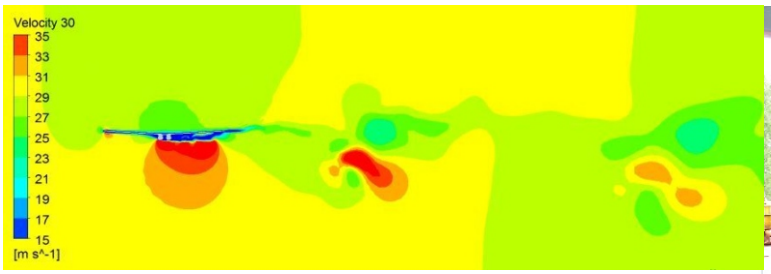
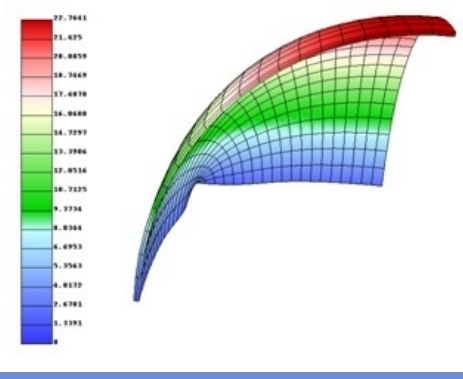
ISSN 2071-4726

