

Для подбора и описания случайных величин  $\widetilde{\gamma}_{II}$ ,  $\widetilde{c}_{II}$  вероятностными функциями распределения теории вероятностей и математической статистики, как правило, статистической информации недостаточно [1, 13], поэтому будем считать их нечеткими переменными (по терминологии теории возможностей [15]) и описывать их, согласно источникам [15, 16, 17, 18], функцией распределения возможностей нечеткой переменной Y вида

$$\pi_Y(y) = \exp\left[-\left(\frac{y - a_y}{b_y}\right)^2\right],\tag{6}$$

где  $a_Y=0.5(Y_{\max}+Y_{\min})$ ,  $b_Y=0.5(Y_{\max}-Y_{\min})/\sqrt{-\ln\alpha}$ ;  $\alpha\in[0,1]$  и называется уровнем среза (риска). Значением  $\alpha$  задаются в зависимости от числа измерений параметров ответственности конструкций и других факторов, приведенных в [19].  $Y_{\max}Y_{\min}$  — наибольшее и наименьшее значения измеренного нечеткого переменного Y. На рисунке 2 показан вид функции (6).

Сама функция  $\pi_Y(y)$  показывает возможность того, что нечеткая переменная Y примет значение, равное y , т. е. Y=y .

В (4) имеем сумму нечетких переменных  $\widetilde{\gamma}_{II}$ ,  $\widetilde{\gamma}'_{II}$ ,  $\widetilde{c}_{II}$ . С учетом коэффициентов при них в (4) введем обозначения  $Y_1 = \alpha M_{\gamma}b\widetilde{\gamma}_{II}$ ,  $Y_2 = \left[\alpha M_q d_1 + \left(M_q - 1\right)d_b\right]\widetilde{\gamma}'_{II}$ ,  $Y_3 = \alpha M_c\widetilde{c}_{II}$ .

Согласно работам [15, 16, 17, 18] для функции Y от суммы нечетких переменных  $Y_i$  функция распределения возможностей имеет вид:

$$\pi_Y(y) = \exp\left\{-\left[\left(y - \sum_{i=1}^n a_i\right) / \sum_{i=1}^n b_i\right]^2\right\},\tag{7}$$

где  $a_i=0.5(Y_{\max i}+Y_{\min i}),\ b_i=0.5(Y_{\max i}-Y_{\min i})/\sqrt{-\ln \alpha}$ , i=1,2,3. Соответственно,  $a_y=\sum a_i,\ b_y=\sum b_i$  и формула (7) будет по форме совпадать с (6). Значениями  $\alpha$  при определении  $b_i$  задаются одинаковыми для всех нечетких переменных  $Y_i$ .

Из теории надежности [1, 2, 13] известно, что значение надежности P, как вероятности события  $X \leq Y$ , где X – обобщенная нагрузка, Y – обобщенная прочность (при независимых X и Y), находят по формулам, приведенным А.Р. Ржаницыным в работе [13, с. 60] в следующем виде:

$$P = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot S_Y(x) dx.$$
 (8)

Если принять для X функцию распределения (5') и для Y функцию принадлежности (7) с двумя граничными функциями (верхней  $\overline{S}_Y(x)$  и нижней  $\underline{S}_Y(x)$  при x=y или  $\pi_Y(y)=\overline{S}_Y(x)$  и  $1-\pi_Y(y)=\underline{S}_Y(x)$ , как показано на рисунке 2), то по формуле (8) будем иметь два значения вероятностей безотказной работы для условия  $X \leq Y$  в виде:

$$\underline{P} = 1 - \int_{0}^{a_{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{x}} e^{-\frac{(x-m_{x})^{2}}{2S_{x}^{2}}} \cdot e^{-\left(\frac{x-a_{y}}{b_{y}}\right)^{2}} dx - \int_{a_{y}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{x}} e^{-\frac{(x-m_{x})^{2}}{2S_{x}^{2}}} dx$$

$$\overline{P} = 1 - \int_{0}^{a_{y}} 0 dx - \int_{a_{y}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{x}} e^{-\frac{(x-m_{x})^{2}}{2S_{x}^{2}}} \left(1 - e^{-\frac{(x-a_{y})^{2}}{b_{y}^{2}}} dx\right)$$
(9)

Надежность основания фундамента будет характеризоваться интервалом  $\left[\underline{P},\overline{P}\right]$ 

Условно для наглядности и обоснования пределов интегрирования на рисунке 2 представлены графики функций (5') и (6) и граничные функции распределения  $\underline{F}_Y(x)$ ,  $\overline{F}_Y(x)$ .

Надежность основания фундамента на стадии эксплуатации находят при соблюдении условия  $m_x \le a_v$  (средняя нагрузка меньше средней прочности).

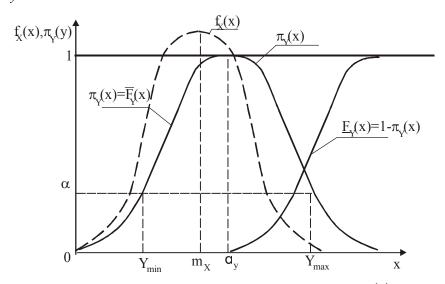


Рисунок 2. Функция плотности вероятности  $f_X(x)$  и функция распределения возможностей  $\pi_Y(y) = \pi_Y(x)$ 

Уткин В.С. Расчет надежности грунтового основания на стадии эксплуатации при внецентренно нагруженном фундаменте

**Пример.** Пусть известны значения  $m_X=20,\,S_X=3,\,a=30,\,b=6$  (единицы измерения опускаем). По формуле (9), используя компьютерную программу, найдем  $\underline{P}=0.872,\,\overline{P}=0.9999$  .

Допустим, что удалось повысить характеристики грунта  $\gamma_{II}$  ,  $\gamma'_{II}$  ,  $c_{II}$  , например, цементацией до  $a=35,\,b=8$  при прежнем значении нагрузки  $m_X=20,\,S_X=3$  . Получим  $P=0.943,\,\overline{P}\approx 1$  . Интервал надежности основания повысился до [0,942;1].

Наоборот, при подмачивании грунта и снижении его прочностных характеристик до  $a=28,\ b=7$  при  $m_X=20,\ S_Y=3$  получим  $\underline{P}=0{,}673$   $\overline{P}=0{,}9999$ . Интервал надежности будет равен  $\begin{bmatrix} 0{,}673{;}0{,}9999 \end{bmatrix}$ .

Из решения последнего примера видно, что интервал надежности  $\left[0,673;0,9999\right]$  при новых исходных данных о грунте малоинформативен из-за его ширины. Это указывает на необходимость попробовать, если возможно, повысить объем и точность измерений x и у, что может привести к сужению интервала надежности. Если предельная (допустимая) надежность  $P_{np}$  больше значения  $P_{\min}=0,673$ , то нельзя ли принять из расчетного интервала надежности значение надежности основания больше  $P_{\min}$ , например, равное  $P_{np}$ , так как истинное значение надежности находится внутри интервала  $\left[\underline{P},\overline{P}\right]$ ?

Это можно сделать, принимая некоторое значение риска, определение которого приведено в работе [9] и в работах [20, 21].

Следует также отметить вероятность того, что модуль упругости нельзя принять детерминированной величиной. В этом случае имеем  $X=\widetilde{\varepsilon}\widetilde{E}+\not m$ , т. е. имеем случайную функцию X от двух случайных аргументов  $\widetilde{\varepsilon}$  и  $\widetilde{E}$ . Если при этом каждый из случайных аргументов имеет нормальное распределение, то можно с достаточной степенью приближения для основания фундамента считать, что функция  $X=\widetilde{\varepsilon}\widetilde{E}+\not m$  будет распределена по нормальному закону, и принять для нее математическое ожидание  $M(x)=m_{\varepsilon}m_{E}+\not m$ , а среднее квадратическое отклонение  $S_X=\sqrt{m_E^2S_{\varepsilon}^2+m_{\varepsilon}^2S_E^2}$  [21]. Алгоритм расчета остается прежним.

Можно использовать и другой подход. Обозначим  $\widetilde{E}=z$  и функцию плотности распределения модуля упругости материала фундамента f(E)=f(z). Тогда формулу (8) представим в виде  $P=\iiint_{S}f(x)f(y)f(z)dxdydz$ . Дальнейшее решение будет зависеть от вида функции распределения случайной величины z. Алгоритм расчета надежности основания фундамента сохраняется.

### Выводы

- 1. Предложен новый подход к расчету надежности грунтового основания фундамента при ограниченной информации о прочности грунта по критерию деформации (осадки), зависящей от внешней нагрузки, приложенной с эксцентриситетом.
- 2. Рассмотрен способ определения значения эксцентриситета внешней нагрузки на основание фундамента на стадии эксплуатации здания.
- 3. Приведены расчетные формулы для определения значений вероятности безотказной работы основания и интервала надежности основания фундамента, сопровождающиеся примерами.
- 4. Приведенная методика расчета надежности основания фундамента может быть использована на практике специалистами при оценке безопасности оснований и зданий в целом.

Уткин В.С. Расчет надежности грунтового основания на стадии эксплуатации при внецентренно нагруженном фундаменте

### Литература

- 1. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций. Пер. с нем. М.: Стройиздат, 1994. 288 с.
- Calgaro J.A., Gulvanession H. Management of Reliability and Risk in the Eurocode System // Proceedings of International Conference on Safety, risk and reliability – trends in engineering.. Malta, 2001. Pp. 155– 160.
- 3. Ермолаев Н.Н., Михеев В.В. Надежность снований сооружений. Л.: Стройиздат, 1976. 152 с.
- 4. Cozman F.G. Calculation of posterior bounds given convex sets of prior probability measures and likelihood functions // Journal of Computational and Graphical Statistics. 1999. Vol. 8. No.4. Pp. 824–838.
- 5. Fetz Th., Oberguggenbergep M. Propagation of uncertainty through multivariate functions in the framework of sets of probability measures // Reliability Engineering and System Safety. 2004. Vol. 85. Issues 1–3. Pp. 73–87.
- 6. Уткин Л.В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб.: Наука, 2007. 404 с.
- 7. Baudrit C., Dubois D. Practical representations of incomplete probabilistic knowledge // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. Vol. 51. Pp. 86–108.
- 8. Уткин В.С., Шепелина Е.А. Расчет надежности оснований фундаментов многоэтажных зданий при ограниченной (неполной) информации о параметрах математической модели предельного состояния // Строительная механик и расчет сооружений. 2012. № 6. С. 47–50.
- 9. Уткин В.С., Шепелина Е.А. Расчет надежности оснований фундаментов по критерию прочности при ограниченной информации о нагрузке // Инженерно-строительный журнал. 2013. №1. С. 48–56.
- 10. Землянский А.А. Обследование и испытание зданий и сооружений. Учебное пособие. М.: АСВ, 2002. 240 с.
- 11. Лужин О.В., Злочевский А.П., Горбунов И.А., Волохов В.А. Обследование и испытание сооружений. Под. Ред. О.В. Лужина. М.: Стройиздат, 1987. 263 с.
- 12. Смирнов А.Ф., Александров А.В, Монахов М.И. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1975. 480 с.
- 13. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М.: Стройиздат, 1978. 239 с.
- 14. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. Пер. с англ. Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Советское радио, 1969. 488 с.
- 15. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. Пер. с фр. Д. Дюбуа. М.: Радио и связь, 1990. 288 с.
- Уткин В.С. Определение надежности строительных конструкций. Учеб. пособие. Вологда: ВоГТУ, 2000. 153 с.
- 17. Utkin V.S., Utkin L.V. Calculating the reliability of shafts with probability and possibility in the limiting-state model // Russian Engineering Research. 2009. Vol. 29. Issue 7. Pp. 664–667.
- 18. Utkin V.S. Crankshaft reliability in terms of fatigue strength is calculated by means of a mathematical model with a limiting state on the basis of both probability and possibility methods // Russian Engineering Research. 2009. Vol. 30. Issue 7. Pp. 763–767.
- 19. Уткин В.С. Значение уровня риска в теории возможностей // Строительные материалы. 2004. №8. С. 35.
- 20. Улицкий В.М. Лисюк М.Б. Оценка риска и обеспечение безопасности в строительстве // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2003. №5. С. 160–166.
- 21. Уткин Л.В., Лапин А.Э. Модели гарантийных обязательств в условиях ограниченной и неточной исходной информации // Управление риском. 2007. №2. С. 53–60.

\*Владимир Сергеевич Уткин, г. Вологда, Россия Тел. раб.: +7(8172)518396; эл. почта: UtkinVoGTU@mail.ru

© Уткин В.С., 2013

Уткин В.С. Расчет надежности грунтового основания на стадии эксплуатации при внецентренно нагруженном фундаменте

# Влияние строительных швов и трещин на напряженно-деформированное состояние арочно-гравитационной плотины

К.т.н., доцент Г.С. Колосова\*; д.т.н., профессор В.В. Лалин, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»;

инженер А.В. Колосова, ОАО «Ленгидропроект»

**Ключевые слова:** плотина ГЭС; строительные швы; односторонние связи; расчетный комплекс SOFiSTiK; конечно-элементная модель; перемещения и напряжения в точках плотины.

В процессе возведения и эксплуатации массивных бетонных сооружений происходят разнообразные нарушения непрерывности их материала: образуются трещины, раскрываются и закрываются строительные и иные швы. Эти нарушения сплошности материала оказывают большое влияние на перемещения и усилия в точках сооружения. В расчетных схемах сооружений трещины и швы обычно моделируются односторонними связями [1, 2]. Типичными примерами систем с односторонними связями служат конструкции, свободно опертые на некоторую поверхность, которая запрещает перемещение в сторону этой поверхности и не препятствует перемещению в противоположном направлении. Односторонняя связь может находиться в одном из двух состояний [3]:

- рабочем, связь включена, тогда реакция связи R>0 , перемещение U=0 ;
- нерабочем, связь выключена, тогда  $R=0,\ U>0$  .

Тот факт, что при изменении нагрузки те или иные связи включаются или выключаются, делает возможным лишь частичное приложение законов линейной механики. К такой системе неприложим закон независимости действия сил, могут быть нарушены теоремы о взаимности работ или перемещений. В данной работе рассматриваются системы с идеальными связями без трения, у которых единственным источником нелинейности является наличие односторонних связей. Системы такого типа часто называют конструктивно-нелинейными [3, 4]. Для них характерно полностью обратимое упругое поведение, которое определяется единственным решением задачи.

Основная трудность расчета систем с односторонними связями состоит в том, чтобы отыскать среди возможных систем действительную систему, отвечающую заданной нагрузке. Критерии правильности нахождения действительной системы, введенные Дж. Геллером [5], состоят в следующем:

- усилия во всех односторонних связях, определенные из уравнений упругости, должны быть неотрицательными:
- зазоры по направлению односторонних связей должны быть положительными.

Реакции R , возникающие в односторонних связях, считаются положительными, если они соответствуют природе связи: сжатие положительно в связи-упоре, выключающейся при растяжении; растяжение положительно в связи, выключающейся при сжатии. Кроме того, те перемещения U , которые не ограничиваются односторонней связью, считаются положительными.

Актуальность исследования систем с односторонними связями обусловлена необходимостью:

- повышения надежности и эффективности расчетных схем сооружений, которые должны отражать любое сложное поведения объекта;
- совершенствования методов расчета при решении задач контактного деформирования в процессе изучения прочности конструкций;
- развития опыта использования современных программных комплексов для решения задач с односторонними связями.

Вместе с тем следует отметить, что понятие идеальной односторонней связи является математической абстракцией, и использование таких связей для моделирования швов и трещин в реальных сооружениях должно быть обосновано.

Целями данной работы являются:

- обоснование возможности использования односторонних связей для моделирования швов и трещин в сооружениях;
- исследование влияния на напряженно-деформируемое состояние арочногравитационной плотины Саяно-Шушенской ГЭС строительных швов и трещин по контакту «плотина – основание – береговые примыкания», которые моделируются односторонними связями. Для решения задачи применяется программновычислительный комплекс SOFiSTiK.

### Постановка задачи теории упругости с идеальными односторонними связями. Задача Синьорини

Рассмотрим тело, подчиняющееся линейным соотношениям теории упругости [6]. Тело имеет объем  $\mathit{V}$  . На части  $\mathit{S}_1$  поверхности тела заданы нагрузки, определяемые вектором

$$g_{\mathrm{S}}=egin{pmatrix} X_n \ Y_n \ Z_n \end{pmatrix}$$
 , где  $X_{\mathrm{n}}$  ,  $Y_{\mathrm{n}}$  ,  $Z_{\mathrm{n}}$  — составляющие поверхностной нагрузки по осям координат.

На части  $S_2$  поверхности тела заданы перемещения, определяемые вектором  $u_{\scriptscriptstyle S} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$  ,

где  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  – компоненты перемещений по осям координат. Соотношения теории упругости для тела имеют вид:

$$A^{T} \sigma + \rho = 0 \in V,$$
  

$$\sigma = D \ Au \in V,$$
  

$$A_{s}^{T} \sigma = g_{s} \in S_{1},$$
  

$$u = u_{s} \in S_{2}.$$

Здесь A – матрица операций дифференцирования; ho – вектор объемных сил;  $\sigma$  – вектор напряжений;  $\mathit{A_{\scriptscriptstyle S}}$  – матрица направляющих косинусов внешней нормали; D – матрица упругости; u – вектор перемещений:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \ \rho = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \ A_s = \begin{bmatrix} \cos(n,x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n,y) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n,z) \\ \cos(n,y) & \cos(n,x) & 0 \\ 0 & \cos(n,z) & \cos(n,y) \\ \cos(n,z) & 0 & \cos(n,x) \end{bmatrix},$$
 сова Г.С., Лалин В.В., Колосова А.В. Влияние строительных швов и трещин на напряже омированное состояние арочно-гравитационной плотины

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ламе [6].

Пусть в теле имеется разрез, образованный поверхностями  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  (рис. 1). Будем считать, что начальный зазор разреза, соизмеримый с перемещениями точек упругого тела, мало меняется по координатам, т. е. поверхности  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  почти параллельны. Обозначим ширину начального зазора по нормали к поверхности  $\Omega^+$  или  $\Omega^-$  через  $\Delta_n$  (рис. 1).

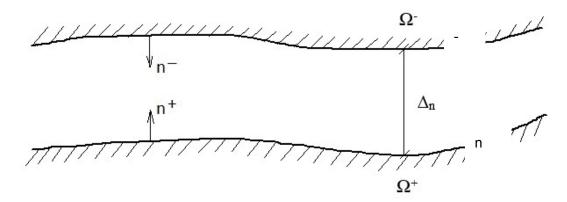


Рисунок 1. Модель разреза в упругом теле

Обратимся к условиям на разрезе. Пусть поверхности разреза  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  являются идеально гладкими. Условия на  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  для перемещений точек разреза определяются тем, что взаимные перемещения соответствующих точек поверхностей  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  в направлениях нормалей  $n^+$ ,  $n^-$  не могут быть больше начальной ширины зазора по нормали  $\Delta_n$ :

$$(n^{+})^{T}u^{+} + (n^{-})^{T}u^{-} = (n)^{T}(u^{+} - u^{-}) \le \Delta_{n}.$$
(1)

Здесь  $n^+$ ,  $n^-$  – векторы направляющих косинусов внешних нормалей к поверхностям  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$ ;  $n=n^+=-n^-$ .