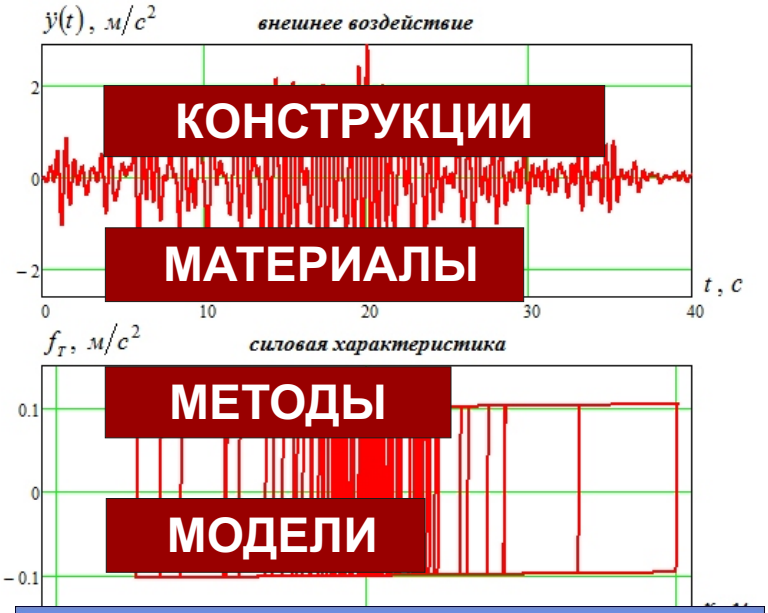
Инженерно-строительный журнал

научно-прикладное издание

№9(44) декабрь 2013





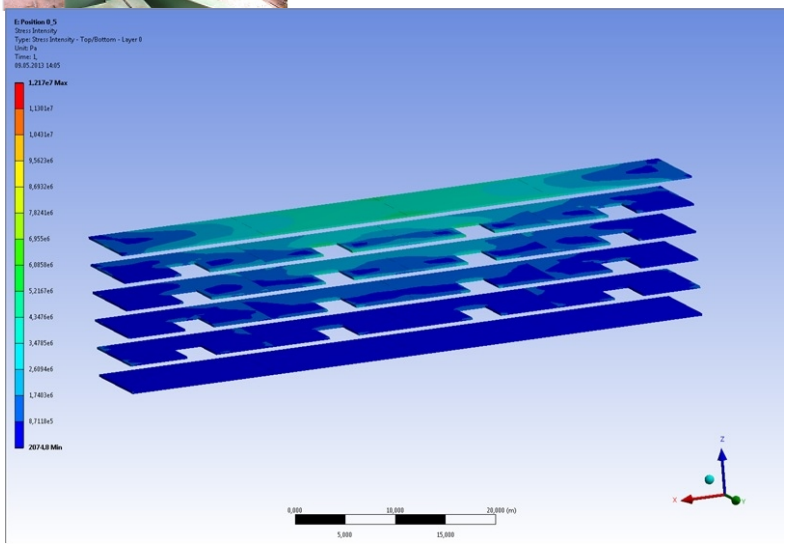


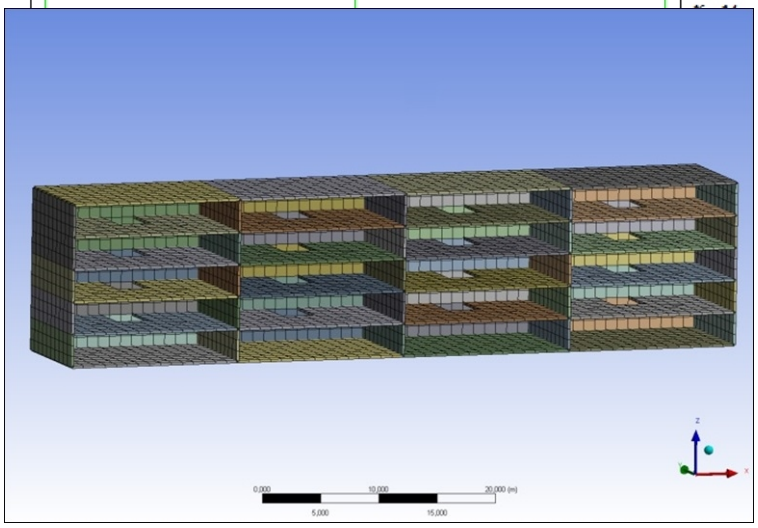
КОНСТРУКЦИИ

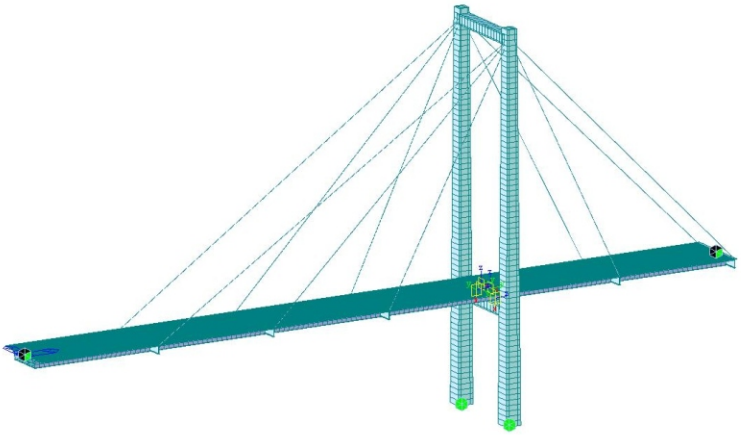
МАТЕРИАЛЫ

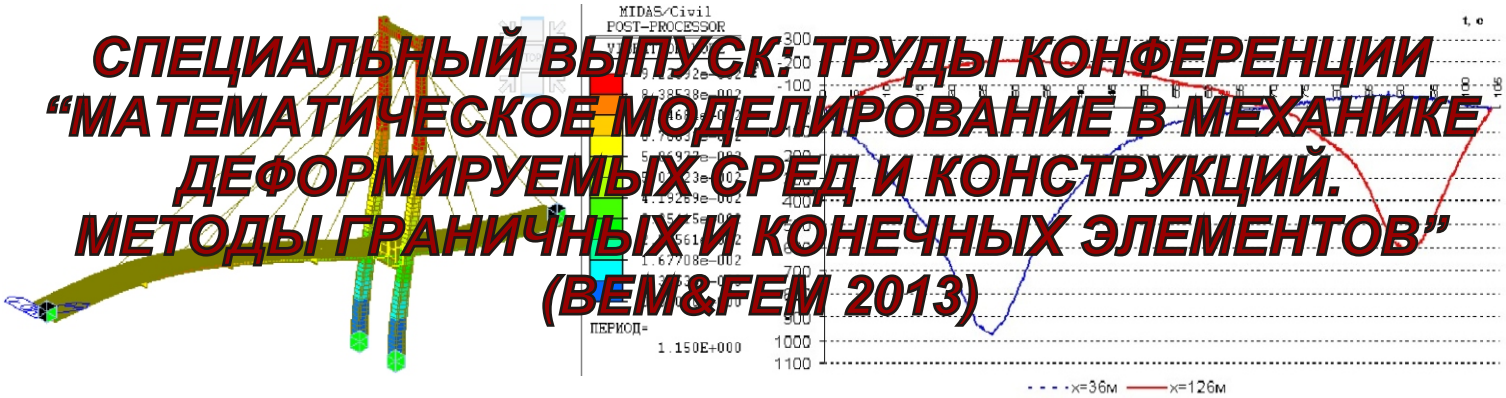
МЕТОДЫ

МОДЕЛИ









СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК: ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ “МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД И КОНСТРУКЦИЙ. МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ” (BEM&FEM 2013)

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ 1899 государственный ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Инженерно-строительный институт
Курсы повышения квалификации и профессиональной переподготовки

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
тел/факс: 552-94-60, www.stroikursi.spbstu.ru,
stroikursi@mail.ru

Приглашает специалистов организаций, вступающих в СРО, на курсы повышения квалификации (72 часа)

Код	Наименование программы	Виды работ*
Курсы по строительству		
БС-01-04	«Безопасность и качество выполнения общестроительных работ»	**п.1,2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14**
БС-01	«Безопасность и качество выполнения геодезических, подготовительных и земляных работ, устройства оснований и фундаментов»	**1,2,3,5**
БС-02	«Безопасность и качество возведения бетонных и железобетонных конструкций»	**6,7**
БС-03	«Безопасность и качество возведения металлических, каменных и деревянных конструкций»	**9,10,11**
БС-04	«Безопасность и качество выполнения фасадных работ, устройства кровель, защиты строительных конструкций, трубопроводов и оборудования»	**12,13,14**
БС-05	«Безопасность и качество устройства инженерных сетей и систем»	**15,16,17,18,19**
БС-06	«Безопасность и качество устройства электрических сетей и линий связи»	**20,21**
БС-08	«Безопасность и качество выполнения монтажных и пусконаладочных работ»	**23,24**
БС-12	«Безопасность и качество устройства мостов, эстакад и путепроводов»	**29**
БС-13	«Безопасность и качество выполнения гидротехнических, водолазных работ»	**30**
БС-14	«Безопасность и качество устройства промышленных печей и дымовых труб»	**31**
БС-15	«Осуществление строительного контроля»	**32**
БС-16	«Организация строительства, реконструкции и капитального ремонта. Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика»	**33**
Курсы по проектированию		
БП-01	«Разработка схемы планировочной организации земельного участка, архитектурных решений, мероприятий по обеспечению доступа маломобильных групп населения»	**1,2,11**
БП-02	«Разработка конструктивных и объемно-планировочных решений зданий и сооружений»	**3**
БП-03	«Проектирование внутренних сетей инженерно-технического обеспечения»	**4**
БП-04	«Проектирование наружных сетей инженерно-технического обеспечения»	**5**
БП-05	«Разработка технологических решений при проектировании зданий и сооружений»	**6**
БП-06	«Разработка специальных разделов проектной документации»	**7**
БП-07	«Разработка проектов организации строительства»	**8**
БП-08	«Проектные решения по охране окружающей среды»	**9**
БП-09	«Проектные решения по обеспечению пожарной безопасности»	**10**
БП-10	«Обследование строительных конструкций и грунтов основания зданий и сооружений»	**12**
БП-11	«Организация проектных работ. Выполнение функций генерального проектировщика»	**13**
Э-01	«Проведение энергетических обследований с целью повышения энергетической эффективности и энергосбережения»	
Курсы по инженерным изысканиям		
И-01	«Инженерно-геодезические изыскания в строительстве»	**1**
И-02	«Инженерно-геологические изыскания в строительстве»	**2,5**
И-03	«Инженерно-гидрометеорологические изыскания в строительстве»	**3**
И-04	«Инженерно-экологические изыскания в строительстве»	**4**
И-05	«Организация работ по инженерным изысканиям»	**7**

***(согласно приказам Минрегионразвития РФ N 624 от 30 декабря 2009 г.)**

По окончании курса слушателю выдается удостоверение о краткосрочном повышении квалификации установленного образца (72 ак. часа)

Для регистрации на курс необходимо выслать заявку на участие, и копию диплома об образовании по телефону/факсу: 8(812) 552-94-60, 535-79-92, , e-mail: stroikursi@mail.ru.

Http://www.engstroy.spb.ru – полнотекстовая версия журнала в сети Интернет. Бесплатный доступ, обновление с каждым новым выпуском

Инженерно-строительный журнал
научно-прикладное издание

ISSN 2071-4726

Свидетельство о государственной регистрации: ПИ №ФС77-38070, выдано Роскомнадзором

Специализированный научный журнал. Выходит с 09.2008.

Включен в Перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ

Периодичность: 8 раз в год

Учредитель и издатель:

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Адрес редакции:

195251, СПб, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 227А

Установочный тираж 1000 экз.

Подписано в печать 31.12.13
Формат 60x84/8, усл. печ. л. 10,5.
Заказ №0150

Отпечатано в типографии СПбГПУ.
СПб, ул. Политехническая, д. 29

Содержание

МОДЕЛИ

Мелешко В.А., Хертек У.Х., Роговой Ю.А. Определение аэродинамических параметров навеса вокзала «Олимпийский парк». Физический и численный эксперименты 4

Воробьев А.В., Кашеварова Г.Г. Адаптивные модели краткосрочного прогноза оседания земной поверхности и определение наиболее неблагоприятного положения здания в мульде сдвижения 10

КОНСТРУКЦИИ

Серпик И.Н., Алексейцев А.В. Оптимизация рамных конструкций с учетом возможности запроектных воздействий 23

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы 30

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Коррозионный рост трещин и усталостная прочность сложных технических систем 42

МЕТОДЫ

Ковалева Н.В. Учет малоцикловой усталости при оптимизации параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции 49

Кадисов Г.М., Чернышов В.В. Конечно-элементное моделирование динамики мостов при воздействии подвижной нагрузки 56

Султанов Л.У., Давыдов Р.Л. Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов 64

МАТЕРИАЛЫ

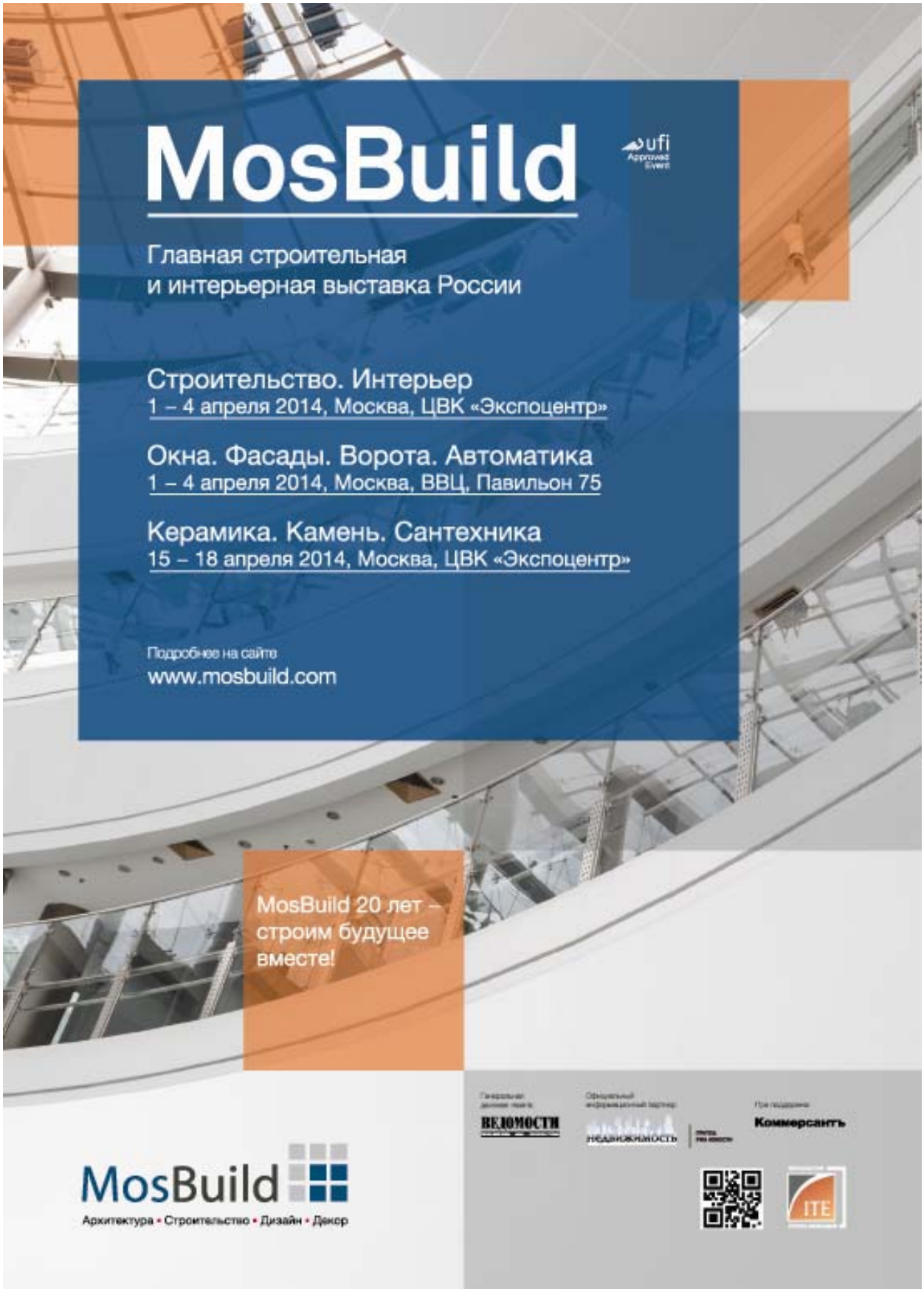
Султанов Л.У., Фахрутдинов Л.Р. Численное исследование гиперупругих материалов 69

Горшков А.С., Макаров А.Г., Романова А.А., Рымкевич П.П. Моделирование деформационных процессов ориентированных полимеров на основе описания кинетики надмолекулярных структур, разделенных энергетическими барьерами 75

На обложке: иллюстрации авторов к статьям номера

Контакты:

Тел. +7(812)535-52-47 E-mail: engstroy@inbox.ru Web: Http://www.engstroy.spb.ru


MosBuild
ufi
Approved Event
Главная строительная
и интерьерная выставка России
Строительство. Интерьер
1 – 4 апреля 2014, Москва, ЦВК «Экспоцентр»
Окна. Фасады. Ворота. Автоматика
1 – 4 апреля 2014, Москва, ВВЦ, Павильон 75
Керамика. Камень. Сантехника
15 – 18 апреля 2014, Москва, ЦВК «Экспоцентр»
Подробнее на сайте
www.mosbuild.com
MosBuild 20 лет –
строим будущее
вместе!
ВЕДОМОСТИ
НЕДВИЖИМОСТЬ
Коммерсантъ
MosBuild
Архитектура • Строительство • Дизайн • Декор
ITE

Определение аэродинамических параметров навеса вокзала «Олимпийский парк». Физический и численный эксперименты

К.т.н., инженер В.А. Мелешко;
аспирант У.Х. Хертек,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»;
к.т.н., с.н.с. Ю.А. Роговой,
ФГУП «Крыловский государственный научный центр»

Аннотация. В данной статье рассмотрены результаты экспериментального и численного моделирования обтекания макета навесов здания вокзала «Олимпийский парк». Представлены результаты экспериментального исследования макета навесов вокзала.

При численных расчетах применена программа ANSYS CFX для моделирования течения воздуха и определения аэродинамических параметров. С использованием модели турбулентности SST решены уравнения Навье – Стокса. Дополнительно с помощью метода отсоединенных вихрей DES был проведен аэродинамический анализ.

В результате сравнения экспериментальных значений аэродинамических параметров моделей с численным экспериментом в программе ANSYS CFX было получено удовлетворительное соответствие.

Ключевые слова: навес вокзала; аэродинамическая труба; срыв вихрей; аэродинамические параметры; модели турбулентности

Введение

В настоящее время в практике проектирования различных элементов современных зданий и сооружений, навесов, а также фасадов зданий для учета аэродинамических нагрузок, действующих на указанные конструкции, все чаще применяются расчетные методы, основанные на использовании пакетов прикладных программ, таких как ANSYS CFX [1–8]. Это связано с большой стоимостью, сложностью постановки и проведения экспериментов на моделях в аэродинамических трубах для получения нагрузок, действующих на различные конструкции при наличии потока воздуха. Однако методика, позволяющая эффективно использовать программные средства и вычислительные технологии для исследования аэроупругих процессов в сооружениях, пока не разработана.

В данной статье рассматривается задача о возможности исследования аэроупругих колебаний математическими средствами. Такая проблема рассматривалась ранее в работах [3–5, 9, 10]. Сравнения экспериментальных данных с результатами расчета по ПК ANSYS CFX носили косвенный характер.