Перейдем к условиям на разрезе для напряжений. Отсутствие взаимодействия между поверхностями  $\Omega^+, \Omega^-$  по направлениям касательных ортов не накладывает ограничений на касательные составляющие перемещений. Идеальная гладкость поверхностей  $\Omega^+, \Omega^-$  позволяет заключить, что касательные напряжения на этих поверхностях равны нулю:

$$(\tau_1)^T (A_{\Omega})^T \sigma^{\pm} = 0, (\tau_2)^T (A_{\Omega})^T \sigma^{\pm} = 0.$$
 (2)

Здесь  $au_1, au_2$  – векторы направляющих косинусов двух касательных к поверхностям  $\Omega^+,\,\Omega^-.$ 

Усилия, направленные по нормалям на поверхностях  $\Omega^+,\Omega^-$ , либо равны нулю, если поверхности не взаимодействуют, либо равны между собой и противоположно направлены, то есть:

$$n^{T}(A_{\Omega})^{T}\sigma^{+} = n^{T}(A_{\Omega})^{T}\sigma^{-}. \tag{3}$$

Поверхность разреза  $\Omega = \Omega^+$  можно считать состоящей из  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ . Пусть на  $\Omega_1$  берега разреза сомкнулись, тогда нормальные напряжения либо меньше нуля (сжатие), либо равны нулю (предельное состояние контакта), т. е. если

$$n^{T}(u^{+}-u^{-}) = \Delta_{n}$$
, to  $n^{T}(A_{\Omega})^{T}\sigma^{\pm} \leq 0$ . (4)

Будем считать, что на  $\Omega_2$  берега разреза  $\Omega^+,\Omega^-$  не находятся в контакте и, следовательно, нормальные напряжения равны нулю, т. е. если

$$n^{T}(u^{+}-u^{-}) < \Delta_{n}$$
, to  $n^{T}(A_{O})^{T}\sigma^{\pm} = 0$ . (5)

Поверхности  $\Omega_1,\,\Omega_2$  заранее не известны и могут быть определены только в процессе решения задачи. Это делает рассматриваемую задачу с односторонними идеальными (без взаимодействия по касательным к поверхностям разреза) связями нелинейной. На основании (4) и (5) можно записать:

$$\left[ n^T (u^+ - u^-) - \Delta_n \right] \cdot n^T (A_{\Omega})^T \sigma^{\pm} = 0.$$
 (6)

Равенство (6) выполняется для всей поверхности  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ . Указанные соотношения позволяют сформулировать следующую математическую постановку задачи для упругого тела, имеющего разрез вдоль поверхности  $\Omega = \Omega^+$  с начальной шириной зазора по нормали  $\Delta_n$ , на котором может осуществляться односторонняя связь между идеально гладкими поверхностями  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$ :

$$\begin{aligned}
(A)^T \sigma + \rho &= 0 \\
\sigma &= D \quad Au
\end{aligned} \in V, \\
(A_S)^T \sigma &= g_S, \quad \in S_1 \\
u &= u_S, \quad \in S_2.$$
(7)

$$n^{T}(u^{+}-u^{-}) \leq \Delta_{n},$$

$$(\tau_{1,2})^{T}(A_{\Omega})^{T}\sigma = 0,$$

$$(A_{\Omega})^{T}\sigma^{+} = (A_{\Omega})^{T}\sigma^{-},$$

$$ecnu\ n^{T}(u^{+}-u^{-}) = \Delta_{n},\ mo\ n^{T}(A_{\Omega})^{T}\sigma^{\pm} \leq 0,$$

$$ecnu\ n^{T}(u^{+}-u^{-}) < \Delta_{n},\ mo\ n^{T}(A_{\Omega})^{T}\sigma^{\pm} = 0$$
(8)

Третье условие в зависимостях (8) следует из равенств (2) и (3).

Краевая задача, определяемая выражениями (7) и (8), есть полная система условий, описывающих поведение упругой системы с идеальными односторонними связями. Задача была впервые сформулирована А. Синьорини [7].

В настоящее время поставленная задача решается методом конечных элементов [8–18]. Методика реализации МКЭ для систем с односторонними связями представлена в работах [1, 4, 19, 20]. Она реализована в таких программных комплексах, как SCAD и SOFiSTiK, где созданы специальные конечные элементы, моделирующие односторонние связи.

В данной работе расчеты трехмерной системы, содержащей односторонние связи, выполнялись с использованием конечно-элементного программного комплекса SOFiSTiK с применением шагового метода, идея которого основана на исследовании поведения системы при относительно малых приращениях нагрузки [21]. При этом на каждом шаге решалась линеаризованная система разрешающих уравнений для текущего приращения вектора узловых нагрузок. Шаг по нагрузке принимался постоянным.

# Конечно-элементная модель плотины Саяно-Шушенской ГЭС с блоком вмещающих скальных пород и береговых примыканий

Для исследования влияния на напряженно-деформируемое состояние арочногравитационной плотины Саяно-Шушенской ГЭС строительных швов и трещин по контакту «плотина – основание – береговые примыкания», моделируемых односторонними связями, была создана расчетная конечно-элементная модель в программно-вычислительном комплексе SOFiSTiK. Модель трехмерной системы, включающей плотину, основание и береговые примыкания, была разработана на кафедре «Строительная механика и теория упругости» СПбГПУ [22, 23, 24].

При разработке конечно-элементной модели ставилась задача обеспечения возможности доработок, уточнения и перестройки отдельных ее частей. Поэтому границы конечных элементов совпадают с естественными границами – каждая группа конечных элементов представляет одну секцию плотины [22, 23].

Изначально в препроцессоре были заданы структурные линии, плоскости и объемы, по которым затем программой была построена окончательная геометрия конечно-элементной модели.

Было принято решение, что настоящая модель не должна отображать напряженнодеформированное состояние отдельных сравнительно мелких элементов плотины, а должна воспроизводить работу совместной системы «плотина – основание» и позволить исследовать наиболее характерные состояния плотины.

В связи с этим в расчетной схеме не учитывались сравнительно мелкие элементы конструкции плотины: галереи, бычки водосбросов, турбинные водоводы, водоприемные отверстия на станционной и водосбросной частях плотины. Это привело бы к значительному увеличению размерности задачи из-за необходимости сгущения сетки конечных элементов.

Построение конечно-элементной модели произведено с использованием объемных 8-узловых конечных элементов (рис. 2). В программном комплексе конечно-элементного анализа SOFiSTiK они классифицированы как пространственные Bric-элементы:

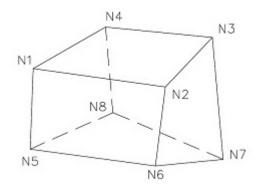


Рисунок 2. Пространственный 8-узловой конечный элемент программновычислительного комплекса SOFiSTiK

Назначение разработанной модели — отражать изменения напряженно-деформированного состояния сооружения под воздействием тех нагрузок и температурных перепадов, которые складываются в ходе ежегодно повторяющегося цикла наполнения и сработки водохранилища. В связи с этим было решено рассматривать плотину совместно с основанием как монолитное упругое тело, кроме областей трещин по контактному и строительному швам.

Конечно-элементная модель плотины построена с учетом задания зон неоднородности бетона и скального массива, а также зон установления односторонних связей [22, 23].

По ширине гребня плотины расположены четыре конечных элемента. Столбов в каждом поперечном сечении русловой секции также четыре. Каждый столб разбит на четыре конечных Колосова Г.С., Лалин В.В., Колосова А.В. Влияние строительных швов и трещин на напряженно-деформированное состояние арочно-гравитационной плотины

элемента. Таким образом, по подошве русловых секций имеется шестнадцать элементов. Вид модели сверху показан на рисунке 3.

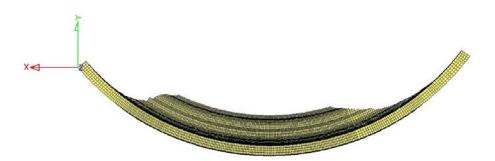


Рисунок 3. Вид сверху конечно-элементной модели плотины Саяно-Шушенской ГЭС

Контакт скалы и плотины в береговых упорах задавался на основании исходных данных, предоставленных ОАО «Ленгидропроект» [25].

Общее число элементов в модели плотины составляет 92938. Общее число узлов – 109928. Конечно-элементная модель плотины со стороны напорной грани изображена на рисунке 4.

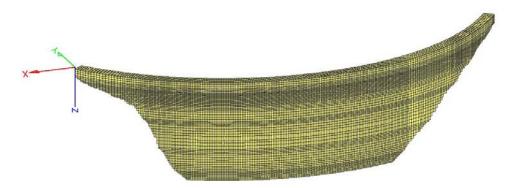


Рисунок 4. Вид конечно-элементной модели плотины со стороны напорной грани

Для учета совместной работы системы «плотина – основание» согласно предоставленным исходным данным в расчетную схему плотины включено скальное основание размерами 1500 м вдоль русла, 1800 м поперек русла и 200 м под плотиной. Дневная поверхность склонов каньона строилась на основе цифровой модели местности, имеющейся в группе геодезических измерений Саяно-Шушенской ГЭС [25].

Основание и береговые примыкания сложены массивом скальных пород, для которого характерна зональность распределения физико-механических свойств. На основании исходных данных, предоставленных ОАО «Ленгидропроект» [25, 26], в скальном массиве выделены 84 зоны. На границах параллелепипеда (массива скальных грунтов) заданы кинематические граничные условия – нулевые перемещения по нормали к границе.

Полная конечно-элементная модель системы «плотина — основание — береговые примыкания» содержит 260904 объемных конечных элемента и 292722 узла. Она представлена на рисунке 5.

В построенной расчетной модели строительный (отметка 355 м) и контактный (отметка 308 м) швы заданы с помощью двойной нумерации узлов в швах и установлением между узлами односторонних связей, которые включаются в работу при сжатии и выключаются при достижении критического растягивающего усилия. Эти связи моделируются специальными конечными элементами, имеющимися в комплексе SOFiSTiK.

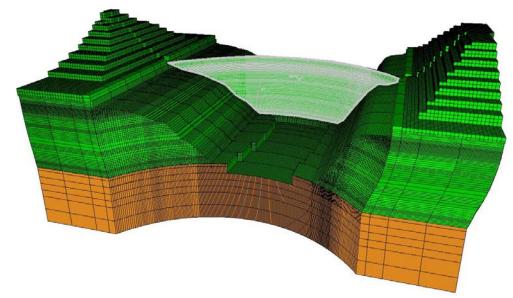


Рисунок 5. Конечно-элементная модель системы «плотина – основание – береговые примыкания»

Коэффициент жесткости односторонних связей принимался равным 10<sup>9</sup> кН/м. Установленные односторонние связи в конечно-элементной модели показаны на рисунках 6 и 7.

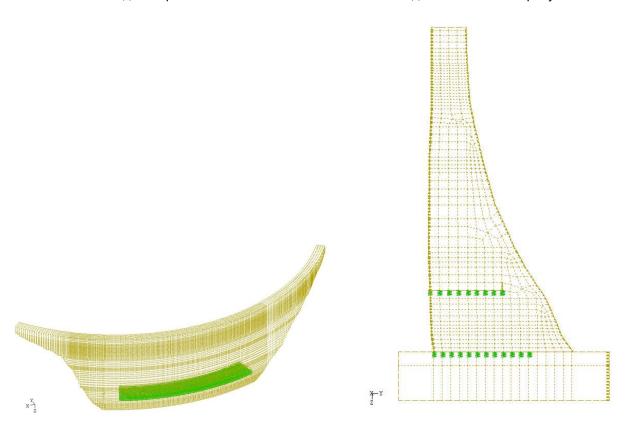


Рисунок 6. Расположение односторонних связей в строительном шве. Вид со стороны напорной грани

Рисунок 7. Расположение односторонних связей в контактном и строительном швах. Русловая секция

С помощью специальной функции было определено значение растягивающей силы, достижение которой приводит к выключению односторонних связей из работы системы. Значения критического усилия установлены на основании исходных данных ОАО «Ленгидропроект» [25, 26]: для строительного шва – 0,5 МПа, для контакта бетон–скала – 0,2 МПа.

### Расчет на гидростатическую нагрузку плотины со строительным и контактным швами

Были выполнены расчеты плотины с трещинами и без них в рамках трехмерной модели от гидростатической нагрузки при изменении уровня верхнего бьефа с 500 м до 540 м.

Фильтрационное давление на подошву плотины принималось изменяющимся по треугольнику до начала раскрытия контактного шва и по прямоугольнику на площадке раскрытия шва. Фильтрационное давление учитывалось также в строительном шве: по прямоугольнику, пока раскрытие не достигало линии дренажа, и по треугольнику после прохождения этой линии.

Для оценки правильности работы построенной конечно-элементной модели сравнивались полученные по расчету радиальные перемещения по гребню плотины с натурными наблюдениями. Графики перемещений приведены на рисунке 8 [23].

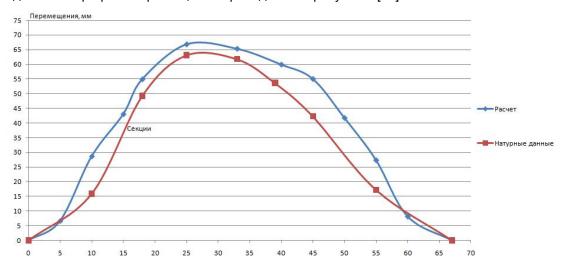


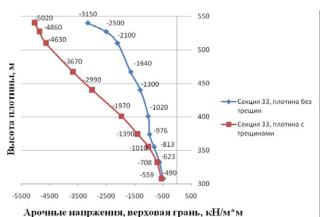
Рисунок 8. Радиальные перемещения по гребню плотины

Из анализа графиков видно, что получено удовлетворительное совпадение расчетных величин и натурных данных. Таким образом, можно считать, что принятая расчетная конечно-элементная модель плотины позволяет получать результаты, близкие к действительным.

В расчетах учитывалось возможное раскрытие строительного (отметка 355 м) и контактного (отметка 308 м) швов. Анализ полученных результатов расчетов показывает удовлетворительное согласование с натурными данными. Максимальная глубина распространения контактного шва при уровне верхнего бьефа 540 м составляет: по расчету — 39 м; по данным наблюдений — 37,2 м. Максимальная величина раскрытия контактного шва при уровне верхнего бьефа 540 м составляет: по расчету — 21 мм; по данным наблюдений — 23 мм. Аналогичная картина наблюдается для параметров раскрытия строительного шва, что в целом указывает на правильность задания в швах плотины нелинейных односторонних связей, выключающихся из работы при достижении критической растягивающей силы.

В плотине были определены арочные и консольные напряжения [23]. Результаты расчетов показали, что при учете работы трещин напряженное состояние системы существенно меняется.

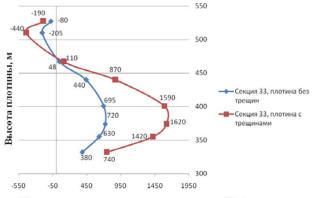
Сравнение расчетных арочных и консольных напряжений в плотине с трещинами и без трещин по верховой и низовой граням центральной секции 33 приведено на рисунках 9–12.

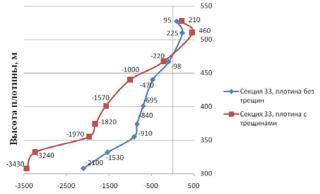


-3900 -2200 3670 -1920 -3310 1670 -1320 Высота плотины, м Секция 33, плотина без -870 трещин 400 Секция 33, плотина с 720 -950 трещинами -660 -770 350 -540 -610 -440 300 -4000 -1000 Арочные напржения, низовая грань, кН/м\*м

Рисунок 9. Арочные напряжения (кПа), верховая грань

Рисунок 10. Арочные напряжения (кПа), низовая грань





Консольные напржения, верховая грань, кН/м\*м

Консольные напржения, низовая грань, кН/м\*м

Рисунок 11. Консольные напряжения (кПа), верховая грань

Рисунок 12. Консольные напряжения (кПа), низовая грань

#### Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

- обоснована возможность моделирования швов и трещин в сооружениях с помощью идеальных односторонних связей;
- построенная на кафедре СМиТУ СПбГПУ трехмерная модель плотины Саяно-Шушенской ГЭС, включающая односторонние связи по строительному и контактному швам, верно отражает поведение системы;
- выполненные в программно-вычислительном комплексе SOFiSTiK расчеты пространственной системы «плотина основание береговые примыкания», где трещины и швы моделируются односторонними связями, дают результаты, близкие к натурным наблюдениям;
- представленные вычисления показывают, что учет работы трещин в теле плотины приводит к существенному увеличению напряжений по сравнению со схемой без трещин. При этом напряжения не превышают установленных предельных значений.

### Литература

- 1. Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергия, 1981. 136 с.
- 2. Толстиков В.В. Моделирование работы швов и трещин в расчетах напряженно-деформированного состояния бетонных плотин // Вестник МГСУ. 2006. №2. С. 123–132.
- 3. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. М.: Стройиздат, 1975. 370 с.

- 4. Люминарский И.Е. Расчет упругих систем с односторонними связями. М.: Изд-во МГИУ, 2006. 307 с.
- Geller J.M. Beitrag zur theorie veranderlich gegliederten und gestutiten // Sisteme. Der.Eisenbau. 1922. No.8, 9. Pp. 37–46.
- 6. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1978. 223 с.
- Signorini A. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata // Rend. Di Matem. E. delle sue appl. 1959. No.18. Pp.1–45.
- 8. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. 247 с.
- 9. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams // International Journal of Mechanical Sciences. 2008. Vol. 50. No.3. Pp. 578–588.
- 10. Burman E., Linke A. Stabilized finite element schemes for incompressible flow using Scott Vogelius elements // Applied Numerical Mathematics. 2008. Vol. 58. No.11. Pp. 1704–1709.
- 11. Lindner M. The finite section method and stable subsequences // Applied Numerical Mathematics. 2010. Vol. 60. No.4. Pp. 501–512.
- 12. Millind T.R., Date P.P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion // International Journal of Mechanical Sciences. 2012. Vol. 56. No.1. Pp. 26–34.
- Tarar W., Scott-Emuakpor O. Herman Shen M.-H. Development of new finite elements for fatigue life prediction in structural components // Structural engineering and mechanics. 2010. Vol. 35. No.6. Pp. 659– 676.
- 14. Бате К.Ю. Методы конечных элементов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 1022 с.
- 15. Ермакова А.В. Взаимосвязь метода дополнительных конечных элементов и других численных методов расчета конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №5. С. 28–33.
- 16. Покровский А.А. Об описании НДС конечного элемента среды // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. №3. С. 55.
- 17. Покровский А.А. О методе перемещений в МКЭ с отделением смещений твердого тела // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №4. С. 2–4.
- 18. Трушин С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2008. 256 с.
- 19. Розин Л.А., Лукашевич А.А. Решение задач с односторонними связями при динамических воздействиях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3(84). С. 195–199.
- 20. Розин Л.А., Лукашевич А.А. Численное решение контактных задач с трением при динамических воздействиях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2010. №4(110). С. 288–294.
- 21. Лукашевич А.А. Численное решение динамических односторонних контактных задач методом пошагового моделирования // Известия вузов. Строительство. 2010. №1. С. 3–10.
- 22. Лалин В.В., Беляев Д.И., Зданчук Е.В., Савченко А.В., Яваров А.В. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния арочно-гравитационной плотины // СтройМеталл. 2011. №3(22). С. 29–31.
- 23. Лалин В.В., Елистратов В.В. Отчет по договору № 200103904 «Численное исследование несущей способности системы «плотина основание» Саяно-Шушенской ГЭС имени П.С. Непорожнего с использованием расчетных данных о состоянии контакта между бетоном и скалой» / ГОУ СПБГПУ. СПб., 2010. 302 с.
- 24. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 600 с.
- 25. Саяно-Шушенская ГЭС на р. Енисей. Сводная расчетная записка арочно-гравитационной плотины Саяно-Шушенской ГЭС / АО «ЛЕНГИДРОПРОЕКТ». СПб., 2000. 85 с.
- 26. Технический отчет «О состоянии гидротехнических сооружений и основания Саяно-Шушенской ГЭС в 2001 году» / Саяно-Шушенская ГЭС имени П.С. Непорожнего, Черемушки, 2002. 112 с.