В статье проведено сравнение экспериментальных данных с результатами расчета в ANSYS CFX, выполнено прямое сравнение физического и математического экспериментов. Новый подход позволил получить удовлетворительные результаты, что подтверждается экспериментом.

Физический эксперимент

В аэродинамической трубе Крыловского государственного научного центра был проведен эксперимент для определения аэродинамических параметров, визуализации течения и исследования аэроупругих колебаний элементов навесов здания вокзала «Олимпийский парк» (рис. 1) [11]. Однако эти исследования имеют более общий характер, так как подобного рода аэроупругие процессы возможны в самых различных элементах современных зданий и сооружений, а также фасадов зданий. Навесы и козырьки являются архитектурными элементами фасада здания, имеющими эстетическую функцию, кроме того, они несут в себе практический смысл, защищая здание от атмосферных осадков и других погодных воздействий.

Экспериментальные исследования проводились в дозвуковой аэродинамической трубе замкнутого типа с открытой рабочей частью, имеющей эллиптическое сечение размерами 4 × 2,3 м. Длина рабочей части трубы составляет 4 м. Максимальная скорость потока достигает 70 м/с.

Рисунок 1. Макет здания вокзала в аэродинамической трубе

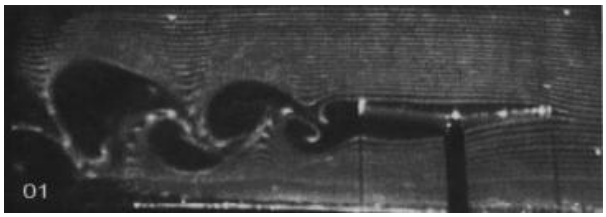


Рисунок 2. Течение вокруг навеса

В ходе экспериментов в рабочей части аэродинамической трубы располагаются модели, а также горизонтальный экран, имитирующий земную поверхность [12–14]. Для проведения экспериментальных исследований были изготовлены геометрически подобные серии моделей навесов, соответствующие различным сечениям системы навесов над платформами вокзала в масштабе 1:100, и модели навесов для проведения испытаний в гидродинамической трубе. Исследования по определению аэродинамических параметров зданий и сооружений обладают свойством автомодельности (число Re не моделируется, т. к. модели являются плохообтекаемыми телами, у которых точки отрыва потока соответствуют натуре) [11].

В результате эксперимента были найдены коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы. Также было установлено, что с поверхности навесов срываются вихри в периодическом порядке. Периодический срыв вихрей может вызвать появление переменных составляющих вертикальной силы и момента, которые будут действовать на поверхности навеса. Если частота срыва вихрей будет совпадать с частотами собственных колебаний навесов, то возникнет резонанс, который представляет опасность для конструкции [15–18]. На рисунке 2 представлен фрагмент схода вихрей.

Численный эксперимент

Наряду с экспериментальными исследованиями был проведен численный эксперимент в программе вычислительной гидродинамики ANSYS CFX.

Для определения аэродинамических параметров сооружения также применяются программы вычислительной гидродинамики CFD, основанные на численном решении систем уравнений движения жидкости/газа Навье – Стокса и предназначенные для решения широкого круга задач прикладной аэрогидродинамики и теплообмена. Применение пакетов такого уровня в практике строительных расчетов еще только начинается, поскольку они очень сложны и для их эффективного использования требуется длительный опыт и высокая квалификация пользователей.

В настоящее время применяются методы, основанные на использовании моделей турбулентности. Эти модели специально разработаны, чтобы учесть эффекты турбулентности без применения точной сетки и прямого численного решения.

Большинство методов основано на применении статистических моделей турбулентности для решения уравнений Рейнольдса – Навье – Стокса RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes equations). Исключения составляют LES (Large Eddy Simulation) и DES (Detached Eddy Simulation) методы.

Метод LES (Large Eddy Simulation) разработан для расчета крупномасштабных флуктуаций. Он основан на решении нестационарных уравнений Навье – Стокса с использованием модели турбулентности для описания мелкомасштабных движений подсеточного масштаба. В ANSYS CFX для описания мелкомасштабных движений применяется модель Смагоринского [19] с двумя различными пристенными функциями демпфирования.

Метод DES (Detached Eddy Simulation) является комбинацией LES и RANS. В зоне внешнего «гладкого» течения используется RANS, а в зоне отрыва потока с крупными вихрями – LES. По сравнению с методом LES, DES сохраняет порядок величины компьютерной мощности для течений с высоким числом Рейнольдса из-за умеренных затрат модели RANS в пограничном слое.

Для моделирования течения в численном эксперименте была использована замыкающая уравнения RANS модель турбулентности Ментера SST. Для расчета в CFX была построена конечно-элементная модель среды [19, 20]. Среда расположена в канале прямоугольного сечения с гладкими стенками. В центре среды расположен контур обтекаемого навеса. На поверхности навеса был сгенерирован пограничный слой, толщину которого определяют по формуле [21]:

$$\delta = 0.035 \cdot L \cdot \mathrm{Re}_L^{-\frac{1}{7}}, \tag{1}$$

где L – поперечный размер, м;

Re – число Рейнольдса.

Число Рейнольдса определено по формуле [17]:

$$\mathrm{Re} = \rho \cdot \frac{U \cdot L}{\mu} = \frac{U \cdot L}{\nu}, \tag{2}$$

где ρ – плотность воздуха, кг/м^3;

U – скорость потока, м/с;

L – характерный размер, м;

μ – вязкость воздуха, кг/(м·с);

ν – его кинематическая вязкость;

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{3}$$

Пограничный слой был разрезан на 12 подслоев, количество конечных элементов составило 35000 (рис. 3).

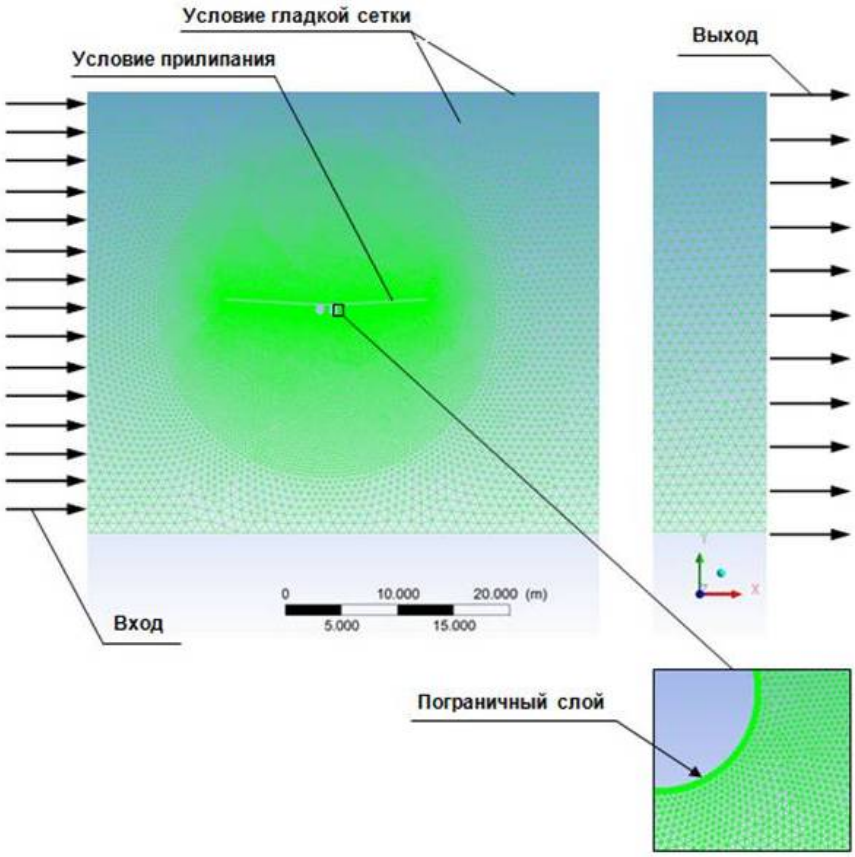


Рисунок 3. Конечно-элементная модель

Для модели турбулентности Ментера (SST) с пристеночной функцией Automatic Near-Wall Treatment необходимо выполнить условие $Y+ < 200$, где $Y+$ – безразмерное расстояние от стенки до первого узла конечно-объемной сетки [21–23]. Применение пристенных функций позволяет получать решение на относительно грубых сетках. Этот параметр позволяет оценить сеточное разрешение в пограничном слое [21]. Безразмерный параметр $Y+$ составил 0.49.

Задача была решена в нестационарном режиме (Transient) на временном интервале 20 с.

В модели были приняты следующие граничные условия:

- на входе в расчетную область задана скорость потока U, интенсивность турбулентных пульсаций I, масштаб турбулентности l_t;
- на выходе из расчетной области – условие постоянства давления $p = p_\infty$;
- на нижней, верхней и внешних боковых границах – условие аэродинамической гладкой стенки (вектор скорости параллелен боковой границе расчетной области);
- на внутренней границе – условие прилипания (нулевая скорость).

Начальные условия для численного расчета сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Начальные условия

Скорость ветрового потока U, м/с	30
Интенсивность турбулентности I, %	1
Масштаб турбулентности l_t, м	0,1 D

В результате расчета были получены аэродинамические коэффициенты C_x и C_y (рис. 4).

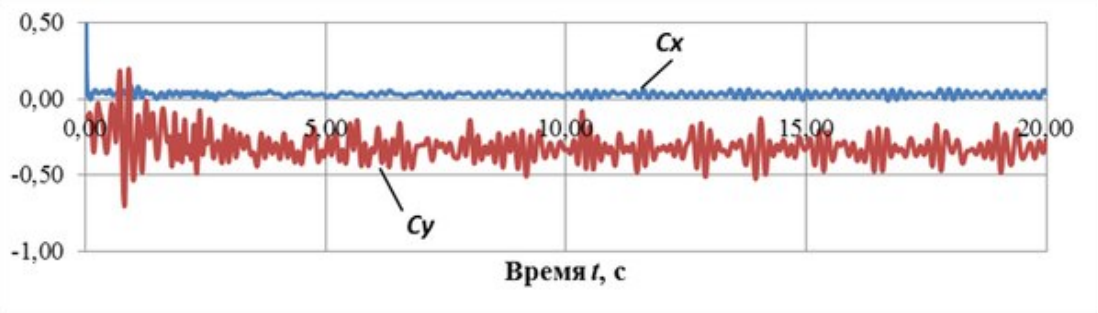


Рисунок 4. Графики изменения аэродинамических коэффициентов

По графику видно частое периодическое изменение коэффициента подъемной силы, это связано с неустойчивым решением дифференциальных уравнений.

Для получения устойчивого решения требуется выполнить условие Куранта – Фридрихса – Леви (КФЛ) [24, 25]:

$$C = u \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1, \tag{4}$$

где u – скорость, м/с;

Δt – временной шаг, с;

Δx – пространственный шаг, м.

Для выполнения этого условия в ANSYS CFX предусмотрена возможность установки адаптивного шага в соответствии с критерием КФЛ, с указанием минимального и максимального шага по времени и коэффициентов релаксации [26].

Чтобы точнее определить аэродинамические параметры, был проведен дополнительный расчет в CFX с использованием метода отсоединенных вихрей DES [27, 28]. Результаты расчета показаны на рисунках 5, 6 для DES.

По графику среднее значение $C_y = 0{,}44$, а $C_x = 0{,}19$, что согласуется с физическим экспериментом. Сравнение физического эксперимента и численного расчета в CFX приведено в таблице 2. Как видно из таблицы, соответствие расчетных и экспериментальных значений удовлетворительное.

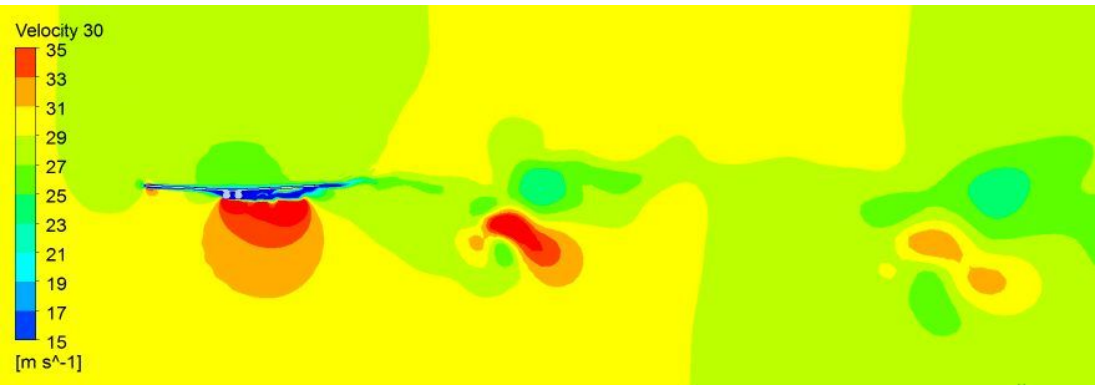


Рисунок 5. Течение вокруг модели навеса

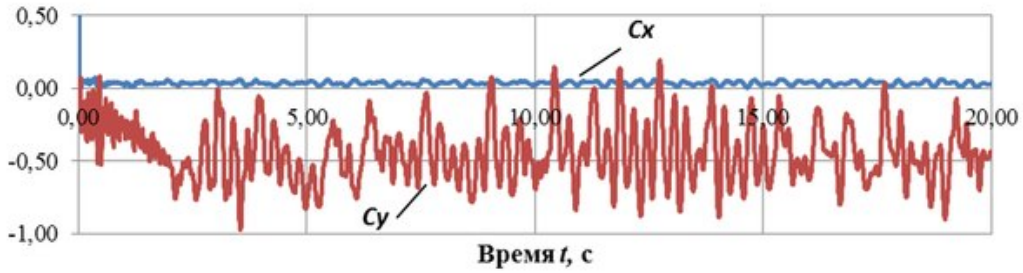


Рисунок 6. Графики изменения аэродинамических коэффициентов

Таблица 2. Сравнение физического эксперимента и численного расчета

Параметр	Физический эксперимент	CFX	Δ, %
C_x	0,125	0,19	34
C_y	0,436	0,44	1

Выводы

1. Предлагаемая методика численного анализа может быть использована для определения аэродинамических параметров не только навесов, но и аналогичных конструкций.