\*Галина Сергеевна Колосова, Санкт-Петербург, Россия Тел. моб.: +7(921)5661321; эл. почта: gala.kolosova2013@yandex.ru

© Колосова Г.С., Лалин В.В., Колосова А.В., 2013

# Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения

К.т.н., доцент А.В. Бенин, ФГБОУ ВПО «Петербургский государственный университет путей сообщения»; к.ф.-м.н., доцент А.С. Семенов\*; инженер С.Г. Семенов; д.т.н., профессор Б.Е. Мельников, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

**Ключевые слова**: сцепление арматуры с бетоном; математические модели; конечноэлементное моделирование; диаграмма сцепления; прочность; поврежденность; разрушение

Сцепление арматуры с бетоном является одним из основных факторов, позволяющих работать железобетону как единому монолитному телу. Снижение связей сцепления арматуры с бетоном приводит к чрезмерному раскрытию трещин, уменьшению жесткости и снижению несущей способности конструкции [1-4]. Процесс разрушения связей сцепления арматуры с бетоном при выдергивании арматурного стержня из бетонной матрицы представляет собой сложный многостадийный процесс, сопровождающийся присутствием неоднородного и неупругого деформирования, нарушением адгезионных связей, возникновением и развитием трещин различной формы и ориентации, наличием изменяющихся зон контакта и трибологических явлений. Целью данной работы являлось систематическое сравнение возможностей различных подходов при конечно-элементном (КЭ) моделировании процессов разрушения связей сцепления арматуры с бетоном в задаче о вытягивании стержневой профилированной арматуры из бетонного блока. При получении соответствующей эксперименту диаграммы сцепления с учетом ниспадающей ветви учитывалось наличие несплошности на поверхности соединения, накопление повреждений и неупругое деформирование бетона. Для получения решений использовались конечно-элементные программные комплексы ANSYS [5], ABAQUS [6] и PANTOCRATOR [7], каждый из которых обладает определенной спецификой используемых моделей и методов решения рассматриваемого класса задач.

В рамках данного исследования выполнено сравнение 7 классов моделей процессов разрушения связей сцепления арматуры с бетоном, перечисленных ниже в порядке усложнения реализации:

- 1) модели без учета несплошности соединения (гетерогенная среда, идеальное сцепление);
- 2) модель с введением фиктивного интерфейсного слоя;
- 3) модель с явным учетом несплошности и с использованием пружинных элементов;
- 4) модели с применением алгоритма «выключения» элементов;
- 5) модель с учетом микрорастрескивания в бетоне;
- 6) модель упруго-поврежденного материала;
- 7) модель упруго-поврежденно-пластического материала.

В первой части представлены модели 3 и 4, остальные рассмотрены во второй части статьи, которая будет опубликована в одном из следующих выпусков журнала.

## 1. Математические модели для описания сцепления арматуры с бетоном

### 1.1. Основные определения и постановка задачи

Задача о вытягивании стержневой арматуры периодического профиля из бетонного блока является одной из важнейших задач строительной механики [1, 2]. На основе решения данной задачи могут быть сделаны оценки прочности элементов железобетонных конструкций при наличии макротрещин [8]. Для корректного решения указанного класса задач необходимо использовать достоверные модели, описывающие взаимодействие арматуры с бетоном, которое характеризуется силами сцепления.

Одним из ключевых факторов, обеспечивающих совместную работу арматуры и бетона в конструкции и позволяющих работать двухкомпонентному железобетону как единому телу, является *сцепление арматуры с бетоном*. Сцепление арматуры с бетоном определяется следующими основными факторами [3]:

- 1) сопротивление бетона *смятию* и *срезу* вследствие механического зацепления, возникающего из-за искусственно созданных неровностей и выступов (рифления) на поверхности арматуры (70–75% от общего сопротивления сдвигу арматуры);
- 2) *тение*, возникающее на поверхности арматуры вследствие обжатия арматурных стержней при усадке бетона (15—20% от общего сопротивления сдвигу);
- 3) **адгезионное** и молекулярное сцепление («склеивание») арматуры с бетоном вследствие клеящей способности цементного геля (около 10% общего сопротивления сдвигу).

Каждому из трех перечисленных выше факторов соответствуют различные силы сцепления, схематически показанные на рисунке 1.1.

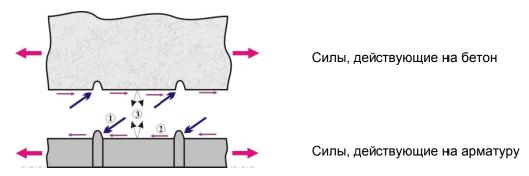


Рисунок 1.1. Схематическое представление различных силовых факторов, совокупное действие которых характеризует явление сцепления арматуры с бетоном [9]: ① – силы сопротивления смятию и срезу вследствие наличия выступов арматуры; ② – силы трения; ③ – силы адгезионного взаимодействия

Для гладкой арматуры суммарное сопротивление стержня выдергиванию примерно в 2–3 раза меньше [3], чем для стержня периодического профиля, так как механическое зацепление у стержней с гладкой поверхностью ничтожно мало.

Прочность сцепления возрастает с повышением класса бетона, уменьшением водоцементного отношения, а также с увеличением возраста бетона. Важную роль для обеспечения сцепления арматуры с бетоном играет вид и форма поверхности арматурного стержня: наибольшим сцеплением обладают круглые рифленые стержни, в то время как стержни, имеющие квадратную либо прямоугольную форму сечения, характеризуются меньшим сцеплением (в ряде случаев до 40%). Существенное влияние на величину сцепления оказывает вид напряженного состояния в области контакта арматурного стержня с бетоном. Сжимающие напряжения, вызванные внешними нагрузками и действующие в направлении, перпендикулярном арматурному стержню, существенно повышают напряжения сцепления. Влияние на сцепление оказывает также направление действия усилия в арматурном стержне (так, усилия, вдавливающие стержень в бетон (продольное сжатие), являются большими, чем усилия, выдергивающие стержень из бетона).

Проблеме сцепления арматуры с бетоном уделяется большое внимание. Для решения этой задачи в нашей стране и за рубежом проведены обширные экспериментально-теоретические исследования. Среди них работы Б.А. Бромса, Я. Гото, Ю.А. Иванченко, Н.И. Карпенко, В. Куускоски, С.М. Мирза и Ю, Хауд, П.П. Назаренко, А.А. Оатула, Ж. Рема, С.М. Скоробогатова, Г.Н. Судакова, А.В. Трофимова, М.М. Холмянского и др. В последние годы в исследованиях Н.И. Карпенко и Г.Н. Судакова сцепление арматуры и бетона и их взаимное смещение рассматривается с учетом образования так называемых кольцевых трещин, которые ранее были обнаружены Б.А. Бромсом, Я. Гото, Н.Г. Овчинниковой и другими. Г.Н. Шоршнев, Г.П. Яковленко, А.В. Трофимов решали задачу сцепления с позиций составных стержней Р.А. Ржаницина. Проблема ползучести сцепления бетона и арматуры впервые была затронута Я.Р. Шенком и получила первую теоретическую апробацию в условиях линейной ползучести в работах И.И. Улицкого, А.А. Оатула, Ю.А. Ивашенко. Анализ исследований в области сцепления арматуры

с бетоном свидетельствует о неоднозначности подходов к решению этой проблемы и об отсутствии единой теоретически обоснованной методики расчета [10].

В общем случае при выполнении КЭ расчетов железобетонных конструкций с учетом дискретного расположения арматуры требуется выбрать законы, описывающие поведение бетона, стали и связующего их соединения. Основными характеристиками при описании их нелинейных свойств являются диаграммы деформирования для бетона и стали, а также кривая зависимости касательных напряжений сцепления от смещения арматуры относительно бетона.

Кривая зависимости касательных напряжений сцепления от смещения арматуры относительно бетона определяется экспериментально. Существует достаточно много различных вариантов экспериментального определения прочности сцепления арматуры с бетоном [10]. Основные из них (наиболее достоверные) — это выдергивание арматурного стержня из бетонный образец. Сопротивление продавливанию больше сопротивления выдергиванию, так как при сжатии арматурного стержня поперечное сечение его увеличивается, в связи с чем возрастают силы, повышающие сопротивление сдвигу.

### 1.2. Физические механизмы процесса потери сцепления арматуры с бетоном

Процесс разрушения связей сцепления арматуры с бетоном при выдергивании стержня из бетонного блока представляет собой сложный многостадийный процесс, характеризуемый неупругим деформированием и возникновением и развитием трещин различной формы и ориентации. Форма кривых зависимости касательных напряжений сцепления  $\tau$  от смещения арматуры относительно бетона s определяется условиями нагружения, геометрией арматуры (профилированием) и степенью проявления различных физических механизмов процессов трещинообразования в соединении бетона с арматурой. Анализ разрушенных образцов указал [11–15] на существование трещин двух характерных типов: конусообразных и продольных (радиальных, раскалывающих), а также областей полного разрушения бетона в непосредственной близости от арматуры.

Рассмотрим эволюцию процесса трещинообразования и его связь с характерными участками на диаграмме сцепления. На начальном этапе нагружения при малых смещениях сначала наблюдается практически линейная зависимость  $\tau(s)$ , характеризуемая упругим деформированием бетона и стали, а также появлением и малым раскрытием конусообразных трещин, возникающих на краях профиля (рис. 1.2). Конусообразные трещины имеют начальный наклон  $45^{\circ}$ – $80^{\circ}$  [15] по отношению к оси арматуры.

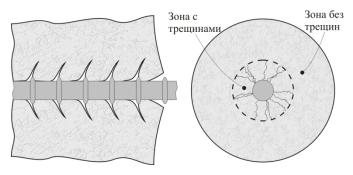


Рисунок 1.2. Конусообразные трещины, возникающие на начальной стадии нагружения [9]

При увеличении нагрузки, действующей на стержень, возникают сдвиговые трещины [13] (рис. 1.3), которые значительно уменьшают жесткость соединения и вызывают появление нелинейного участка на диаграмме сцепления. Длина данных трещин колеблется в диапазоне 2–6 высот профиля [13, 14].

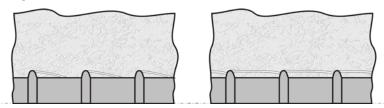


Рисунок 1.3. Сдвиговые трещины, возникающие на более поздних стадиях нагружения [9]

Ряд экспериментов показал [12, 14], что максимум на кривой сцепления достигается при значении смещения около 1.2 высоты профиля арматуры. При этом около 50% длины межпрофильного выступа бетона оказываются срезанными.

При дальнейшем увеличении смещения наблюдается постепенное уменьшение несущей способности соединения вследствие прогрессирующего среза профилем арматуры оставшихся зон неповрежденного сцепления. Трещины сдвига развиваются, возникают также новые конусообразные трещины. При достижении значений сдвига, равных шагу профиля, происходит полный срез выступов бетона, и кривая выходит на практически горизонтальную асимптоту, уровень которой определяется трением арматуры о бетон.

Экспериментальные исследования показали также, что продольные трещины (см. рис. 1.2 справа) появляются уже после возникновения конусообразных трещин [15] и их развитие в основном определяется степенью стеснения рассматриваемого фрагмента железобетонной конструкции.

### 1.3. Аппроксимации зависимости касательных напряжений сцепления от смещения

В литературе предложены различные аналитические зависимости касательных напряжений  $\tau$  сцепления от смещения s, обобщающие результаты экспериментов. В одной из наиболее распространенных моделей CEB-FIP Model Code 90 сцепление определяется выражениями [16, с. 83]:

$$\tau = \begin{cases} \tau_{\text{max}} \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha}, & 0 \le s < s_1; \\ \tau_{\text{max}}, & s_1 \le s < s_2; \\ \tau_{\text{max}} + \left(\tau_f - \tau_{\text{max}}\right) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2}\right), & s_2 \le s < s_3; \\ \tau_f & s > s_3. \end{cases}$$
(1.1)

Модификация (1.1), учитывающая нелинейный характер ниспадающей ветви диаграммы, определяется равенством [17, с. 1515]:

$$\tau = \begin{cases} \tau_{\text{max}} \left( \frac{s}{s_{\text{max}}} \right)^{\alpha}, & s \le s_{\text{max}} \\ \tau_{\text{max}} \left( \frac{s}{s_{\text{max}}} \right)^{-\alpha'}, & s > s_{\text{max}} \end{cases}$$
 (1.2)

В отечественной литературе широкое распространение получил «нормальный закон», предложенный М.М. Холмянским [18]:

$$\tau = B \frac{\ln(1 + \alpha s)}{1 + \alpha s} \tag{1.3}$$

Идентификация параметров B и lpha может быть произведена непосредственно на основе результатов эксперимента:

$$B = e \tau_{\text{max}}, \qquad \alpha = (e - 1) / s_{\text{max}}. \tag{1.4}$$

Дальнейшее обобщение логарифмической зависимости (1.3) дано в работе X. Шима, Л.Л. Чоу, X. Окамура [19]:

$$\tau = B \frac{\left[\ln(1 + \alpha s)\right]^3}{1 + \beta s} \tag{1.5}$$

Заслуживает внимания также простая аппроксимация [20]:

$$\tau = \tau_{\text{max}} \frac{2s_{\text{max}}s}{s_{\text{max}}^2 + s^2} \,. \tag{1.6}$$

Сравнение зависимостей (1.1)–(1.6) при выборе параметров, обеспечивающих совпадение координат максимума, представлено на рисунке 1.4 (зависимости получены для бетона B25 и арматуры диаметром 14).

Следует отметить, что приведенные зависимости требуют коррекции в соответствии с реальными условиями нагружения железобетонной конструкции. При низком уровне давления обжатия арматуры со стороны бетона, наряду с механизмом разрушения по типу выдергивания (pull-out failure), возможно развитие механизма разрушения по типу расщепления (splitting failure) [11]. Также, при наличии макротрещин в области расположения арматуры, необходима коррекция введенных зависимостей. В работах [12, 16] указывается, что подобные коррекции необходимы для областей, удаленных от трещины менее чем на 5 диаметров арматуры.

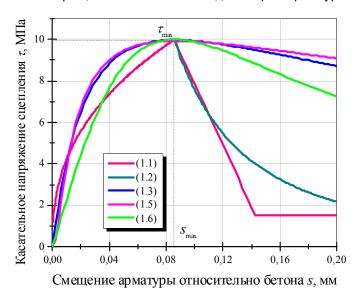


Рисунок 1.4. Результаты сравнительного анализа зависимостей касательных напряжений сцепления от смещения арматуры относительно бетона для различных законов (1.1)–(1.6) при выборе параметров, обеспечивающих совпадение координат максимума

Представленный обзор вариантов аналитических зависимостей касательных напряжений сцепления от смещения демонстрирует значительный разброс результатов как в случае определения констант на основе оригинальных рекомендаций, так и при идентификации по единым значениям координат максимума. Это указывает на необходимость проведения дальнейших исследований проблемы прочности сцепления соединения бетон—арматура, а также на актуальность использования в расчетах железобетонных конструкций экспериментальных данных по кривым сцепления, соответствующим конкретным условиям.

#### 2. Объект исследования и его конечно-элементные модели

Краевая задача о вытягивании стержневой профилированной арматуры из бетонного блока допускает различные подходы к решению, отличающиеся способом учета явления сцепления. Отличия возникают в способе описания несплошностей, возникающих в процессе разрушения связей сцепления, которые можно вводить явно (путем рассмотрения раздельного движения арматуры и бетона при наличии специальных связей, явного введения системы трещин) или неявно (путем изменения эффективных свойств материалов в зоне сцепления, учета континуальных повреждений). Ниже приводятся исходные данные, являющиеся общими для всех используемых ниже конечно-элементных моделей. Специфические данные, отражающие особенности модели, рассматриваются в соответствующих разделах.

Рассматривается вытягивание стержневой профилированной арматуры из бетонного блока при монотонном нагружении. Высота бетонного куба класса B25 – 200 мм, диаметр арматуры – 14 мм, шаг рифеля – 10 мм, высота профиля – 2 мм. Нагрузка прикладывается к нижнему концу арматурного стержня. Смещения измерялись на верхнем конце арматуры. Условия нагружения и геометрия объекта соответствуют требованиям RILEM/CEB/FIB [21] (рис. 2.1).

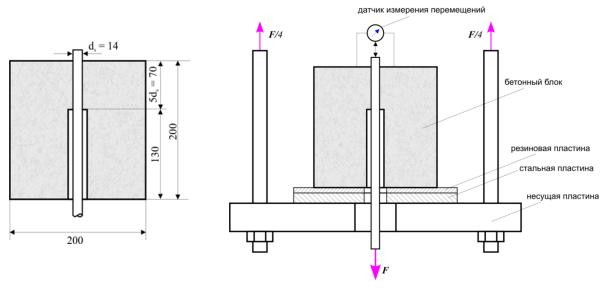


Рисунок 2.1. Геометрия и условия нагружения образца-куба для экспериментального определения прочности сцепления арматуры с бетоном в соответствии с требованиями RILEM/CEB/FIB [21]

В расчетах при анализе напряженно-деформированного состояния использовались осесимметричные и трехмерные КЭ модели (см. рис. 2.2).

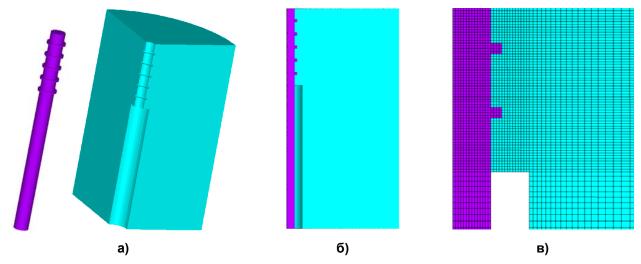


Рисунок 2.2. Твердотельная модель в задаче о вытягивании арматуры из бетонного блока: а) трехмерная модель с рассовмещенным представлением арматуры и бетонной матрицы; б) ее осевое сечение; в) фрагмент сетки осесимметричной КЭ модели

Используемые в расчетах значения основных констант, определяющих механические свойства материалов, приведены в таблице 2.1.

Неупругое поведение стальной арматуры моделировалось при помощи упругопластической модели с линейным изотропным упрочнением и ассоциированным законом пластического течения. При необходимости В случае наличия сложных программ переменного непропорционального нагружения могут быть использованы более упругопластического деформирования металлов [22].

Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения

		Единица измерения	Материал бетон В25	Материал сталь
Модуль упругости	Е	МПа	30 000	206 000
Коэффициент Пуассона	v	-	0.2	0.3
Предел текучести	$\sigma_{02}$	МПа	-	235
Предел прочности на сжатие	$R_b$	МПа	18.5	-
Предел прочности на растяжение	$R_b^t$	МПа	1.55	-
Деформация пика на диаграмме сжатия	$\varepsilon_b$	-	0.1472%	-
Деформация пика на диаграмме растяжения	$\varepsilon_b^{t}$	-	0.0123%	-
Параметр критерия Друккера–Прагера	γ	-	0.845	-

Таблица 2.1. Механические свойства материалов

### 3. Экспериментальные исследования по определению сил сцепления арматуры с бетоном

Как отмечалось в разделе 1.3 настоящей статьи и в монографии [4], существует значительное расхождение между диаграммами сцепления арматуры с бетоном, полученными по европейским нормам Model Code 90 и по «нормальному закону» М.М. Холмянского. Поэтому с целью уточнения зависимости «касательные напряжения сцепления — проскальзывание арматуры» в Механической лаборатории им. проф. Н.А. Белелюбского ПГУПС были проведены экспериментальные исследования по определению сил сцепления арматуры с бетоном. Так как отечественных норм на данный вид испытаний нет, для определения сцепления арматуры с бетоном использовалась методика, основанная на рекомендациях RILEM/CEB/FIB [21] — pull-out test (рис. 2.1).

Для испытаний было изготовлено 6 образцов-кубов из бетона класса B25 с ребром 200 мм с заделанной в них на глубину 70 мм арматурой диаметром 14 мм. Испытания проводились на испытательной машине AG-300kN производства компании Shimadzu, для контроля перемещений использовалась многоканальная система индуктивных датчиков с дискретностью отсчетов 0,001 мм (рис. 3.1).



Рисунок. 3.1. Экспериментальные исследования сил сцепления арматуры с бетоном

В результате испытаний были получены диаграммы «сила выдергивания – проскальзывание арматуры» (рис. 3.2). При сравнении полученных диаграмм с вариантами европейских норм Model Code 90 и «нормальным законом» М.М. Холмянского установлено, что экспериментальный график оказался ближе к диаграмме, построенной по европейскому закону [4].

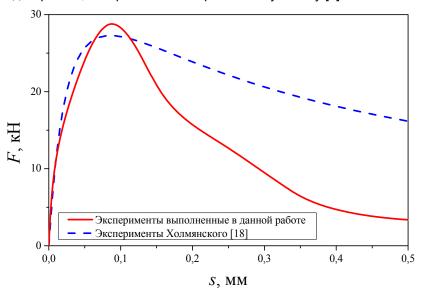


Рисунок 3.2. Экспериментально полученные диаграммы сцепления

### 4. Решение задачи с учетом несплошности и с использованием одномерных пружинных элементов

Наиболее простые способы описания процессов деформирования и разрушения при решении задачи о выдергивании арматурного стержня из бетонного блока основаны на использовании гипотезы сплошности и применении традиционных подходов конечно-элементного анализа гетерогенных сред и рассмотрены во второй части настоящей статьи. Однако нарушение сплошности и твердотельное смещение арматуры по отношению к бетону наблюдаются в экспериментах и являются принципиальными при описании процессов разрушения связей сцепления. Поэтому методы, явно учитывающие несплошность соединения, являются наиболее перспективными.

В данном разделе рассматривается решение, допускающее явное возникновение **несплошностей** (разрывов полей перемещений) на границе соединения бетона с арматурой. Однако для описания свойств соединения используется инженерный прием, подменяющий рассмотрение реальных процессов разрушения в области соединения на задание дополнительных эффективных нелинейных дискретных жесткостей. При моделировании процесса проскальзывания арматуры относительно бетона использовался ряд нелинейных **пружин**, соединяющих соседние узлы КЭ сетки бетона и арматуры [4]. Эффективные жесткости данных пружин находятся на основе диаграммы сцепления. Задача решалась в осесимметричной постановке.

Для моделирования нелинейных пружин в ANSYS использовался элемент COMBIN39. Величина начального зазора между арматурой и бетоном задавалась равной нулю. Если принять гипотезу о равенстве жесткостных характеристик всех пружин, то переменные (секущие) жесткости C(s) в зависимости от смещения s для каждой пружины вычисляются исходя из равенства:

$$C(s) = \frac{\tau(s)\pi dh}{Ns},\tag{4.1}$$

где  $\tau(s)$  – касательное напряжение сцепления (определяется на основе экспериментально полученной диаграммы сцепления); d – диаметр арматуры (14 мм); h – длина линии контакта арматуры и бетона (h = 5d); N – количество пружинных элементов. В расчетах в качестве иллюстрации использовалась зависимость касательных напряжений сцепления от смещения в соответствии с уравнением М.М. Холмянского (1.3). Очевидно, что используемый подход не ограничен только диаграммами (1.3) и предлагаемый метод применим для любых видов Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения

экспериментальных диаграмм сцепления, обеспечивая высокую точность решения в пределах условий нагружения, близких к базовому опыту.

Сила реакции отдельной пружины при смещении недеформированной арматуры s определяется равенствами:

$$F_{npyxc}(s) = \frac{F(s)}{N} = \frac{\tau(s)\pi dh}{N} = C(s)s.$$
(4.2)

В расчетах задавались параметры пружин на основе кусочно-линейной аппроксимации зависимости (4.2), включающей 6 участков (см. табл. 4.1).

Таблица. 4.1. Параметры диаграммы растяжения пружинного элемента

Удлинение пружины s, µм	0	40	80	120	320	800	1200
Сила реакции в пружине $F_{npy\! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! \! $	0	307.72	338.49	330.80	246.18	153.86	115.40

Задача решалась в физически нелинейной и геометрически линейной постановке в условиях квазистатического нагружения. При проведении нелинейных расчетов использовались пошаговые методы, основанные на инкрементально-итерационных процедурах метода Ньютона-Рафсона. Величина начального шага выбиралась равной 1/100 от максимальной нагрузки. Для получения ниспадающих участков диаграмм использовался arc-length метод со значениями максимального множителя 10 и минимального 0.1.

КЭ расчеты проводились при двух способах нагружения: **мягком** (задание растягивающего однородного давления на нижнем торце арматуры) и **жестком** (задание вертикальных перемещений, направленных вниз, на нижнем торце арматуры). Нижний край бетонного блока был зафиксирован в вертикальном направлении. Остальные стороны оставались свободными.

### 4.1. Результаты решения задачи при мягком нагружении

На нижнем торце арматуры задавалась постоянная по сечению, направленная вертикально вниз компонента тензора напряжений:

$$\sigma_z = F \frac{1}{\pi d^2 / 4} = \tau \frac{4h}{d}. \tag{4.3}$$

Результаты решения задачи о вытягивании арматуры из бетонного блока при наличии нелинейных пружинных элементов представлены на рисунке 4.1.

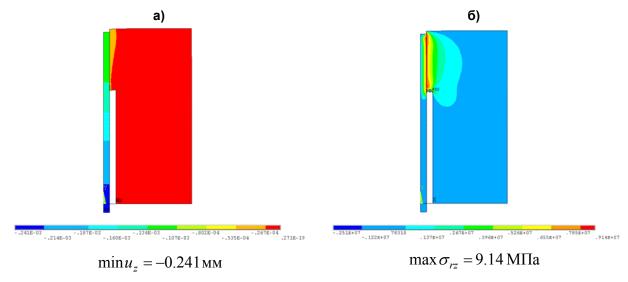


Рисунок 4.1. Распределение полей вертикальных перемещений  $u_z$  (а) и касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  (б) в задаче о вытягивании арматуры из бетонного блока при учете скольжения посредством введения разрыва вдоль линии контакта бетона и арматуры и наличии между ними множественных пружинных связей для случая мягкого нагружения ( $\sigma_z$  = 182 МПа)

Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения

Распределения полей перемещений и напряжений показаны для момента времени, соответствующего пиковой нагрузке. При введении несплошности вдоль линии контакта арматуры и бетона наблюдается разрыв в распределении полей вертикальных перемещений  $u_z$  (см. рис. 4.1a). Это приводит к малонагруженному напряженному состоянию основной массы бетона и локализации касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  вдоль линии контакта (рис. 4.1б). Следует отметить, что максимальный уровень  $\sigma_{rz}$  соответствует максимуму на диаграмме сцепления.

### 4.2. Результаты решения задачи при жестком нагружении

На нижнем торце арматуры задавалось постоянное по сечению перемещение  $u_z=-1.2\,\mathrm{MM}$  . Результаты решения задачи о вытягивании арматуры из бетонного блока при наличии нелинейных пружинных элементов представлены на рисунке 4.2 для момента времени, соответствующего пиковой нагрузке. Наблюдаются разрыв в вертикальных перемещениях  $u_z$  (рис. 4.2a) и локализация касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  вдоль линии контакта (рис. 4.2б). Следует отметить, что полученные результаты при жестком нагружении близки по характеру распределения и экстремальным значениям полей к рассмотренным при мягком нагружении (ср. рис. 4.1 и 4.2).

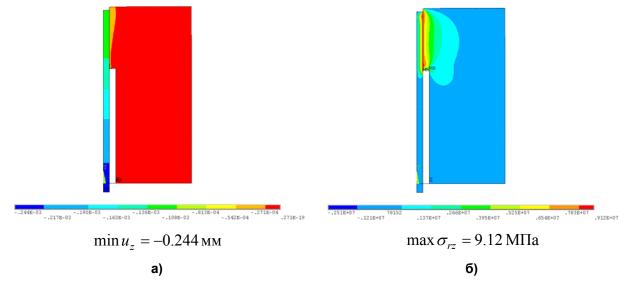


Рисунок 4.2. Распределение полей вертикальных перемещений  $u_z$  (а) и касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  (б) в задаче о вытягивании арматуры из бетонного блока при учете скольжения посредством введения разрыва вдоль линии контакта бетона и арматуры и наличии между ними множественных пружинных связей для момента пиковой нагрузки при жестком нагружении

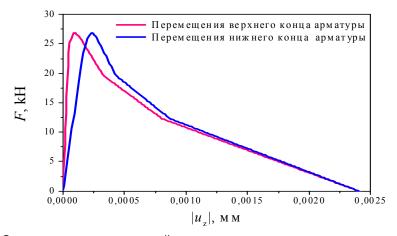


Рисунок 4.3. Сравнение зависимостей силы выдергивания от перемещений верхнего (синяя линия) и нижнего (красная линия) торцов арматуры

На рисунке 4.3 представлено сравнение зависимостей силы реакции от перемещений верхнего и нижнего края арматуры. Наблюдается их существенное расхождение, указывающее на недопустимость рассмотрения в данной задаче арматуры как абсолютно твердого тела, несмотря на то, что жесткость стали на порядок больше жесткости бетона.

На рисунке 4.4 представлено сравнение расчетных зависимостей сил выдергивания от перемещения верхнего торца арматуры при мягком и жестком нагружениях с данными эксперимента. Наблюдается хорошее совпадение всех трех зависимостей. Незначительное расхождение результатов присутствует лишь вблизи пика графика. Причиной расхождения являются численные погрешности при проведении расчетов, связанные с недостаточной малостью шага приращения нагрузки, требования к которому существенно возрастают при решении задач с немонотонной нелинейностью, обусловленной наличием ниспадающей ветви. Значения смещений, соответствующих максимумам графиков, представлены в таблице 4.2.

Таблица. 4.2. Перемещения верхнего конца арматуры, соответствующие пику нагрузки

	Эксперимент	Мягкое нагружение	Жесткое нагружение
	(исходные данные)	(силой)	(перемещение торца)
u <sub>z</sub>  , MM	0.095	0.101	0.105

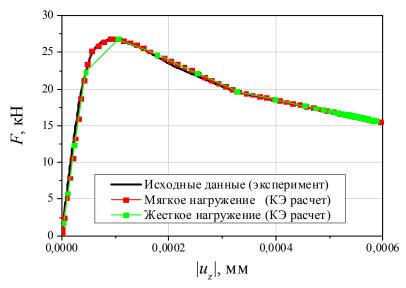


Рисунок 4.4. Сравнение расчетных зависимостей сил выдергивания от перемещения верхнего торца арматуры для различных вариантов нагружения с экспериментом

Соответствующие приведенным на рисунке 4.4 зависимости силы выдергивания F от перемещений на нижнем конце  $u_z$  могут быть получены путем масштабирования оси ординат диаграммы сцепления (зависимости касательных напряжений сцепления  $\tau = F/\pi dh$  от смещения арматуры относительно бетона).

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы о возможностях применения моделей с учетом несплошности соединения и с использованием одномерных пружинных элементов.

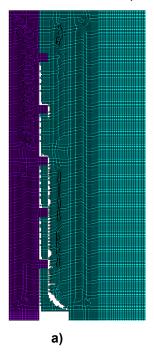
- 1. Использование гипотезы полного нарушения сплошности вдоль линии раздела арматуры и бетона и учет сил сцепления посредством дискретного набора нелинейных пружинных элементов (без учета изменения эффективных свойств материалов в области контакта, без рассмотрения процессов трещинообразования, без прямого учета сил трения и адгезии) при упругом решении задачи о вытягивании профилированной арматуры из бетонного блока позволяет корректно описать зависимость сил сцепления от смещений.
- 2. Выбор эффективных жесткостей нелинейных пружин в соответствии с экспериментально наблюдаемой диаграммой сцепления **обеспечиваем** получение в конечно-элементных расчетах адекватных диаграмм сцепления.

- 3. Корректность используемого инженерного подхода для моделирования процессов нарушения связей сцепления для задач, отличных (по условиям нагружения или геометрии) от одноосного выдергивания арматуры из симметричного бетонного блока, следует проверять для каждого нового класса задач.
- 4. Задание мягкого или жесткого нагружения не оказывает влияния на вид диаграммы сцепления.

# 5. Решение задачи с применением алгоритма «выключения» элементов

Одним из простейших, но достаточно грубых способов введения в рассмотрение несплошности является последовательное исключение из модели конечных элементов, в которых нарушены ограничения по прочности. Данный подход чувствителен к степени дискретизации модели и требует использования более мелких КЭ сеток. Для автоматического моделирования роста трещин (зон повреждений) в рамках пакета ANSYS была написана процедура «выключения» конечных элементов на языке APDL (параметрический язык разработчика ANSYS).

Задача решалась в осесимметричной постановке. Результаты проведенных расчетов показали, что использование силовых критериев разрушения типа  $\sigma_1 = R_b^t$  и/или  $\sigma_3 = R_b$  не позволяет обнаружить локализацию областей выключенных элементов, соответствующую экспериментально наблюдаемым системам трещин. Применение деформационных критериев разрушения типа  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_b^t$  и/или  $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_b$  позволяет получать области выключенных элементов, местоположение которых локализовано и соответствует коническим и радиальным трещинам (рис. 5.1). При использовании упругопластической модели с критерием Друкера-Прагера развитие конических трещинообразных дефектов проявляется наиболее отчетливо в сравнении с упругим решением (ср. рис. 5.1б и а). Однако получаемые диаграммы сцепления в обоих случаях значительно отличаются от экспериментально наблюдаемой.



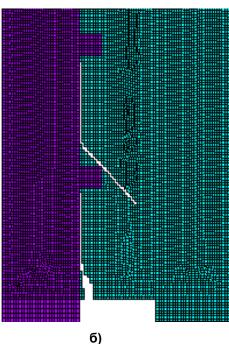


Рисунок 5.1. Конфигурации трещинообразных дефектов, полученные путем «выключения» элементов на основе использования деформационного критерия:
а) упругое решение; б) упругопластическое решение

Следует отметить, что данный класс моделей идейно близок к моделям механики континуальных повреждений (рассматриваемых во второй части статьи), при использовании которых скачкообразное изменение модуля упругости (от значения для неповрежденного бетона до нуля – для воздуха) заменяется непрерывным изменением.

### Заключение

Выполнены экспериментальные исследования и произведено сравнение их результатов с результатами расчета с использованием различных моделей разрушения связей сцепления арматуры с бетоном в задаче о вытягивании стержневой профилированной арматуры из бетонного блока. Результаты сравнительного анализа диаграмм сцепления показаны на рисунке 6.1 для рассмотренных в первой и второй частях статьи моделей:

- 1) с учетом несплошности и с использованием одномерных пружинных элементов;
- 2) с применением алгоритма «выключения» элементов;
- 3) идеального сцепления без учета несплошности соединения;
- 4) с введением фиктивного слоя;
- 5) с учетом микрорастрескивания в бетоне;
- 6) с использованием модели упруго-поврежденного материала;
- 7) с использованием модели упруго-поврежденно-пластического материала.

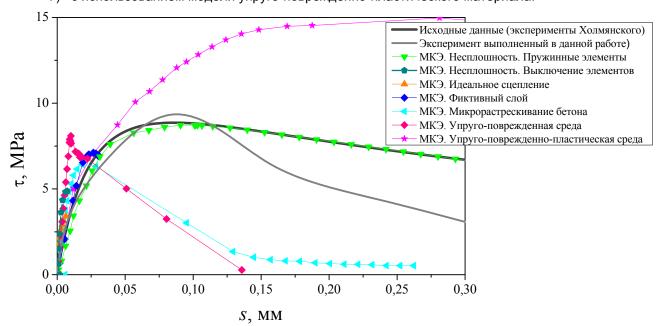


Рисунок 6.1. Зависимость касательного напряжения сцепления от смещения арматуры

Представленные результаты расчетов демонстрируют большой разброс. В ряде случаев наблюдается лишь качественное совпадение с результатами экспериментов. Заметные количественные отличия объясняются использованием в расчетах нелинейных характеристик бетона без специального учета специфики самого соединения (адгезионных и фрикционных сил сцепления).

Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что использование гипотезы *полного нарушения сплошности* вдоль линии раздела арматуры и бетона и учет сил сцепления посредством *дискретного набора нелинейных пружинных элементов* (без учета изменения эффективных свойств материалов в области контакта, без рассмотрения процессов трещинообразования, без прямого учета сил трения и адгезии) при упругом решении задачи о вытягивании профилированной арматуры из бетонного блока *позволяют корректно описать* зависимость сил сцепления от смещений.

Примеры применения на практике рассмотренных в первой и во второй частях статьи моделей при расчетах реальных железобетонных сооружений и конструкций, в том числе с учетом дополнительного воздействия, возникающего от коррозии арматуры, представлены в работах [23–26].

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект №12-08-00943). Авторы благодарят за помощь в проведении расчетов студентов ФГБОУ ВПО СПбГПУ Фёдорова И.В. и Лашина В.А.

#### Литература

- 1. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1984. 728 с.
- 2. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
- 3. Попов Н.Н., Чарыев М. Железобетонные и каменные конструкции. М.: Высшая школа, 1996. 255 с.
- 4. Бенин А.В. Деформирование и разрушение железобетона: аналитические, численные и экспериментальные исследования. СПб.: ПГУПС, 2006. 127 с.
- 5. ANSYS release 14. Basic analysis guide. ANSYS Inc.
- 6. Abaqus Analysis User's Manual, Version 6.10.
- 7. Семёнов А.С. PANTOCRATOR конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V Международной конференции «Научнотехнические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций. и методы их решения". Санкт-Петербург, 14 17 октября 2003. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466–480.
- 8. Белов В.В. Сопротивление массивных бетонных и железобетонных конструкций с трещинами и швами: дис. ... докт. техн. наук. СПб., 1998. 376 с.
- 9. Alvarez M. Einfuss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton. Zürich: Promotionarbeit. 1998. 192 p.
- 10. Веселов А.А. Нелинейная теория сцепления арматуры с бетоном и ее приложения: дис. ... докт. техн. наук: 05.23.01. СПб., 2000. 320 с.
- 11. Eligehausen R. Lap splices of straight reinforcing bars (Übergreifungsstöße zugbeanspruchter Rippenstäbe mit geraden Stabenden) // Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1979. No.301. 188 p.
- 12. Eligehausen R., Popov E.P., Bertero V.V. Local Bond Stress-Slip Relationship of Deformed Bars under Generalized Excitations // EERC Report 83-23, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, 1983. 169 p.
- Rehm G. Ueber die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton // Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1961. No.138. 59 p.
- 14. Mayer U. Zum Einfluß der Oberflächengestalt von Rippenstählen auf das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen. Stuttgart: Promotionarbeit, 2001. 239 p.
- 15. Goto Y. Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars // Journal of the American Concrete Institute. 1971. Vol. 68. No.4. Pp. 244–251.
- 16. CEB-FIP Model Code 1990. Design Code // Comite Euro-International du Beton. 1991. 437 p.
- 17. Cruz J.S., Barros J. Modeling of bond between near-surface mounted CFRP laminate strips and concrete // Computers and Structures. 2004. No.82. Pp.1513–1521.
- 18. Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном. М.: Стройиздат, 1981. 184 с.
- 19. Shima H., Chou L.-L., Okamura H. Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete // Journal of the Faculty of Engineering: University of Tokyo. 1987. Vol. XXXIX. No. 2. Pp. 133–194.
- Balázs G.L. Connecting Reinforcement to Concrete by Bond // Beton- und Stahlbetonbau. 2007. No.102. Pp. 46–50.
- 21. RILEM/CEB/FIB. Recommendation on reinforcement steel for reinforced concrete. RC6. Bond test for reinforcement steel. 2. Pull-out tests. 1983. 8 p.
- 22. Мельников Б.Е., Семенов А.С., Семенов С.Г. Многомодельный анализ упругопластического деформирования материалов и конструкций. Современное состояние // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2010. № 53. С. 85–92.
- 23. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G. Modeling of fracture process in concrete reinforced structures under steel corrosion // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. 2010. Vol. 39. Issue 2. Pp. 168–175.
- 24. Бенин А.В. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения элементов железобетонных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2011. №5. С. 16–20.
- 25. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения и оценка ресурса элементов автодорожного моста с учётом коррозионных повреждений // Инженерно-строительный журнал. 2012. №7. С. 32–42.
- 26. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G. Fracture simulation of reinforced concrete structure with account of bond degradation and concrete cracking under steel corrosion // Advances in Civil Engineering and Building Materials. London: Taylor & Francis Group, 2013. Pp. 233–237.