2. Методика позволяет учитывать при проектировании возможность появления критических скоростей ветра и резонансных явлений в навесах.

3. В результате сравнения экспериментальных значений аэродинамических параметров моделей навеса вокзала с численным анализом было получено удовлетворительное совпадение.

4. Предлагаемая методика численного анализа аэроупругих процессов позволяет уменьшить временные ресурсы на проектный анализ, дает требуемую точность расчета, а также сокращает стоимость проектных работ за счет использования современных вычислительных средств вместо дорогостоящих экспериментов в аэродинамических трубах.

Литература

1. Гувернюк С.В., Гагарин В.Г. Компьютерное моделирование аэродинамических воздействий на элементы ограждений высотных зданий. Часть 1 // АВОК. 2006. №8. С. 18–24.
2. Дубинский С.И. Расчеты высотных сооружений при ветровом воздействии // САПР и графика. 2005. №10. С. 32–34.
3. Рутман Ю.Л., Мелешко В.А. Применение программы ANSYS CFX для определения коэффициентов лобового сопротивления высотных сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2011. №1. С. 45–46.
4. Рутман Ю.Л., Мелешко В.А. Причины колебаний моста в Волгограде // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №3. С. 55–58.
5. Рутман Ю.Л., Мелешко В.А. Оценка сооружений на возникновение галопирования // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 6–12.

6. Ching-Wen C., Jing-Jong J. Case study of wind-resistant design and analysis of high mast structures based on different wind codes // Journal of Marine Science and Technology. 2008. Vol. 16. No.4. Pp. 275–287.
7. Letchford C.W. Wind Loads on Rectangular Signboards and Hoardings // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2001. Vol. 89. Pp. 135–151.
8. Yin Zhou, Kijewski T., Kareem A. Along-Wind Load Effects on Tall Buildings: Comparative Study of Major International Codes and Standards // Journal of structural engineering. 2002. Vol. 128. Issue 6. Pp. 788–796.
9. Hansen S. Vortex-induced vibrations of line-like structures // Structural Engineers World Congress 2007, November 2–7. 2007. Vol. 15. No.1. Pp. 15–23.
10. Giosan I., Eng P. Vortex Shedding Induced Load on Loads on Free Standing Structures [Электронный ресурс]. URL: http://www.wceng-fea.com/vortex_shedding.pdf (дата обращения 20.11.2013).
11. Отчет о научно-исследовательской работе. Исследование аэродинамических характеристик макета здания вокзала «Олимпийский парк» / ГНЦ РФ ФГУП «ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова». СПб., 2011. С. 75.
12. Пэнкхёрст Р., Холдер Д. Техника эксперимента в аэродинамических трубах / Пер. с англ. Под ред. С.Г. Попова. М.: Изд. иностр. лит., 1955. 668 с.
13. Pereira J.D. Wind Tunnels: Aerodynamics, Models and Experiments. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2011. 227 p.
14. Cunff C. Le, Biolley F., Fontaine E., Etienne S., Facchinetti M. L. Vortex – Induced Vibrations of Risers: Theoretical, Numerical and Experimental Investigation // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP. 2002. Vol. 57. No.1. Pp. 59–69.
15. Johari H., Desabrais K. Vortex shedding in the near wake of a parachute canopy // Journal of Fluid Mechanics. 2005. Vol. 536. Pp. 185–207.
16. Ланда П. С. Срывной флаттер и эффект затягивания // Вестник научно-технического развития. 2009. №6(22). С. 10–19.
17. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействия ветра на здания и сооружения / Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1984. 360 с.
18. ЗАО «Конби». Определение среднего ветрового давления [Электронный ресурс]. URL: http://conbi.ru/index_1.htm (дата обращения 20.11.2013).
19. User's Guide for ANSYS CFX 12. 2013.
20. Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений. СПб.: БГТУ, 2001. 108 с.
21. User's Guide for ANSYS CFX 12. 2008.
22. ANSYS CFX-Solver Theory Guide. Canonsburg: ANSYS, Ing., 2009. 257 p.
23. МКЭ. Сетки. Общие сведения [Электронный ресурс]. URL: http://www.procae.ru/articles/24/72.html (дата обращения 01.10.2013).
24. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD. Monreal: DCW Industries, Inc., 2006. 522 p.
25. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / Пер. с англ.: В 2-х т. Т. 1. Под ред. В.П. Шидловского. М.: Мир, 1991. 504 с.
26. Коньшин В., Щеляев А. Новые возможности проектирования и инженерного анализа в системе ANSYS CFX версии 10.0 [Электронный ресурс]. URL: http://www.sapr.ru/Article.aspx?id=14599 (дата обращения 06.10.2013).
27. Методическое руководство по ANSYS CFX 12.1.2010.
28. Menter F.R. Advances in Turbulence Modeling of Unsteady Flows [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://www.dansis.dk/Filarkiv/pdf-filer/2009/3/03%20Florien_Menter_DANSIS2009.pdf (дата обращения 15.11.2013).

Владимир Аркадьевич Мелешко, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)748-07-16; эл. почта: vl-meleshko@yandex.ru

Урана Хойтпак-ооловна Хертек, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)379-24-32; эл. почта: urana_hertek@mail.ru

Юрий Алексеевич Роговой, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(931)310-39-03; эл. почта: spbrog@mail.ru

Адаптивные модели краткосрочного прогноза оседания земной поверхности и определение наиболее неблагоприятного положения здания в мульде сдвижения

Аспирант А.В. Воробьев;
Д.ф.-м.н., зав. кафедрой Г.Г. Кашеварова,
ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Аннотация. Для оценки механической безопасности и возможности дальнейшей эксплуатации зданий, расположенных на подработанной территории, требуется прогноз оседаний земной поверхности. Процесс оседания земной поверхности изучается путем применения адаптивных моделей краткосрочного прогнозирования временных рядов. Цель адаптивных методов прогнозирования заключается в построении самонастраивающихся математических моделей, которые способны отражать изменяющиеся во времени условия и давать достаточно точные оценки будущих членов данного ряда. Такие модели предназначаются, прежде всего, для краткосрочного прогнозирования.

Выбор подходящей модели прогнозирования осуществлен на основе сравнения прогнозных значений с натурными данными по оседаниям контрольных реперов. Из анализа результатов моделирования следует, что наиболее близким по значению к фактической величине оседания является результат прогноза с использованием модели Хольта.

Выполнен ряд численных экспериментов, в результате которых установлено наименее благоприятное положение пятиэтажного панельного здания в мульде сдвижения, а также определено напряженно-деформированное состояние типовой секции панельного здания. Результаты численных экспериментов подтверждаются данными обследований.

Ключевые слова: адаптивная модель прогнозирования; подработанная территория; оседание поверхности; мульда сдвижения; метод конечных элементов

Введение

Задачу прогнозирования различных социально-экономических процессов решает практически каждый экономист вне зависимости от области его исследования. Но в настоящее время в России остро стоит проблема предупреждения чрезвычайных ситуаций, ежегодно наносящих серьезный экономический ущерб многим регионам. Появились работы, посвященные прогнозу возникновения чрезвычайных ситуаций путем постоянного наблюдения и анализа их параметров [1–6].