\*Артем Семенович Семенов, Санкт-Петербург, Россия Тел. раб.: +7(812)552-63-03; эл. почта: semenov.artem@googlemail.com

© Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е., 2013

# Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения

Д.т.н., профессор В.В. Карпов; аспирант А.А. Семенов\*,

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

**Ключевые слова:** оболочка; математическая модель; функционал полной энергии деформации; ортотропия; подкрепленные оболочки; оболочки вращения

В различных областях техники в последнее время все чаще применяются конструкции из композитных материалов [1, 2], особенно в виде тонкостенных оболочек [3, 4]. Исследования в данной области проводятся не только в России, но и за рубежом [5–9]. Возобновление интереса к исследованию оболочечных конструкций в последние годы вызвано, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила теперь по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек. Также немалую роль здесь играет появление новых материалов, позволяющих существенно улучшить прочностные характеристики конструкций. Активно изучается поведение цилиндрических оболочек [10–12], которые применяются в самых разнообразных областях техники.

При использовании таких композитных материалов, как, например, железобетон [13] или стеклопластик, армирующие элементы часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат оболочки, и в таком случае конструкцию можно считать ортотропной [14].

Для повышения жесткости тонкостенные конструкции часто подкрепляются ребрами [15–18], что играет особо важную роль при строительстве большепролетных покрытий и перекрытий.

### Обзор литературы

Основы теории анизотропных пластин и оболочек, в частности, ортотропных, можно найти в работах [19–21]. Одни из первых наиболее полных исследований по устойчивости ортотропных оболочек касаются кратковременной устойчивости стеклопластиковых цилиндрических конструкций при различных внешних нагрузках [22]. Проблемы длительной устойчивости были рассмотрены в работе [23]. Обширное исследование проблем устойчивости ортотропных оболочек приводится в работе Р.Б. Рикардса и Г.А. Тетерса [14]. Модель, описанная в указанных работах, строится на основе простейших уравнений теории оболочек, не учитывающих поперечные сдвиги, а алгоритм исследования устойчивости основан на методе Эйлера решения задач на собственные значения, т.е. линеаризованных уравнениях. В геометрически нелинейной постановке устойчивость ортотропных оболочек рассмотрена в работе В.А. Крысько [24], где исследуются пологие гладкие оболочки.

Известно достаточно много работ, посвященных расчету ортотропных оболочек, но в них недостаточно полно исследуется ряд важных факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние оболочки и ее устойчивость. В частности, при расчете подкрепленных оболочек не учитываются такие факторы, как поперечные сдвиги, сдвиговая и крутильная жесткость ребер и др.

Чаще всего математическая модель в теории оболочек строится на основе уравнений равновесия. Использование вместо этих уравнений функционала полной энергии деформации оболочки позволяет применять более эффективные алгоритмы исследования. Варианты таких алгоритмов для изотропных подкрепленных оболочек можно найти в работах [25–27].

### Постановка задачи

Целью данной работы является построение математической модели деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения, учитывающей ряд дополнительных факторов. Модель является геометрически нелинейной, учитывает поперечные сдвиги, сдвиговую и крутильную жесткость ребер, а также сложную форму контура конструкции.

### Описание исследования

Математическая модель деформирования тонкой подкрепленной оболочки строится на основе функционала полной энергии деформации (или уравнений равновесия), а также включает в себя геометрические соотношения, физические соотношения и граничные условия.

Модель Кирхгофа — Лява, когда неизвестными являются только три функции перемещений U=U(x,y), V=V(x,y), W=W(x,y) и в уравнениях равновесия функции U и V имеют вторые производные, а функция W — четвертые, дает существенную погрешность. Необходимо учитывать еще и поперечные сдвиги, т. е. рассматривать модель Тимошенко — Рейснера. Тогда неизвестными будут пять функций — три функции перемещений точек координатной поверхности U,V,W и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях XOZ,YOZ:  $\Psi_x=\Psi_x(x,y),\Psi_y=\Psi_y(x,y)$ . При этом получаемая модель будет геометрически нелинейной, т. е. зависимость деформаций от перемещений — нелинейная, что позволяет исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость. В дальнейшем будем рассматривать только модель Тимошенко — Рейснера, учитывающую наличие ребер жесткости и сложную форму контура конструкции.

В рассматриваемой модели геометрические соотношения для срединной поверхности оболочки принимают вид [28]:

$$\begin{split} \varepsilon_{x} &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_{x} W + \frac{1}{2} \theta_{1}^{2}, \\ \varepsilon_{y} &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_{y} W + \frac{1}{2} \theta_{2}^{2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_{1} \theta_{2}, \\ \theta_{1} &= -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_{x} U\right), \quad \theta_{2} &= -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_{y} V\right), \end{split}$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности;  $\gamma_{xy}$  – деформации сдвига в плоскости XOY;  $k_x$ ,  $k_y$  – главные кривизны оболочки вдоль осей x и y; A,B – параметры Ламе, характеризующие геометрию оболочки.

Функции изменения кривизн  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и кручения  $\chi_{12}$  принимают вид:

$$\chi_{1} = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_{x}}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_{y}; \quad \chi_{2} = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_{y}}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_{x},$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_{y}}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_{x}}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_{x} + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_{y} \right).$$

Используя геометрические соотношения, можно сформировать выражения для усилий и моментов. В случае дискретного подкрепления конструкции ребрами жесткости для ортотропных оболочек они будут иметь вид [29]:

$$N_{x} = G_{1} \left[ \left( h + \overline{F} \right) \left( \varepsilon_{x} + \mu_{2} \varepsilon_{y} \right) + \overline{S} \left( \chi_{1} + \mu_{2} \chi_{2} \right) \right],$$

$$N_{y} = G_{2} \left[ \left( h + \overline{F} \right) \left( \varepsilon_{y} + \mu_{1} \varepsilon_{x} \right) + \overline{S} \left( \chi_{2} + \mu_{1} \chi_{1} \right) \right],$$

$$N_{xy} = N_{yx} = G_{12} \left[ \left( h + \overline{F} \right) \gamma_{xy} + 2 \overline{S} \chi_{12} \right],$$

$$M_{x} = G_{1} \left[ \overline{S} \left( \varepsilon_{x} + \mu_{2} \varepsilon_{y} \right) + \left( \frac{h^{3}}{12} + \overline{J} \right) \left( \chi_{1} + \mu_{2} \chi_{2} \right) \right],$$

$$M_{y} = G_{2} \left[ \overline{S} \left( \varepsilon_{y} + \mu_{1} \varepsilon_{x} \right) + \left( \frac{h^{3}}{12} + \overline{J} \right) \left( \chi_{2} + \mu_{1} \chi_{1} \right) \right],$$

$$M_{xy} = M_{yx} = G_{12} \left[ \overline{S} \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^{3}}{12} + \overline{J} \right) \chi_{12} \right],$$

$$Q_{x} = G_{13} k \left( h + \overline{F} \right) \left( \psi_{x} - \theta_{1} \right),$$

$$Q_{y} = G_{23} k \left( h + \overline{F} \right) \left( \psi_{y} - \theta_{2} \right),$$

$$(1)$$

где  $G_1=\frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}$ ,  $G_2=\frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}$ . Здесь  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{yx}$  — нормальные усилия вдоль осей x, y и сдвиговые усилия в плоскости XOY соответственно;  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$  — изгибающие моменты в направлении осей x, y и крутящие моменты;  $Q_x$ ,  $Q_y$  — поперечные силы в плоскостях XOZ и YOZ;  $\overline{F}$ ,  $\overline{S}$ ,  $\overline{J}$  — функции, выражающие площадь поперечного или продольного сечения ребер, приходящуюся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции этого сечения.

В приведенных соотношениях  $E_1$ ,  $E_2$  — модули упругости в направлениях x и y;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — коэффициенты Пуассона;  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$  — модули сдвига в плоскостях XOY, XOZ, YOZ соответственно. В силу условия симметрии упругих постоянных верно равенство  $E_1\mu_2=E_2\mu_1$ .

Из показанных выше соотношений можно сформировать функционал полной энергии деформирования подкрепленной оболочки [30]:

$$\Im = \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{y_{1}(x)}^{y_{2}(x)} \{ N_{x} \varepsilon_{x} + N_{y} \varepsilon_{y} + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_{x} \chi_{1} + M_{y} \chi_{2} + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_{x} (\psi_{x} - \theta_{1}) + Q_{y} (\psi_{y} - \theta_{2}) - 2qW \} AB dx dy.$$
(2)

Способ закрепления контура конструкции учитывается через граничные условия, которые влияют на выбор аппроксимирующих функций [30, 31], а область, занимаемая оболочкой, задается в пределах интегрирования [32]:  $0 \le x \le a, y_1(x) \le y \le y_2(x)$ . Использование функций  $y_1(x), y_2(x)$  позволяет учитывать нестандартную форму контура оболочки.

Подставив (1) в (2) и выполнив алгебраические преобразования, получим [30]:

$$\Im = \frac{G_{1}}{2} \int_{0}^{a} \int_{y_{1}(x)}^{y_{2}(x)} \left\{ a_{1} \varepsilon_{x}^{2} + a_{2} \varepsilon_{y}^{2} + a_{3} \varepsilon_{x} \varepsilon_{y} + a_{4} \gamma_{xy}^{2} + a_{5} (\psi_{x} - \theta_{1})^{2} + a_{6} (\psi_{y} - \theta_{2})^{2} + a_{7} \varepsilon_{x} \chi_{1} + a_{8} \varepsilon_{x} \chi_{2} + a_{8} \varepsilon_{y} \chi_{1} + a_{9} \varepsilon_{y} \chi_{2} + a_{10} \gamma_{xy} \chi_{12} + a_{11} \chi_{1}^{2} + a_{12} \chi_{2}^{2} + a_{13} \chi_{1} \chi_{2} + a_{14} \chi_{12}^{2} - a_{15} qW \right\} ABdxdy$$
(3)

С учетом того, что 
$$G_1\mu_2+G_2\mu_1=\frac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}+\frac{E_2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2}=2\frac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}=2G_1\mu_2$$
, и с дополнительными обозначениями  $\overline{G}_2=\frac{G_2}{G_1}$ ,  $\overline{G}_{12}=\frac{G_{12}}{G_1}$ ,  $\overline{G}_{13}=\frac{G_{13}}{G_1}$ ,  $\overline{G}_{23}=\frac{G_{23}}{G_1}$ ,

коэффициенты  $a_1 - a_{15}$  будут иметь вид:

$$a_{1} = h + \overline{F}, a_{2} = \overline{G}_{2}(h + \overline{F}), a_{3} = 2\mu_{2}(h + \overline{F}), a_{4} = \overline{G}_{12}(h + \overline{F}), a_{5} = \overline{G}_{13}k(h + \overline{F}), a_{6} = \overline{G}_{23}k(h + \overline{F}), a_{7} = 2\overline{S}, a_{8} = 2\mu_{2}\overline{S}, a_{9} = 2\overline{G}_{2}\overline{S}, a_{10} = 4\overline{G}_{12}\overline{S}, a_{11} = \frac{h^{3}}{12} + \overline{J}, a_{12} = \overline{G}_{2}(\frac{h^{3}}{12} + \overline{J}), a_{13} = 2\mu_{2}(\frac{h^{3}}{12} + \overline{J}), a_{14} = 4\overline{G}_{12}(\frac{h^{3}}{12} + \overline{J}), a_{15} = \frac{2}{G_{1}}.$$

При введении ребер жесткости постоянной высоты по методу конструктивной анизотропии функционал полной энергии деформации оболочки будет иметь вид (2), а усилия и моменты примут вид [29, 30]:

$$N_{x} = G_{1} \left[ (h + F_{x}) (\varepsilon_{x} + \mu_{2} \varepsilon_{y}) + S_{x} (\chi_{1} + \mu_{2} \chi_{2}) \right]$$

$$N_{y} = G_{2} \left[ (h + F_{y}) (\varepsilon_{y} + \mu_{1} \varepsilon_{x}) + S_{y} (\chi_{2} + \mu_{1} \chi_{1}) \right]$$

$$N_{xy} = G_{12} \left[ (h + F_{y}) \gamma_{xy} + 2S_{y} \chi_{12} \right]$$

$$N_{yx} = G_{12} \left[ (h + F_{x}) \gamma_{xy} + 2S_{x} \chi_{12} \right]$$

$$M_{x} = G_{1} \left[ S_{x} (\varepsilon_{x} + \mu_{2} \varepsilon_{y}) + \left( \frac{h^{3}}{12} + J_{x} \right) (\chi_{1} + \mu_{2} \chi_{2}) \right],$$

$$M_{y} = G_{2} \left[ S_{y} (\varepsilon_{y} + \mu_{1} \varepsilon_{x}) + \left( \frac{h^{3}}{12} + J_{y} \right) (\chi_{2} + \mu_{1} \chi_{1}) \right],$$

$$M_{xy} = G_{12} \left[ S_{y} \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^{3}}{12} + J_{y} \right) \chi_{12} \right],$$

$$M_{yx} = G_{12} \left[ S_{x} \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^{3}}{12} + J_{x} \right) \chi_{12} \right],$$

$$Q_{x} = G_{13} k (h + F_{x}) (\psi_{x} - \theta_{1}),$$

$$Q_{y} = G_{23} k (h + F_{y}) (\psi_{y} - \theta_{2}),$$

$$(4)$$

где  $F_x = F_x(x,y)$ ,  $F_y = F_y(x,y)$ ,  $S_x = S_x(x,y)$ ,  $S_y = S_y(x,y)$ ,  $J_x = J_x(x,y)$ ,  $J_y = J_y(x,y)$  – площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения; статический момент и момент инерции этого сечения, являющиеся функциями координат x,y. Для произвольного вида оболочек приведенные жесткостные характеристики ребер представимы в виде:

$$\begin{split} F_{x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h^{i} r_{i}}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{h^{j} r_{j}}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{h^{ij} r_{i} r_{j}}{\bar{a} \bar{b}} \right) \frac{r_{j}}{\bar{a}} \; ; \\ F_{y} &= \sum_{j=1}^{m} \frac{h^{j} r_{j}}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{h^{i} r_{i}}{\bar{b}} - \sum_{j=1}^{m} \frac{h^{ij} r_{i} r_{j}}{\bar{a} \bar{b}} \right) \frac{r_{i}}{\bar{b}} \; ; \\ S_{x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{S^{i} r_{i}}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{S^{j} r_{j}}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{S^{ij} r_{i} r_{j}}{\bar{a} \bar{b}} \right) \frac{r_{j}}{\bar{a}} \; ; \\ S_{y} &= \sum_{j=1}^{m} \frac{S^{j} r_{j}}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{S^{i} r_{i}}{\bar{b}} - \sum_{j=1}^{m} \frac{S^{ij} r_{i} r_{j}}{\bar{a} \bar{b}} \right) \frac{r_{i}}{\bar{a}} \; ; \\ J_{x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{J^{i} r_{i}}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{J^{j} r_{j}}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{J^{ij} r_{i} r_{j}}{\bar{a} \bar{b}} \right) \frac{r_{j}}{\bar{a}} \; ; \\ J_{y} &= \sum_{j=1}^{m} \frac{J^{j} r_{j}}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{J^{i} r_{i}}{\bar{b}} - \sum_{j=1}^{m} \frac{J^{ij} r_{i} r_{j}}{\bar{a} \bar{b}} \right) \frac{r_{i}}{\bar{b}} \; . \end{split}$$

Здесь r — ширина ребра; h — высота; индексы i и j указывают номер ребра, расположенного параллельно осям x и y соответственно; n,m — количество ребер; переменные  $\overline{a},\overline{b}$  позволяют ребрам жесткости повторять геометрию оболочки и определяются как  $\overline{a}=aA$ ,  $\overline{b}=(y_2(x)-y_1(x))B\left(\frac{a}{2}\right)$ . В работе [17] подробно рассматривается подкрепление конструкции ребрами переменной высоты, что в ряде случаев является наиболее эффективным.

Подставив (4) в (2), после соответствующих преобразований получим функционал в виде (3), где

$$a_{1} = h + F_{x}, a_{2} = \overline{G}_{2}(h + F_{y}), a_{3} = \mu_{2}(2h + F_{x} + F_{y}),$$

$$a_{4} = \frac{1}{2}\overline{G}_{12}(2h + F_{x} + F_{y}), a_{5} = \overline{G}_{13}k(h + F_{x}),$$

$$a_{6} = \overline{G}_{23}k(h + F_{y}), a_{7} = 2S_{x}, a_{8} = \mu_{2}(S_{x} + S_{y}),$$

$$a_{9} = 2\overline{G}_{2}S_{y}, a_{10} = 2\overline{G}_{12}(S_{x} + S_{y}), a_{11} = \frac{h^{3}}{12} + J_{x},$$

$$a_{12} = \overline{G}_{2}(\frac{h^{3}}{12} + J_{y}), a_{13} = \mu_{2}(\frac{h^{3}}{6} + J_{x} + J_{y}),$$

$$a_{14} = 2\overline{G}_{12}(\frac{h^{3}}{6} + J_{x} + J_{y}), a_{15} = \frac{2}{G_{1}}.$$

### Заключение

Таким образом, функционал полной энергии деформации (3), являющийся основой для математической модели деформирования ортотропных подкрепленных оболочек вращения принимает такой же вид, что и для изотропных оболочек [30]. Отличие состоит лишь в числовых коэффициентах. Следовательно, для его минимизации можно использовать методики расчета и алгоритмы, описанные в работах [25–27]. Например, алгоритмы, основанные на градиентном методе и методе продолжения решения по параметру.

Представленная математическая модель деформирования тонкой подкрепленной ортотропной оболочки учитывает ряд важнейших факторов, что позволяет более точно и полно проводить исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости конструкции.

### Литература

- 1. Зеленский Э.С., Куперман А.М., Горбаткина Ю.А., Иванова-Мумжиева В.Г., Берлин А.А. Армированные пластики современные конструкционные материалы // Российский химический журнал. 2001. Т. XLV. №2. С. 56–74.
- 2. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. №8. С. 70–77.
- 3. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 248 с.
- 4. Пикуль В.В. К расчету устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. 2009. №2(2). С. 98–105.
- 5. Carrera E., Brischetto S., Nali P. Plates and shells for smart structures: classical and advanced theories for modeling and analysis. First edition. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011. 322 p.
- 6. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. 2010. No.93. Pp. 14–31.
- 7. Pimenta P.M., Wriggers P. New trends in thin structures: formulation, optimization and coupled problems // CISM International Centre for Mechanical Sciences. 2010. Vol. 519. 228 p.
- 8. Libai A., Simmonds J.G. The nonlinear theory of elastic shells. Cambridge, UK: CUP, 1998. 553 p.
- 9. Ventsel E., Krauthammer T. Thin plates and shells: theory, analysis and applications. New York: Marcel Dekker, 2001. 684 p.
- 10. Ahmed M.K. Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads [Электронный документ] // Mathematical Problems in Engineering. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2009. URL: http://eudml.org/doc/232201 (дата обращения: 06.03.2013).
- 11. Dau F., Pablo F., Polit O. New reference solutions and parametric study for multilayered cylindrical shell // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2010. Vol. 4. No.2. Pp. 133–161.
- Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // Composite Structures. 2013. No.98. Pp. 169– 191.
- Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells // Engineering Structures. 2010. No.32. Pp. 1650–1658.
- 14. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
- 15. Валеев Р.М., Куваев А.С., Курлапов Д.В., Родионов А.В. Усиление железобетонных конструкций с применением полимерных композитов // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3. С. 22–24.
- 16. Дьячкова А.А., Кузнецов В.Д. Расчет усиления железобетонных плит углеродными композиционными материалами // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 3. С. 25–28.
- 17. Москаленко Л.П. Эффективность подкрепления пологих оболочек ребрами переменной высоты // Вестник гражданских инженеров. 2011. №3(28). С. 46–50.