Для Пермского края особенно актуальной является тема эксплуатации зданий и сооружений на подработанной территории. В результате добычи полезных ископаемых жилая и промышленная застройка отдельных населенных пунктов оказалась подработана горными работами. Проблемами подработанной территории занимаются сотрудники Пермского национального исследовательского университета в сотрудничестве с ОАО «Галургия» (г. Пермь) [7–10]. Характер напряженно-деформированного состояния грунтового массива рассматривается в работах российских авторов [10–13] и в коллективной работе сотрудников университетов Китая [14]. За оседаниями городских территорий в Индонезии ведется наблюдение при помощи GPS технологий [15]. Аварийным ситуациям, возникающим в результате выработки соляных месторождений, посвящена работа сотрудников Китайской академии наук [16].

Для оценки механической безопасности и возможности дальнейшей эксплуатации жилых и административных зданий, оказавшихся в потенциально опасной зоне подработанной территории, требуется прогноз процесса деформирования грунтового массива и сроков введения мер охраны для каждого из этих зданий [17]. При сдвижении земной поверхности основными показателями, позволяющими прогнозировать и оценивать состояние зданий и сооружений, являются: оседание земной поверхности η, радиус кривизны R и горизонтальные деформации земной поверхности ε в основаниях зданий [7, 18].

В режиме реального времени проводился мониторинг для определения характера и динамики развития деформаций зданий, для выявления наиболее опасных мест и узлов, оценки развития повреждений и принятия соответствующих мер по проведению срочных противоаварийных мероприятий [7]. Отмечается общая динамика деформаций наблюдаемых

объектов, расположенных на одной площадке, периоды схожих во времени деформаций разных зданий. Выявлено, что деформации зданий, находящихся приблизительно в одинаковых условиях, происходят совместно с общими деформациями земной поверхности участка подработанной территории, на котором они расположены.

Имеется прогноз ожидаемых деформаций земной поверхности на 20 лет, выполненный в соответствии с нормативной литературой. К сожалению, данный долгосрочный прогноз не всегда соответствует реальности, и существует необходимость в альтернативном подходе. В данной работе предлагается использовать для статистических прогнозов адаптивные модели, применяемые обычно в экономике.

1. Адаптивные методы и модели прогнозирования временных рядов

Адаптивные методы прогнозирования временных рядов представляют собой методы, цель которых заключается в построении самокорректирующихся (самонастраивающихся) математических моделей, способных отражать изменяющиеся во времени условия, учитывать информационную ценность различных членов временной последовательности и давать достаточно точные оценки будущих членов данного ряда. Такие модели предназначаются, прежде всего, для краткосрочного прогнозирования [19, 20].

Процесс прогнозирования, опирающийся на статистические методы, распадается на два этапа. Первый, индуктивный, заключается в обобщении данных, наблюдаемых за более или менее продолжительный период времени, и в представлении соответствующих статистических закономерностей в виде модели. Второй этап, собственно прогноз, является дедуктивным. На этом этапе на основе найденных статистических закономерностей определяют ожидаемое значение прогнозируемого признака [21].

Под прогнозированием мы понимаем научное (т. е. основанное на системе фактов и доказательств, установленных причинно-следственных связей) выявление вероятностных путей и результатов предстоящего развития явлений и процессов, оценку показателей, характеризующих эти явления и процессы для более или менее отдаленного будущего. Таким образом, прогнозирование – это научная деятельность, направленная на выявление и изучение возможных альтернатив будущего развития и структуры его вероятных траекторий. Каждая альтернативная траектория развития связывается с наличием комплекса внешних условий.

Особенностью адаптивных моделей является то, что они способны приспосабливать свою структуру и параметры к изменению внешних условий.

К простейшим адаптивным моделям относятся: *экспоненциальное сглаживание* – модель Брауна и *модели линейного роста*. К моделям линейного роста относятся: модель Хольта; модель линейного роста Брауна – частный случай модели Хольта; модель прогнозирования Дж. Бокса и Г. Дженкинса, в которой в модель Хольта включается разность ошибок [19, 20, 22–24].

Примем к рассмотрению в качестве базовых две модели: модель Брауна и модель Хольта.

Модель Брауна. Главное достоинство этой прогнозной модели состоит в том, что она способна последовательно адаптироваться к новому уровню процесса без значительного реагирования на случайные отклонения.

Недостатком модели является то, что экспоненциальная средняя дает систематическую ошибку, когда временной ряд имеет тенденцию линейного роста [19, 23, 24].

Модель Хольта. Важным моментом при использовании модели Хольта является выбор коэффициентов, которые определяют чувствительность модели. Чувствительная модель быстро реагирует на реальные изменения, а нечувствительная не реагирует на шум и случайные отклонения. Недостатком модели является то, что учитываются лишь линейные тренды и не учитывается сезонность [19, 22].

Модель Хольта – Уинтерса. Эта модель учитывает экспоненциальный тренд и аддитивную сезонность. Учет сезонности крайне важен в рассматриваемой задаче о деформациях земной поверхности, так как увеличение скорости деформаций связано с затоплением подземных выработок, но на данном этапе моделирование натурных данных при помощи комбинированной модели Хольта – Уинтерса не представляется возможным, так как в предоставленной выборке интервал значений не учитывает сезонность. Натурные данные представлены с шагом в один год,

тогда как для реализации модели Хольта – Уинтерса требуются поквартальные либо помесячные данные [19, 25].

При использовании модели прогнозирования временного ряда встает проблема адекватности этой модели. Пусть $\in_t = y_t - \widehat{y}_t$, где y_t – данные, которые уже известны, $\widehat{y}_t$ – прогноз на момент *t*, полученный с помощью некоторой адаптивной модели. Если ошибка $\in_t$ невелика, то есть разница между реальными данными и прогнозом мала, то использование данной модели оправдано.

Для выбора наиболее адекватной модели проведены прогнозные расчеты по данным мониторинга оседаний на подработанной территории Пермского края (рисунок 1). Изолинии суммарных оседаний и горизонтальных деформаций на рассматриваемом участке приведены на рисунках 2 и 3.

Рисунок 1. График перемещений контрольного репера

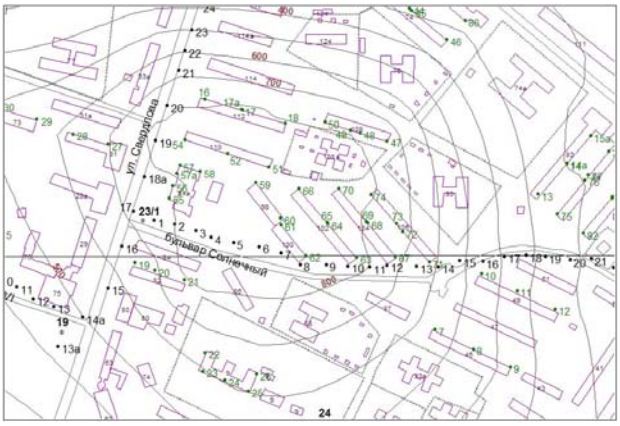


Рисунок 2. План поверхности с изолиниями суммарных оседаний (мм)

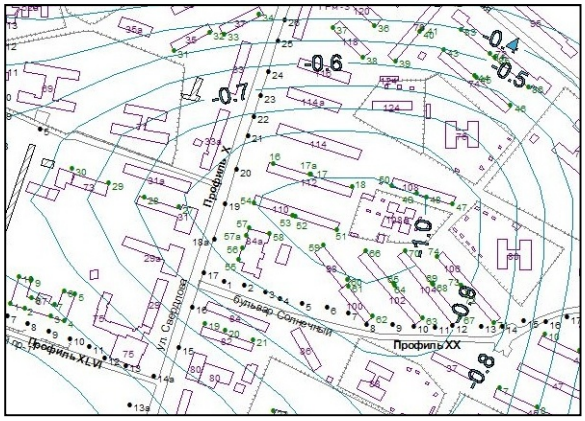


Рисунок 3. План поверхности с изолиниями горизонтальных деформаций (мм/м)

Построим по натурным данным линейные модели Брауна и Хольта.