- 18. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners // Journal of Sound and Vibration. 2009. No.327. Pp. 41–54.
- 19. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Физматлит, 1957. 463 с.
- 20. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
- 21. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы теории оболочек из композиционных материалов // Успехи механики. 1983. Т. 6. Вып. 3–4. С. 69–77.
- 22. Буштырков А.А. Нелинейная задача устойчивости цилиндрической ортотропной оболочки при осевом сжатии и поперечном давлении // В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Госстройиздат, 1965. С. 193–202.
- 23. Работнов Ю.Н. Длительная устойчивость пластин и оболочек // Механика полимеров. 1966. №2. С. 314–318.
- 24. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 1976. 216 с.
- 25. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: Физматлит, 2011. 248 с.
- 26. Баранова Д.А. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек вращения на основе метода L-BFGS // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №3. С. 58–59.
- 27. Москаленко Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров. 2011. №4(29). С. 161–164.
- 28. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромиздат, 1962. 431 с.
- 29. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2006. 330 с.
- 30. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
- 31. Семенов А. А. Компьютерное моделирование докритического и закритического поведения тонкостенных оболочек при разных способах закрепления контура // Вестник гражданских инженеров. 2012. №4(33). С. 247–251.
- 32. Семенов А. А. Методика учета формы контура тонкостенной оболочки, заданного функционально // Актуальные проблемы современного строительства и пути их эффективного решения: Материалы международной научно-практической конференции. 10–12 октября 2012. СПб, 2012. С. 43–48.

Алексей Александрович Семенов, Санкт-Петербург, Россия Тел. раб.: +7(812)575-05-49; эл. почта: sw.semenov@gmail.com

© Семенов А.А., Карпов В.В., 2013

# Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

Старший преподаватель Н.В. Ковалева\*,

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»; д.т.н., профессор Ю.Л. Рутман,

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»;

к.т.н., научный сотрудник Г.В. Давыдова, ООО «Геоинжпроект»

**Ключевые слова:** сейсмоизоляция; оптимальные параметры демпфирования; сейсмические воздействия; синтезированные акселерограммы; спектральная плотность; дисперсия

Если система сейсмоизоляции (ССИ) состоит из упруго-демпферных опор, то она превращает защищаемый объект (3O) в низкочастотную систему, фильтрующую энергосодержащие высокочастотные составляющие сейсмического воздействия.

При этом демпфирование в ССИ должно быть достаточно высоким, чтобы исключить резонансные явления (то есть исключить значительное увеличение амплитуды колебаний, если частоты некоторых составляющих широкополосного сейсмического воздействия и системы «3О – ССИ» окажутся близки). Применение демпферов порождает задачу оптимизации их параметров.

Ранее влияние демпфирования на сейсмоизоляционный эффект рассматривалось как в отечественных, так и в зарубежных исследованиях [1–6]. В этих работах исследовались лишь некоторые частные стороны проблемы. Математических формулировок цели и алгоритма решения задачи оптимизации демпфирования предложено не было. Целью представленной работы является формулировка критериев и алгоритма определения оптимальных параметров демпфирования в ССИ.

Действительно, сильное демпфирование ослабляет эффект фильтрации высоких частот. Слабое демпфирование способствует появлению резонансных явлений на низких частотах. Следовательно, существует оптимальное демпфирование, зависящее от спектрального состава воздействия. Так как сейсмические воздействия являются случайными функциями, решение задачи оптимизации возможно лишь в статистической постановке. Ниже дана методика поиска оптимальных параметров демпфирования для случая, когда моделью 3О является система с одной степенью свободы. Такая модель хорошо описывает динамику невысоких 3О (не выше 15—20 этажей).

# 1. Качественная иллюстрация оптимального демпфирования

Рассмотрим принципиальную сторону задачи оптимизации на примере линейной системы с одной степенью свободы. Уравнение колебаний такой системы имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + p^2 \cdot x = -\ddot{y}(t), \tag{1}$$

где  $p=\sqrt{\frac{c}{m}}$  – собственная частота системы;  $\alpha=2\cdot\gamma\cdot p$  – коэффициент затухания;

c – жесткость системы; m – масса системы.

В случае системы маятникового типа [7] собственная частота определяется как  $p=\sqrt{rac{g}{l}}$  ,

где g — ускорение свободного падания; l — длина маятника;  $\gamma$  — безразмерный коэффициент линейного демпфирования; x — горизонтальное смещение 3O относительно движущего фундамента;  $\ddot{y}(t)$  — горизонтальное ускорение фундамента 3O при землетрясении.

При поличастотном воздействии на эту систему возможны следующие ситуации.

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

- 1. Если в воздействии преобладают высокочастотные (по сравнению с частотой системы) составляющие, то при отсутствии демпфирования сейсмоизоляционный эффект максимален. При увеличении демпфирования этот эффект уменьшается. При очень большом демпфировании система приобретает признаки жесткой связи защищаемого объекта и основания.
- 2. Если в воздействии преобладает частота, близкая к собственной частоте системы, то увеличение демпфирования уменьшает коэффициент динамичности воздействия до 1 [8]. Малое демпфирование приводит к резонансным эффектам.
- 3. Если во внешнем воздействии имеются и низкочастотные, и высокочастотные составляющие, то существует оптимальное демпфирование, обеспечивающее минимальное значение абсолютных ускорений 3О, то есть минимальные инерционные нагрузки. Значение

оптимального коэффициента демпфирования  $\gamma = \frac{\alpha}{2 \cdot p}$  лежит внутри интервала (0;1).

Чтобы качественно прояснить ситуацию, рассмотрим одночастотную и двухчастотную модели внешнего воздействия, при этом собственная частота исследуемой системы — 0.4 Гц. В первой модели на систему действовала либо низкочастотная нагрузка с частотой, близкой к частоте защищаемого объекта, либо высокочастотная с частотой, в несколько раз превышающей частоту защищаемого объекта. Полученные при таком нагружении результаты показаны на рисунках 1а, 1б и наглядно подтверждают сказанное выше. Во второй модели на систему действовала нагрузка, имеющая две составляющие — низкочастотную и высокочастотную с различным соотношением их амплитуд:

$$\ddot{y}(t) = A_H \sin(2\pi \cdot f_H \cdot t) + A_B \sin(2\pi \cdot f_B \cdot t),$$

где  $f_H$  ,  $f_B$  — значения частот низкочастотной и высокочастотной составляющих нагрузки соответственно;  $A_H$  ,  $A_B$  — значения амплитуд.

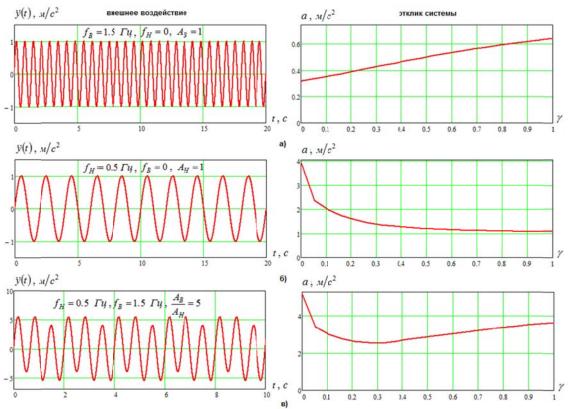


Рисунок 1. Зависимость абсолютных ускорений от коэффициента демпфирования для случаев:

- а) высокочастотного воздействия (  $f_B = 1.5 \ \Gamma \mu \ , \ f_B = 0 \ , \ A_B = 1$  );
- б) низкочастотного воздействия (  $f_H=0.5~\Gamma\mu$  ,  $\,f_H=0$  ,  $\,A_H=1$  );
- в) двухчастотного воздействия (  $f_B=1.5~$   $\Gamma u$  ,  $f_H=0.5~$   $\Gamma u$  ,  $A_B/A_H=5$  )

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

В результате определялась зависимость максимальных абсолютных ускорений  $a=max \big|\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)\big|$  от линейного коэффициента демпфирования  $\gamma$ . Результаты такого нагружения, представленные на рисунке 1в, показывают, что существует оптимальное, «компромиссное» демпфирование.

# 2. Поиск оптимального демпфирования для репрезентативной выборки случайных сейсмических воздействий

### 2.1. Постановка задачи

Ниже рассматривается моделирование сейсмического воздействия случайными процессами. Такая постановка задачи исходит из стохастической природы землетрясения [9–12].

Если внешние воздействия являются случайными функциями, то возможны различные постановки задачи оптимизации для модели (1).

#### 1. Целевая функция

$$\min_{\gamma} \max_{t} \left| \ddot{y}_{i}(t) + \ddot{x}_{i}(t) \right|, \text{ при ограничениях } x = \max_{t} \left| x_{i}(t) \right| \leq h, \tag{2}$$

где h – максимально возможные по конструктивным соображениям перемещения 30 относительно фундамента (за счет работы ССИ);

 $\max_{t} |\ddot{y}_{i}(t) + \ddot{x}_{i}(t)|$  – усредненные по i абсолютные ускорения 3О (оценка математического ожидания):

i — номер реализации внешнего воздействия в репрезентативной выборке этих воздействий.

#### 2. Целевая функция

$$\min_{\gamma} \max_{i} \max_{t} |\ddot{y}_{i}(t) + \ddot{x}_{i}(t)|$$
, при ограничениях  $x = \max_{t} |x_{i}(t)| \le h$ . (3)

Если известна плотность распределения максимальных абсолютных ускорений 3О, то можно установить так называемый «коэффициент пиковости». Он связывает с заданной доверительной вероятностью среднеквадратические значения (по i) максимальных абсолютных ускорений с их максимальными значениями. В этом случае 1 и 2-я постановка задачи совпадают.

### 3. Целевая функция

$$\min_{\gamma} \sqrt{D}$$
 , при ограничениях  $x = \max_{t} \lvert x_i(t) \rvert \leq h$  , (4)

где D – дисперсия стационарного эргодического процесса, каковым считается изменение во времени абсолютных ускорений 3O.

Основная проблема при такой стохастической постановке задачи — моделирование сейсмического воздействия случайными процессами. Существует ряд подходов к заданию автокорреляционных функций сейсмических воздействий и синтезированию на их основе акселлерограмм [13–15]. При статистическом анализе сейсмоизолированных систем необходимо, чтобы одновременно значения автокорреляционных функций смещения и ускорения в нуле равнялись среднему уровню расчетных смещений и ускорений (соответственно). Эта проблема подробно исследована в работе [16].

Методика генерирования воздействий, в которых одновременно реализуются фактические средние значения смещения и ускорения, предложена в работе [17]. Эта методика генерации случайных сейсмических воздействий была использована ниже для поиска оптимального демпфирования.

Методом статистического моделирования был получен пакет искусственных акселерограмм объемом N=300. Параметры синтезируемых акселерограмм соответствуют району г. Сочи [18]. В качестве исходных данных для построения пакета расчетных акселерограмм приняты расчетные значения пиковых смещений и ускорений основания  $U_{\rm max}=0.2$  м и a=2.3 м/ $c^2$ . Преобладающие периоды воздействия приняты равными 1.3 с и 0.5 с.

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

## 2.2. Числовой расчет

На каждую синтезированную акселерограмму пакета проводился расчет системы с одной степенью свободы со следующими параметрами:

- частота сейсмоизолированной системы равна 0.4 Гц;
- коэффициент линейного демпфирования варьируется от 0 до 1.

Поиск оптимального демпфирования осуществлялся методом Монте-Карло, т. е. критерий (2) вычислялся через определение отклика модели (1) с последующим осреднением. Пример реализации одного варианта расчета показан на рисунке 2.

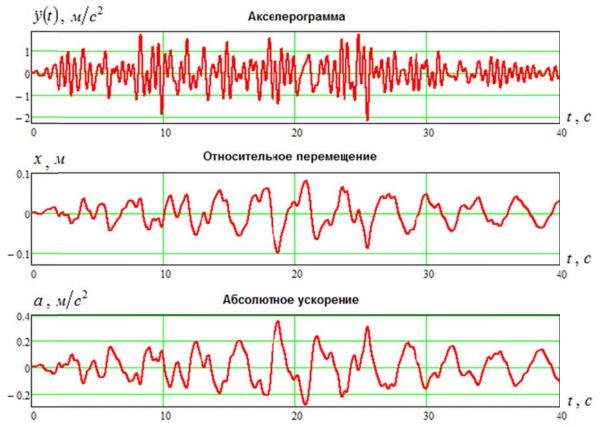


Рисунок 2. Пример реализации варианта расчета на синтетическую акселерограмму

В результате расчетов на 300 акселлерограмм были получены смещения и ускорения при разных значениях  $\gamma$  (рис. 3). Согласно рисунку 3 оптимальный коэффициент линейного демпфирования  $\gamma=0.1$ .

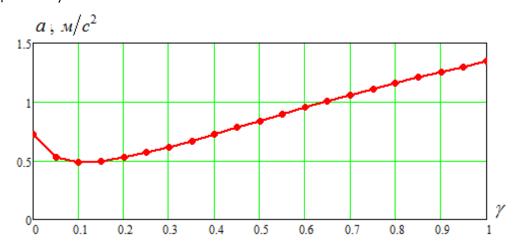


Рисунок 3. Зависимость абсолютных ускорений от коэффициента демпфирования

Затем были вычислены математические ожидания M и среднеквадратические отклонения указанных показателей  $\sigma$ , построены функции плотности распределений рассматриваемых величин, соответствующие гистограммы распределений (рис. 4). Анализ результатов моделирования показал, что характеристики (усилия, смещения, ускорения) работы сейсмоизолированной системы описываются логнормальным законом распределения.

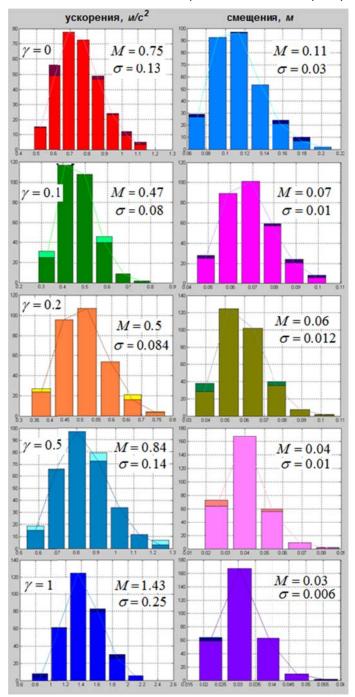


Рисунок 4. Гистограммы распределения максимального ускорения и смещения

## 2.3. Оценка спектральной плотности

Была рассмотрена и другая постановка задачи оптимизации – (4). Она заключается в определении спектральной плотности процесса, который считается эргодичным и стационарным.

В этом случае постановка задачи оптимизации для модели будет следующей:

целевая функция –  $min\,\widetilde{a}$ ,

где  $\widetilde{a}=\sqrt{D}$  – среднеквадратическое значение абсолютных ускорений 3O:

$$D = \int_{0}^{\infty} S(\omega) d\omega;$$
 (5)

 $S \left( \omega 
ight)$  – спектральная плотность абсолютных ускорений:  $\ddot{u}_{abc}$ 

$$S_{ii_{a\delta c}}(\omega) = H(\omega)S_{ex}(\omega); \tag{6}$$

 $H(\omega)$  – передаточная функция;

 $H(\omega)$  – передаточная функция;  $S(\omega)$  – спектральная плотность ускорений грунта на входе.

В случае перехода от ускорений основания к абсолютным ускорениям 3О передаточная функция имеет следующий вид [18]:

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \frac{\left(4 \cdot \gamma^2 \cdot \omega\right)^2}{p^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}^2 + \frac{4 \cdot \gamma^2 \cdot \omega^2}{p^2}}$$
 (7)

Для синтетических акселлерограмм  $S(\omega)$  определяется по формуле Хинчина [8]:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau \ d\tau \,, \tag{8}$$

где K( au) – автокорреляционная функция ускорений, находится по рекомендациям [16].

Определенные трудности возникают при оперировании реальными акселлерограммами [19].

Если имеется набор из N реализаций  $x_k(t)$ ,  $(k-1)T \le t \le kT$ , k=1,2,...N стационарного эргодического случайного процесса  $\{x(t)\}$ , то оценка спектральной плотности имеет вид [20]:

$$S_{ex}(f) = \frac{2}{N \cdot T} \sum_{k=1}^{N} |X_k(f, T)|^2,$$
 (9)

где T — длина каждого процесса;

 $X_kig(f$  , Tig) – финитное преобразование Фурье для k -й реализации:

$$X_k(f,T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt.$$

Применительно к реализации случайного процесса пример определения  $X_k(f,T)$  с помощью математического пакета MathCad показан на рисунке 5 (частота среза – 33 Гц).

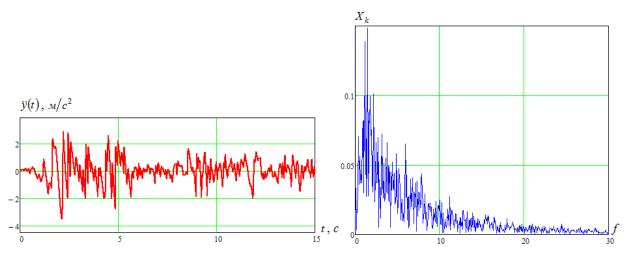


Рисунок 5. Нестационарное сейсмическое воздействие и его финитное преобразование Фурье

Далее последовательно используются формулы (6)–(9). В результате варьирования коэффициента линейного демпфирования  $\gamma$  от 0 до 1 получаем следующую зависимость дисперсии процесса от  $\gamma$  (рис. 6).

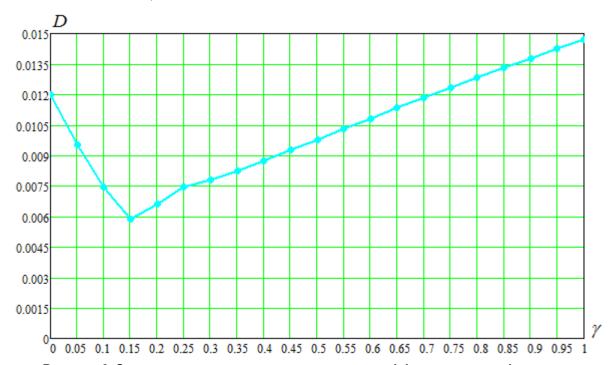


Рисунок 6. Зависимость дисперсии процесса от коэффициента демпфирования

## 3. Нелинейная постановка задачи

Для нелинейной модели использование передаточной функции невозможно. Поэтому идет прямое усреднение отклика.

Рассмотрим маятниковую ССИ с упругопластическими демпферами [21]. В этом случае уравнение колебаний динамической системы «30 – ССИ» имеет вид:

$$\ddot{x} + p^2 \cdot x + f(x, \dot{x}) = -\ddot{y}(t), \tag{10}$$

где 
$$p = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
;

 $f(x,\dot{x})$  – суммарная билинейная силовая характеристика (с упругой разгрузкой) демпферов, приведенная к единичной массе.

Функция  $f(x,\dot{x})$  характеризуется 3 параметрами:

- $p_1, p_2$  частоты, соответствующие первому и второму участку билинейной силовой характеристики;
- $f_T$  приведенное к единичной массе усилие (ускорение), соответствующее переходу от первого участка характеристики ко второму.

На репрезентативную выборку воздействий производился расчет вышеописанной нелинейной системы с фиксированными параметрами p=0.4  $\Gamma u$ ,  $p_1=20$   $\Gamma u$  и  $p_2=0.2$   $\Gamma u$ . Параметр  $f_T$  варьировался от 0 до 0.2 м/с². Возможность варьирования этого параметра показана в [21]. За критерий оптимальности был взят критерий (2). Из рисунка 7 видно, что оптимум демпфирования при такой постановке задачи существует.



#### Заключение

В статье рассмотрена задача поиска оптимальных параметров демпфирования в ССИ. На простейшей модели показана качественная сторона проблемы.

Рассмотрена стохастическая постановка задачи и сформулированы различные критерии оптимизации параметров демпфирования.

Для минимизации абсолютных ускорений 3О предложен алгоритм поиска оптимальных параметров, основанный на усреднении результатов численных реализаций процесса колебаний в системе «ЗО – ССИ» (то есть на методе Монте-Карло). При минимизации дисперсии абсолютных ускорений 3О для поиска оптимума использовалась спектральная теория случайных процессов. Задача оптимизации параметров нелинейных (упругопластических) демпферов также решалась методом Монте-Карло.

Приведены примеры расчета для каждого из вышеперечисленных критериев оптимизации. Из этих примеров видно, что оптимизация параметров демпфирования может уменьшить критериальный параметр в 1.5–2 раза, т. е. значительно повысить качество ССИ.

#### Литература

- 1. Уздин А.М., Елизаров С.В., Белаш Т.А. Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений. М.: УМЦ по образов. на ж.-д. трансп., 2012. 501 с.
- Uzdin A.M. Why the overdamped isolation is better than undamped one // Abstract book of ASSISi 10<sup>th</sup>
  World Conference on Seismic Isolation Energy Dissipation and Active Vibrations Control of Structures.
  Istanbul, 2007. Pp. 69–74.
- 3. Давыдова Г.В. Влияние демпфирования на статистические характеристики сейсмоизолированных зданий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2008. №1. С. 38–43.
- Dolgaya A.A. Base isolated structures resistant control theory and application of base isolation in Russia // ASME. Pressure Vessels and Piping Conference. 1998. Vol. 379 (Seismic, Shock and Vibration Isolation). Pp. 71–78.
- 5. Skinner R.I. Hysteretic dampers for earthquake resistance structures // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1975. Vol. 3–3. Pp. 287–293.
- Robinson W.N. An extrusion energy absorber suitable for thr protection structures during an earthquake. // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1976. Vol. 3–4. Pp. 251–259.
- 7. Рутман Ю.Л. Маятниковые сейсмоизолирующие опоры. Конструкция. Расчет. Эксперимент // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 37–43.
- 8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- 9. Сейсмический риск и инженерные решения. Пер. с англ. / Под ред. Ц. Ломнитца и Э. Розенблюта. М.: Недра, 1981. 375 с.
- 10. Болотин В.В. Статистическая теория сейсмостойкости сооружений // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. №4. С. 123–129.
- 11. Айзенберг Я.М. Генерирование расчетного ансамбля синтетических акселерограмм и исследование влияния их параметров на сейсмическую реакцию сооружений // Расчет и проектирование зданий для сейсмоопасных районов. М.: Наука, 1988. С. 5–14.
- 12. Housner G.W. Characteristics of strong motion earthquake // Bulletin of the Seismological Society of America. 1947. Vol. 37. Pp. 19–31.
- 13. Елизаров С.В. Особенности применения метода случайного моделирования в задачах расчета сейсмоизоляции сооружений // Сборник трудов Международной конференции: Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте. СПб, 2008. С. 100–104.
- 14. Смирнов В.И., Вахрина Г.Н. Развитие моделей расчетных акселерограмм сейсмических воздействий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2011. №4. С. 26–34.
- 15. Ветошкин В. А. Синтезированная модель сейсмического воздействия // Расчет сейсмостойкости энергетического оборудования. Сборник статей. Труды ЦКТИ 212. Л., 1984. С. 41–52.
- 16. Давыдова Г.В. Статистический метод расчета систем сейсмоизоляции зданий и сооружений: Дисс.... канд. техн. наук. СПб., СПбГАСУ, 2010. 157 с.
- 17. Уздин А.М., Давыдова Г.В. Некоторые особенности задания сейсмического воздействия при статистическом моделировании колебаний сейсмоизолированных систем // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2008. №6. С. 29–32.
- 18. Рекомендации по заданию сейсмических воздействий для расчета зданий разной степени ответственности. СПб.–Петропавловск-Камчатский: КамЦентр, 1996. 12 с.
- 19. Алешин А.С. Макросейсмические основы сейсмического микрорайонирования // Вопросы инженерной сейсмологии. 2011. Т. 38. №4. С. 15–28.
- 20. Bendat J.S., Pirsol A.G. Engineering applications of correlation and spectral analysis. New York: John Wiley & Sons, 1978. 312 p.
- 21. Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л. Оценка эффективности параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 37–43.

\*Надежда Владимировна Ковалева, Санкт-Петербура, Россия Тел. моб.: +7(911)8355552; эл. почта: balloun@yandex.ru

© Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В., 2013

# О методах решения большеразмерных задач строительной механики на многоядерных компьютерах

Д.т.н., с.н.с. С.Ю. Фиалко\*,

Краковский технологический университет им. Тадеуша Костюшко

**Ключевые слова**: метод конечных элементов; прямые методы решения СЛАУ; метод сопряженных градиентов; предобусловливание; многоядерные компьютеры

Развитие современных программных комплексов и тенденция к высокой детализации расчетных моделей приводят к возрастанию размерности расчетных моделей зданий и сооружений до 1 000 000—8 000 000 уравнений. Такие задачи все чаще решаются на многоядерных настольных компьютерах, а не на кластерах, мощных рабочих станциях и компьютерных сетях. Поэтому появилась необходимость разработки современных прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными симметричными матрицами, возникающих при применении метода конечных элементов к задачам строительной механики. Эти методы должны учитывать специфику данных компьютеров, относящихся к архитектуре SMP (Symmetric Multiprocessing), когда несколько одинаковых процессоров взаимодействуют с оперативной памятью (ОП), разделяемой между ними. Такие компьютеры имеют ограниченный объем ОП и слабую пропускную способность системы памяти. Поэтому для большинства алгоритмов, используемых в инженерных и научных расчетах, ускоряемость вычислений при возрастании количества процессоров (speed up) существенно ограничена.

В данной работе мы представим краткое описание прямых методов для разреженных матриц, а также описание итерационного метода PSICCG (Parallel Sparse Incomplete Cholesky Conjugate Gradient), разработанного автором и внедренного в развивающуюся новую версию программного комплекса SCAD, а также приведем сопоставление производительности этих методов на нескольких примерах расчета реальных конструкций многоэтажных зданий.

# Блочный многофронтальный метод подконструкций BSMFM (Block Substructure Multifrontal Method)

Этот метод детально описан в работе [1] и сочетает идею метода суперэлементов с автоматическим делением исходной конструкции на подконструкции, не требующим вмешательства пользователя. Декомпозиция конструкции на подсистемы осуществляется на основе методов упорядочения, значительно снижающих количество ненулевых элементов в факторизованной матрице. Как и в классическом многофронтальном методе [2, 3], разложение разреженной матрицы сводится к последовательности задач, решаемых для плотных прямоугольных матриц, что дает возможность применять матричные алгоритмы высокой производительности уровня 3 BLAS (Basis Linear Algebra Subroutines). Для увеличения производительности выполняется анализ разреженной матрицы с целью объединения узлов расчетной модели в группы везде, где это возможно, что приводит к увеличению размерности блока полностью собранных уравнений в плотных матрицах и к существенному увеличению производительности матричных алгоритмов.

Ведущей процедурой при разложении матрицы является матричное умножение - алгоритм dgemm (General Matrix Multiply), где первая буква d (double) означает, что операции выполняются с двойной точностью. Эта процедура многократно использует кэш процессора: данные, один раз считанные из оперативной памяти (ОП) в кэш процессора, многократно используются, причем загрузка в регистры процессора производится сразу из кэш, а не из медленной ОП. Поэтому система памяти оказывается не перегруженной, и алгоритм dgemm демонстрирует хороший speed ир даже на обычных десктопах и ноутбуках. Алгоритм dgemm позволяет максимально использовать производительность процессора, поэтому прямые методы в современных программных комплексах так или иначе раскладывают матрицу на плотные прямоугольные блоки вместо умножение векторно-скалярных используют матричное операций производительности [1].

Многофронтальный метод может работать с любым упорядочением [4], а в случае нехватки объема оперативной памяти использовать диск, что позволяет решать большие задачи на компьютерах с ограниченным объемом ОП.

#### PARDISO - Parallel Direct Solver

Главным недостатком многофронтального метода является большое количество избыточных пересылок данных «память – память» и «память – диск». Поэтому в последнее время большую популярность получил метод PARDISO [5] из библиотеки процедур высокой производительности Intel Math Kernel Library (Intel MKL) [6]. PARDISO демонстрирует высокую производительность и хороший speed up, в этом отношении он значительно превосходит многофронтальный решатель. Однако пригоден этот метод только для решения задач, которые можно решать целиком в ОП. Хотя в руководстве Intel MKL написано, что PARDISO поддерживает режим ООС (Out of Core — использование дисковой памяти), на практике оказывается, что этот режим работает только для небольших задач, при этом производительность PARDISO в несколько раз ниже, чем многофронтального решателя. Для больших задач режим ООС заканчивается сообщением об ошибке [7, 8].

# PARFES – Parallel Finite Element Solver

Сказанное выше послужило мотивацией для разработки конечно-элементного решателя PARFES [7, 9], который демонстрирует при работе в оперативной памяти (СМ — Core Mode) производительность и ускоряемость, близкую к PARDISO, однако позволяет в случае дефицита ОП использовать диск, переключаясь в режимы ООС и ООС1. В режиме ООС метод показывает небольшое снижение производительности и speed up по сравнению с режимом СМ. В режиме ООС1 PARFES выполняет большое количество обменов с диском, поэтому производительность и speed up существенно деградируют. Однако этот режим позволяет решать большие задачи на десктопах с малым объемом ОП и ноутбуках. В режиме ООС1 PARFES обычно требует меньшего объема ОП, чем многофронтальный метод.

# PSICCG – Parallel Sparse Incomplete Cholesky Conjugate Gradient

Главными недостатками итерационных методов по сравнению с прямыми являются: невозможность обнаружения геометрической изменяемости расчетной модели, замедление или отсутствие сходимости в случае плохо обусловленных задач, необходимость выполнять для процесс начала каждой правой части использование итерационный С и низкопроизводительных основных алгоритмов - умножение разреженной матрицы на вектор и решение дополнительной системы уравнений относительно предобусловливания. На рисунке 1 приведены типичные зависимости для алгоритма матричного умножения и алгоритма умножения плотной матрицы на вектор. Здесь  $S_p = T_1/T_p$  – speed up, или отношение времени решения задачи на одном процессоре к времени ее решения на р процессорах.

Прямая 1 – идеальный speed up, проходит через точки [0, 0], [1, 1], .... (если задача решается на двух процессорах, то в идеале мы бы хотели решить ее в два раза быстрее, чем на одном, на трех - в три раза быстрее, и т. д.). Кривая 2 соответствует алгоритму умножения матрицы на вектор, а кривая 3 - алгоритму dgemm. В отличие от алгоритма dgemm, алгоритм умножения матрицы на вектор работает со скоростью медленной системы памяти, а не быстрого процессора. причем система памяти вследствие загруженности не успевает обслужить несколько процессоров. Поэтому этот алгоритм ускоряется до тех пор, пока не произойдет исчерпания пропускной способности системы памяти. Далее увеличение числа процессоров не приводит к возрастанию speed up [1].

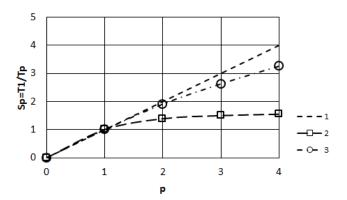


Рисунок 1. Ускоряемость (speed up) алгоритма матричного умножения (3) и алгоритма умножения матрицы на вектор (2) при возрастании количества процессоров  $\rho$ 

Обзор известных библиотек высокопроизводительных процедур показал, что как в библиотеке Intel MKL, так и в библиотеке Фортрана IMSL для разреженных матриц отсутствуют версии параллельных процедур метода сопряженных градиентов и решения СЛАУ с нижней (верхней) треугольной матрицей [10, 11]. Это свидетельствует о том, что распараллеливание итерационных решателей на компьютерах архитектуры SMP – задача далеко не простая.

В предлагаемом методе распараллеливание основано на том, что подавляющее большинство реальных расчетных моделей подвержено действию нескольких загружений: собственный вес, длительные и кратковременные нагрузки, ветровая и снеговая нагрузки, нагрузки на часть этажа и т. д. При этом итерационный процесс для каждой правой части выполняется на отдельном потоке (процессоре), что обеспечивает распараллеливание всего вычислительного процесса, а не вилочно-подобного (fork-joint) распараллеливания на уровне ведущих процедур. В случае одной правой части выполняется распараллеливание только процедуры умножения матрицы на вектор.

Расчетные модели современных многоэтажных зданий (чаще всего именно такие объекты порождают СЛАУ высокого порядка) часто являются плохо обусловленными вследствие наличия множества конечных элементов тонких пластин и оболочек, сопряжения разнотипных элементов (стержней, пластин, оболочек и объемных элементов), наличия жестких связей, упругих опор и т. д. [12]. Кроме того, из-за сложности геометрии контуров не всегда удается выдержать оптимальные соотношения сторон и оптимальные углы для конечных элементов пластин и оболочек.

Эффективным методом борьбы с плохой обусловленностью является предобусловливание [13], суть которого состоит в переходе от заданной системы уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,, \tag{1}$$

где  ${\bf K}$  – симметричная разреженная матрица жесткости;  ${\bf x}$  – вектор решения;  ${\bf b}$  – правая часть, к системе

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \,, \tag{2}$$

где  ${\bf B}$  — оператор предобусловливания — симметричная положительно определенная матрица значительно более редкой структуры, чем  ${\bf K}$ , в силу чего вычислительная стоимость решения дополнительной системы уравнений  ${\bf Bz}_k={\bf r}_k$ , где  ${\bf r}_k={\bf b}-{\bf K}{\bf x}_k$  значительно ниже, чем системы уравнений (1). Здесь  ${\bf r}_k$  — вектор невязки на шаге итерации  ${\bf k}$ . Если при этом  $C({\bf B}^{-1}{\bf K}) < C({\bf K})$ , где  $C(\ldots)$  — число обусловленности, то система (2) сходится за меньшее количество итераций, чем система (1). Если же при этом  ${\bf B}={\bf K}$ , то приближенное решение сходится к точному за одну итерацию при любом стартовом векторе [13]. Последнее свойство служит ключом к построению эффективного предобусловливания.

Некоторые способы построения предобусловливания оговорены в работе [13]. В данной работе для построения предобусловливания используется неполная факторизация Холецкого, реализованная в технологии разреженных матриц [4]. При этом  $\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ , где  $\mathbf{H}$  – неполный фактор Холецкого. В процессе неполной факторизации пренебрегается малыми по величине элементами:

$$H_{ii} < \psi H_{ii} H_{ii} \,, \tag{3}$$

где  $\psi$  — параметр отбрасывания,  $0 \le \psi \le 1$ ,  $i,j \in [1,N]$ . При отбрасывании элемента  $H_{ij}$  производится поправка диагональных элементов с целью обеспечения положительной определенности неполного фактора  $\mathbf{H}$  [14, 15], что имеет решающее значение для гарантированной сходимости.

Чем параметр  $\psi$  ближе к нулю, тем меньшее количество итераций требуется для получения решения с заданной точностью, но тем больший объем оперативной памяти необходим для удержания неполного фактора  $\mathbf H$  и тем большее время будет затрачено для выполнения прямыхобратных подстановок в процессе итерации. Для того чтобы параметр  $\psi$  можно было брать как можно меньшим, в данной работе применяется технология разреженных матриц.

Прежде всего, производится упорядочение узлов исходной конечно-элементной модели, которое значительно уменьшает количество ненулевых элементов в факторизованной матрице. При этом уменьшается и количество отбрасываемых элементов в процессе неполной Фиалко С.Ю. О методах решения большеразмерных задач строительной механики на многоядерных компьютерах

факторизации, поэтому следует ожидать, что в среднем при таком подходе в неполном факторе Н набегает меньшая погрешность, чем при отсутствии упорядочения.

На основе многочисленных тестов установлено, что лучшие результаты получаются при упорядочении алгоритмом минимальной степени [16], поскольку плотность матрицы увеличивается только в самом конце разложения и отбрасывание малых элементов в начале матрицы в большей степени сказывается на значениях удерживаемых элементов, расположенных в конце матрицы, в меньшей — на значениях удерживаемых элементов в средней части матрицы, что ограничивает накопление ошибок, связанных с отбрасыванием. Другие популярные методы упорядочения (метод вложенных сечений, METIS [17, 18, 19], метод фактор-деревьев и др. [4]) такой особенностью не обладают и обычно приводят к худшим свойствам предобусловливания (см. пример 1). Идея используемого нами параллельного алгоритма неполной факторизации представлена в работе [20].

После окончания неполной факторизации производится вторичное отбрасывание малых внедиагональных элементов матрицы **H** [14]. Под малыми понимаются элементы  $\mathbf{H}_{ij}^2 < \psi_1 \mathbf{H}_{ii} \mathbf{H}_{jj}$ , где  $0 \le \psi \le \psi_1 \le 1$ . Таким образом, при неполной факторизации параметр  $\psi$  берется как можно меньшим, что позволяет лучше приблизить значения удерживаемых коэффициентов матрицы  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H}_{ij}^2 \ge \psi_1 \mathbf{H}_{ii} \mathbf{H}_{jj}$ ) к значениям соответствующих им коэффициентов матрицы  $\mathbf{L}$  — нижней треугольной матрицы полного разложения Холецкого. Вторичное отбрасывание и сжатие данных позволяет освободить часть оперативной памяти и ускорить прямые-обратные подстановки на этапе итераций при незначительном снижении способности предобусловливания ускорять сходимость.

Распараллеливание метода на этапе итераций осуществляется следующим образом. Сначала создается очередь задач Q, в которой каждой правой части  $s \in [1, nrhs]$  (nrhs - ux количество) соответствует свое задание - для заданной нагрузки  $\mathbf{b}^s$  определить вектор решения  $\mathbf{x}^s$ .

Затем в параллельном регионе поток ip (ip  $\epsilon$  [0; np-1]) получает монопольный доступ к очереди заданий Q, выбирает ближайшее задание s и сразу же удаляет его из очереди. После этого любой другой поток получает право монопольно завладеть очередью. Поток ip запускает итерационный процесс для загружения s. Когда вектор решения будет получен c заданной точностью

$$\left(\frac{\left\|\mathbf{b}^{s}-\mathbf{K}\mathbf{x}_{k}^{s}\right\|_{2}}{\left\|\mathbf{b}^{s}\right\|_{2}}\wedge\frac{\left\|\mathbf{b}^{s}-\mathbf{K}\mathbf{x}_{k}^{s}\right\|_{\infty}}{\left\|\mathbf{b}^{s}\right\|_{\infty}}\right)< tol,$$

где tol — верхняя граница ошибки, определяемая в двух нормах; k — номер итерации, поток ip монопольно овладеет структурой данных, хранящей векторы решений, и поместит в нее полученное решение для правой части s. После этого поток ip освобождается и подхватывает следующее задание. И так до тех пор, пока все задания в очереди Q не будут выполнены. В результате осуществляется параллельное итерирование np правых частей.

# Численные результаты

Рассмотрим примеры реальных задач, взятых из коллекции SCAD Soft. Названия задач сохранены такими, как их представили авторы соответствующих проектов. Исследование проводилось на компьютерах:

- 1. Ноутбук DELL XPS L502X с 4-ядерным процессором Intel® Core™ i7-27600QM CPU 2.4/3.4 GHz, RAM DDR3 8 GB, OS Windows 7 (64 bit) Professional, SP1.
- 2. Десктоп AMD Phenom™ II x4 995 3.2 GHz, RAM DDR3, 16 GB, OS Windows Vista™ Business (64-bit). SP2.
- 3. Рабочая станция с 16-ядерным процессором AMD Opteron 6276 2.3/3.200 GHz, RAM DDR3 64 GB, OS Windows Server 2008 R2 Enterprise, SP1.

Сравнивается производительность следующих методов: PSICCG, PARFES, BSMFM и ICCG0 [14] — классического итерационного метода сопряженных градиентов с предобусловливанием неполной факторизации Холецкого «по позиции».

Для метода ICCG0 структура матрицы **B** совпадает со структурой матрицы жесткости **K**, поскольку при неполной факторизации удерживаются только те элементы, которые расположены в тех же позициях, что и ненулевые элементы матрицы жесткости. Для того чтобы сходимость была гарантирована, необходимо обеспечить положительную определенность неполного фактора **H**. Поэтому матрица **B** представляется как  $D+1/(1+\gamma)\cdot S$ , где D=Diag(K); S=K-D;  $\gamma-$  малый параметр, вначале полагаемый равным нулю [14]. Если в процессе неполной факторизации на главной диагонали появляется отрицательный элемент, это означает потерю положительной определенности матрицы **H**. Тогда параметр  $\gamma$  увеличивается (уменьшаются внедиагональные элементы матрицы **B**) и факторизация повторяется сначала. И так до тех пор, пока не добьемся положительной определенности матрицы **H**. Распараллеливание метода ICCG0 осуществляется так же, как и PSICCG.

Пример 1. Расчетная модель Ком\_1 (2 546 400 уравнений, 4 загружения, рис. 2) содержит 3 и 4-узловые оболочечные конечные элементы, а также конечные элементы пространственной рамы. Толщины оболочечных элементов лежат в пределах от 0.2 м до 0.5 м. Сечения стержневых элементов меняются от 0.2 × 0.2 м до 1.5×0.5 м.

В таблице 1 приведена зависимость количества ненулевых элементов в факторизованной матрице L (Nonzero(L)), в неполном факторе H (Nonzero(H)), количества отброшенных элементов (Rejected), времени решения задачи и количества итераций для всех правых частей от метода упорядочения. Здесь RCM – обратный алгоритм Катхилла-Макки [4]. MMD - улучшенная версия алгоритма минимальной степени [16]. Алгоритм METIS был упомянут ранее. На рисунках 3, 4, 5 приведены портреты факторизованной матрицы при различных методах упорядочения. Поскольку матрица симметричная, то показана только верхняя половина. Результаты подтверждают, что наиболее эффективным из рассмотренных является упорядочение алгоритмом MMD.

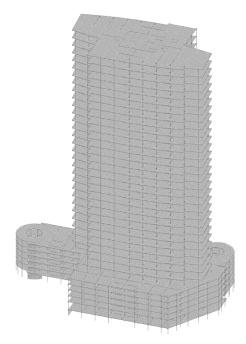


Рисунок 2. Расчетная модель Kom\_1 (2 546 400 уравнений)

Таблица 1. Зависимость времени решения и количества итераций от метода упорядочения. Задача Ком\_1 (2 546 400 уравнений) на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-27600QM CPU 2.4 GHz, RAM DDR3 8 GB, количество процессоров 4,  $\psi$ =10<sup>-10</sup>,  $\psi$ <sub>1</sub> = 10<sup>-7</sup>, tol = 10<sup>-4</sup>

Метод	Nonzero(L)	Nonzero(H)	Rejected	Время решения, с	Количество итераций
RCM	1 712 207 056	132 838 948	1 579 368 108	548	1 241
METIS	982 167 276	129 234 434	852 932 842	247	657
MMD	974 895 924	119 539 725	855 356 199	232	539

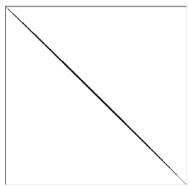


Рисунок 3. Упорядочение алгоритмом RCM

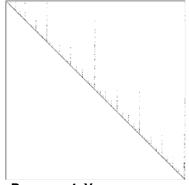


Рисунок 4. Упорядочение алгоритмом METIS

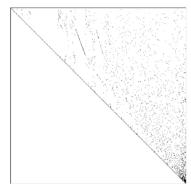


Рисунок 5. Упорядочение алгоритмом MMD

Фиалко С.Ю. О методах решения большеразмерных задач строительной механики на многоядерных компьютерах

В таблицах 2, 3 приведено сопоставление параметров решения этой задачи на компьютерах с процессорами Intel® Core™ i7-27600QM и AMD Phenom™ II х4 995 для различных методов.

Таблица 2. Параметры решения задачи Ком\_1 (2 546 400 уравнений) на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-27600QM CPU 2.4 GHz, RAM DDR3 8 GB,  $\psi$  = 10<sup>-10</sup>,  $\psi$ <sub>1</sub> = 10<sup>-7</sup>, tol = 10<sup>-4</sup>

Метод	Количество потоков	Режим	Время решения, с	Количество итераций для всех правых частей
PARFES	4	OOC	479	_
BSMFM	4	OOC	1 845	_
PSICCG	4	СМ	247	657
ICCG0	4	СМ	4 035	24 395

Лучший результат показал итерационный метод PSICCG. Малое количество итераций при принятых значениях параметра отбрасывания свидетельствует о том, что предложенный способ построения предобусловливания оказался эффективным. Классический метод ICCG0 показал значительно большее количество итераций, а продолжительность решения оказалась в 16 раз больше, чем при использовании метода PSICCG. Прямые методы использовании режим ООС, который снизил их производительность. При этом PARFES оказался в 3.9 раза быстрее многофронтального метода.

Таблица 3. Параметры решения задачи Ком\_1 (2 546 400 уравнений) на компьютере с процессором AMD Phenom™ II x4 995 3.2 GHz, RAM DDR3, 16 GB,  $\psi$ =10<sup>-10</sup>,  $\psi$ <sub>1</sub> = 10<sup>-7</sup>, tol = 10<sup>-4</sup>

Метод	Количество потоков	Режим	Время решения, с	Количество итераций для всех правых частей
PARFES	4	СМ	211	1
BSMFM	4	000	1 778	1
PSICCG	4	СМ	364	657
ICCG0	4	CM	5 559	24 395

На компьютере с процессором AMD Phenom™ II x4 995 объем ОП оказался в 2 раза больше, чем в предыдущем случае, что позволило PARFES работать в режиме СМ и показать лучший результат. На рисунке 6 приведена ускоряемость метода PSICCG при увеличении количества загруженных ядер.

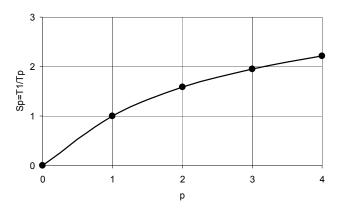


Рисунок 6. Ускоряемость решения при увеличении количества потоков на компьютере с процессором AMD Phenom™ II x4 995 3.2 GHz, RAM DDR3, 16 GB

**Пример 2.** Расчетная модель многоэтажного офисного здания Atrium\_4\_1 (7 328 394 уравнения, 5 загружений, рис. 7) включает оболочечные треугольные 6-узловые, четырехугольные 8-узловые, треугольные и четырехугольные транзитные конечные элементы, а также стержневые конечные элементы и конечные элементы специального назначения — упругие опоры, моделирующие работу упругого основания. Толщины оболочечных элементов лежат в пределах от 0.13 м до 0.6 м, что приводит к разбросу жесткостей до 100 раз.

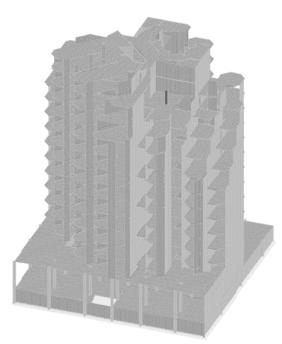


Рисунок 7. Расчетная модель Atrium 4 1 (7 328 394 уравнений)

Решение данной задачи на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-27600QM оказалось неэффективным вследствие недостаточного количества оперативной памяти (8 GB). Для метода PSICCG  $\psi$  =  $10^{-5}$ , что не позволяет обеспечить быструю сходимость метода. Продолжительность решения на четырех потоках составила 23 219 с, а для достижения сходимости при tol =  $10^{-4}$  было выполнено 25 703 итерации.

Результаты решения данной задачи на компьютере с процессором AMD Phenom<sup>™</sup> II x4 995 приведены в таблице 4, а на рабочей станции AMD Opteron 6276 3,200/2,3 GHz — в таблице 5. Во всех случаях для прямых методов количество потоков np принимается равным количеству ядер процессора  $n\_cores$ , а для итерационных —  $np = min\{n\_cores, nrhs\}$ .

Таблица 4. Параметры решения задачи Atrium\_4\_1 (7 328 394 уравнения) на компьютере с процессором AMD Phenom™ II x4 995 3.2 GHz, RAM DDR3, 16 GB,  $\psi$ =10<sup>-10</sup>,  $\psi$ <sub>1</sub> = 10<sup>-7</sup>, tol = 10<sup>-4</sup>

Метод	Количество потоков	Режим	Время решения, с	Количество итераций для всех правых частей
PARFES	4	000	17 445	_
BSMFM	Не решено – мало ОП			
PSICCG	4	СМ	2 713	859
ICCG0	4	СМ	57 769	72 146

Продолжительность решения задачи методом PARFES оказалась в 6.4 раза большей, чем для итерационного метода PSICCG, поскольку при объеме ОП 16 GB PARFES работал в режиме ООС1. Многофронтальному методу не хватило оперативной памяти. Сходимость классического итерационного метода ICCG0 оказалась очень медленной. Это позволяет сделать вывод о том, что данная задача является плохо обусловленной. Несмотря на это, предложенный способ построения предобусловливания в методе PSICCG позволил получить быструю сходимость.

Таблица 5. Параметры решения задачи Atrium\_4\_1 (7 328 394 уравнения) на компьютере с процессором AMD Opteron 6276 3,200/2,3 GHz, RAM DDR3 64 GB,  $\psi$ =10<sup>-12</sup>,  $\psi$ <sub>1</sub> = 10<sup>-7</sup>, tol = 10<sup>-4</sup>

Метод	Количество потоков	Режим	Время решения, с	Количество итераций для всех правых частей
PARFES	16	CM	2 568	_
BSMFM	16	000	9 935	_
PSICCG	5	CM	2 006	852
ICCG0	5	CM	59 526	72 146

Фиалко С.Ю. О методах решения большеразмерных задач строительной механики на многоядерных компьютерах

На компьютере с процессором AMD Opteron 6276 все методы, кроме многофронтального, работают в режиме оперативной памяти. Тем не менее, PSICCG решил эту задачу быстрее, чем PARFES. Многофронтальный метод потребовал в 3.9 раза большее время решения, чем PARFES.

На рисунке 8 приведена ускоряемость метода PSICCG при увеличении количества загруженных ядер.

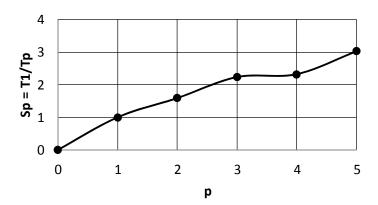


Рисунок 8. Ускоряемость решения при увеличении количества потоков на компьютере с процессором AMD Opteron 6276 3,200/2,3 GHz, RAM DDR3 64 GB

#### Заключение

Для рассмотренных большеразмерных расчетных моделей предлагаемый итерационный метод PSICCG, использующий неполную факторизацию Холецкого в технологии разреженных матриц, продемонстрировал устойчивую сходимость. При достаточно большом объеме оперативной памяти PSICCG позволил принять достаточно малую величину параметра отсечения  $\psi$ , что обеспечило быструю сходимость. Об этом свидетельствует малое количество итераций даже для плохо обусловленных задач, для которых классический метод ICCG0 сходится очень медленно.

Ускоряемость метода при увеличении количества потоков следует признать удовлетворительной, поскольку ведущие процедуры (умножение разреженной матрицы на вектор и решение СЛАУ относительно предобусловливания) относятся к процедурам низкой производительности, поэтому в архитектуре SMP их ускоряемость существенно ограничена пропускной способностью системы памяти (рис. 1).

При сравнении времени решения рассмотренных задач методом PSICCG и прямым методом PARFES оказалось, что если факторизованная матрица жесткости располагается в оперативной памяти, то обычно PARFES дает более быстрое решение (табл. 3). Однако для очень больших задач (табл. 5) метод PSICCG может оказаться более эффективным. При дефиците оперативной памяти PARFES переходит в режим ООС или ООС1. Тогда в ряде случаев применение итерационного метода PSICCG также оказывается более эффективным (табл. 2, 4).

Во всех рассмотренных случаях PARFES оказался более производительным и менее требовательным к ресурсам ОП, чем многофронтальный метод.

Таким образом, современные программные комплексы, реализующие метод конечных элементов, должны содержать как прямые, так и итерационные методы.

Работа выполнена при поддержке Национального научного центра Польши (Narodowy Centrum Nauki, Polska) на основе решения DEC-2011/01/B/ST6/00674. Автор приносит глубокую благодарность коллективу SCAD Soft за предоставление обширной коллекции реальных задач.

#### Литература

1. Фиалко С.Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. М.: СКАД СОФТ, 2009. 160 с.

- 2. Amestoy P.R., Duff I.S., L'Excellent J.Y. Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers // Computer Methods. In Applied Mechanics and Engineering. 2000. Vol. 184. Pp. 501–520.
- Gould N.I.M., Hu Y., Scott J.A. A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse, symmetric linear systems of equations // Technical report RAL-TR-2005-005. Rutherford Appleton Laboratory. 2005.
- 4. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.
- 5. Schenk O., Gartner K. Two-level dynamic scheduling in PARDISO: Improved scalability on shared memory multiprocessing systems // Parallel Computing. 2002. Vol. 28. Pp. 187–197.
- 6. Intel® Math Kernel Library Reference Manual. Document Number: 630813-029US. [Электронный ресурс]. URL: http://www.intel.com/software/products/mkl/docs/WebHelp/mkl.htm. (дата обращения: 29.04.2012).
- 7. Fialko S. PARFES: A method for solving finite element linear equations on multi-core computers // Advances in Engineering Software. 2010. Vol. 40. No.12. Pp. 1256–1265.
- 8. Pardo D., Myung Jin Nam, Carlos Torres-Verdín, Michael G. Hoversten, Iñaki Garay. Simulation of marine controlled source electromagnetic measurements using a parallel fourier hp-finite element method // Computers & Geosciences. 2011. Vol. 15. No.1. Pp. 53–67.
- 9. Fialko S. Parallel finite element solver for multi-core computers [Электронный ресурс] // Federated conference on computer science and information systems, September 9–12, 2012. Wrocław, Poland. IEEE Xplore Digital Library, INSPEC Accession Number: 13137537. URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?tp=&arnumber=6354298&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fstamp%2Fstamp.jsp%3Ftp%3D%26arnumber%3D6354298. (дата обращения: 22.08.2013).
- 10. Intel® Math Kernel Library for Windows\* OS User's Guide. Document Number: 315930-032US. Intel® MKL 11.0 Windows\* OS. Managing Performance and Memory. Improving Performance with Threading. Threaded Functions and Problems [Электронный ресурс]. URL: http://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/mkl\_sa/11/mkl\_userguide\_win/index.htm. (дата обращения: 22.08.2013).
- 11. IMSL® Fortran Library Features. Fortran Library Documentation. [Электронный ресурс]. URL: http://www.roguewave.com/support/product-documentation/imsl-numerical-libraries/fortran-library.aspx. (дата обращения: 29.04.2012).
- 12. Perelmuter A.V., Fialko S.Y. Problems of computational mechanics relate to finite-element analysis of structural constructions // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2005. Vol. 2. No.1. Pp. 72–86.
- 13. Фиалко С.Ю. Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечноэлементных задач строительной механики // В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. С. 552–569.
- 14. Suarjana M., Kincho Law H. A robust incomplete factorization based on value and space constraints // International Journal for Numerical Methods In Engineering. 1995. Vol. 38. Pp. 1703–1719.
- Jennings A. Development of an ICCG algorithm for large sparse systems // In: Evans D.J. (Ed.), Preconditioned methods. Theory and Applications. Gordon and Breach: Science Publishers, Inc., 1983. Pp. 425–438.
- 16. George A., Liu J.W.H. The evolution of the minimum degree ordering algorithm // SIAM Review. 1989. Vol. 31. No.1. Pp. 1–19.
- 17. METIS Serial graph partitioning and fill-reducing matrix ordering. [Электронный ресурс]. URL: http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview (дата обращения: 29.04.2012).
- 18. Karypis G., Kumar V. METIS: unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system // Technical report. Department of Computer Science, University of Minnesota, Minneapolis. 1995.
- 19. Karypis G., Kumar V. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs // Technical Report TR 95-035. Department of Computer Science, University of Minnesota, Minneapolis. 1995.
- 20. Fialko S. Parallel sparse incomplete Cholesky conjugate gradient solver for multi-core computers // In book of abstracts of the 38<sup>th</sup> Solid Mechanics Conference Warsaw, Poland, August 27 31, 2012. Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences. Warsaw, 2012. Pp. 50–51.

\*Сергей Юрьевич Фиалко, г. Краков, Польша Тел. моб.: +48 510693187; эл. почта: sfialko@riad.pk.edu.pl

© Фиалко С.Ю., 2013



# Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Инженерно-строительный институт



# Магистратура по направлениям «Строительство» и «Природообустройство и водопользование»

### Что такое магистратура?

- Фундаментальное профессиональное образование
- Получение специализированных знаний в рамках направления
- Подготовка к научно-исследовательской или педагогической деятельности
- Получение квалификации, признанной во всем мире
- Возможность дальнейшего обучения в аспирантуре и получения ученой степени



# Условия поступления и обучения

- ✓ На обучение принимаются лица, имеющие высшее образование (квалификация «бакалавр», «специалист» или «магистр»)
- ✓ Документы принимаются в период работы приемной комиссии ФГБОУ ВПО «СПбГПУ»
- ✓ Зачисление проходит на конкурсной основе по результатам междисциплинарного экзамена в объеме требований ФГОС ВПО по направлению подготовки
- ✓ Обучение проходит в течение 2 лет
- ✓ Обучение проходит на бюджетной или контрактной основе
- ✓ Обучение проходит по очной или заочной форме



# Особенности обучения на инженерно-строительном факультете:

- фундаментальность образования Политехнического университета
- научная школа, проверенная временем в 2007 г. факультету исполнилось 100 лет
- широкий выбор самых актуальных специальностей
- индивидуальная работа с каждым студентом, включающая активную научно-исследовательскую работу и опыт педагогической деятельности;
- регулярное участие магистров в семинарах, конференциях, научных форумах;
- ориентация учебного процесса на применение современных компьютерных технологий;
- постоянное общение с представителями ведущих строительных и проектных организаций.

Магистерская программа	Кафедра
Теория и практика организационно-технологических и экономических решений в	СУЗИС
строительстве	
Морские гидротехнические сооружения и сооружения водных путей	ВИГС
Речное и гидротехническое строительство	ВИГС
Проектирование, строительство, управление и экспертиза объектов недвижимости в	ВИГС
энергетике и водном хозяйстве	
Теория и проектирование зданий и сооружений	СМИСК
Организация и управление инвестиционно-строительными проектами	СУЗИС
Теория и методы компьютерного моделирования в расчетах сооружений	CMNCK
Строительство объектов ландшафтной архитектуры	ВИГС
Техническая эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений	CMNCK
Автоматизированное проектирование зданий и сооружений	САЗИС
Инженерные системы зданий и сооружений	СУЗИС
Ландшафтное обустройство территории	ВИГС
New! Civil engineering (на англ. яз.)	СУЗИС

#### Контакты