Все адаптивные модели делятся на два класса: модели скользящего среднего (СС-модели) и авторегрессии (АР-модели).

Согласно схеме скользящего среднего оценкой текущего уровня (наблюдения) является взвешенное среднее всех предшествующих уровней, причем вес (множитель), который отражает информационную ценность наблюдения, тем больше, чем ближе оно находится к текущему уровню. Такие модели хорошо отражают тенденцию, но не позволяют отражать колебания, например, сезонные.

В СС-моделях сглаживание производится с помощью параметра сглаживания, который принимает значения в интервале от 0 до 1. Параметр сглаживания принимает значение больше 0,5 для быстроизменяющихся процессов и меньше 0,5 для относительно стабильных процессов.

Параметр сглаживания *α* для метода Брауна определен методом подбора и принят равным $\alpha = 0{,}57$. В качестве критерия подбора параметра α принято условие минимума суммарной погрешности результатов проверочного прогноза.

Графики натурных и модельных значений оседания земной поверхности за период с 1982 по 2008 годы приведены на рисунке 4.

Для оценки точности построения модели приведен график погрешности модельных значений относительно натурных данных. Погрешность, полученная в результате моделирования, представлена на рисунке 5.

На графике наглядно представлен механизм самонастройки модели. При достаточно обширной выборке погрешность моделирования находится в пределах 5–7%. Модель Хольта более точно описывает натурные данные.

Проверим точность краткосрочных (до пяти лет) прогнозов, выполненных при помощи созданных моделей Брауна и Хольта. Для этого выполним прогноз уже реализованных оседаний по данным 2005–2008 гг. Результаты прогнозирования представлены на рисунке 6. Погрешность результатов прогноза относительно натурных представлена на рисунке 7.

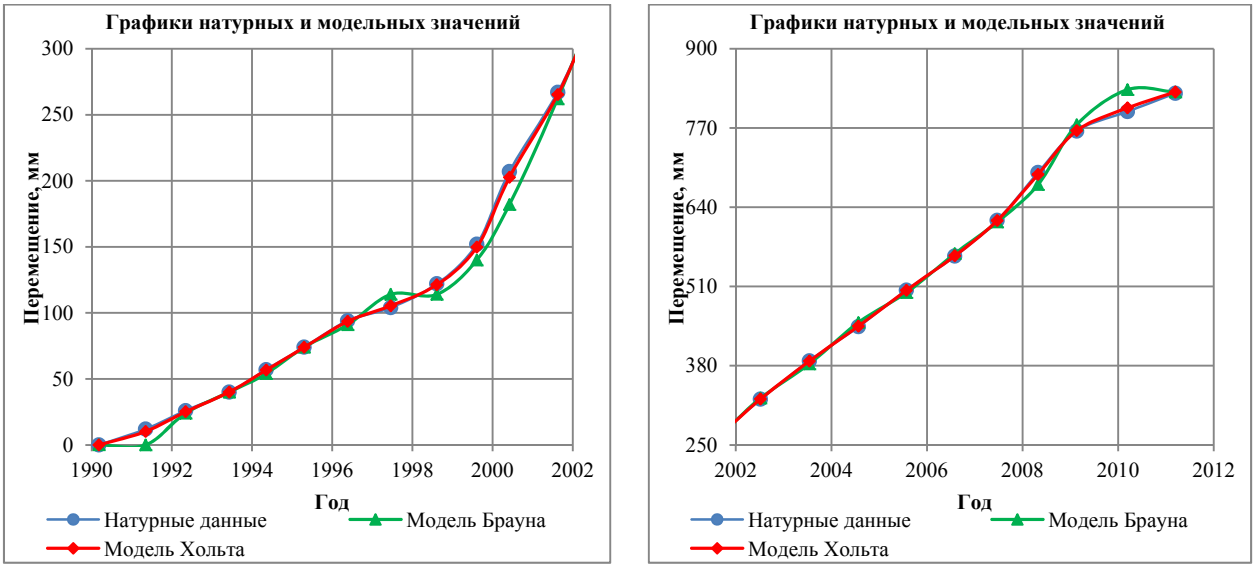


Рисунок 4. Графики натурных и смоделированных значений

Из полученных результатов следует, что модель Хольта более точно аппроксимирует натурные значения при несущественной потере точности прогнозирования в сравнении с методом Брауна. Погрешность четырехлетнего прогноза не превышает 5%.

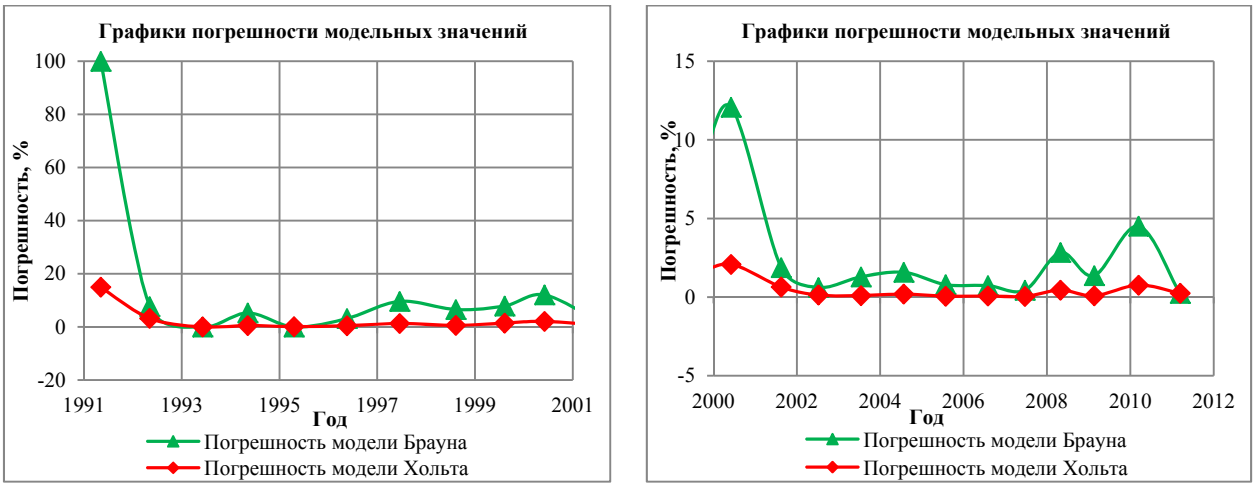


Рисунок 5. Погрешности модельных значений

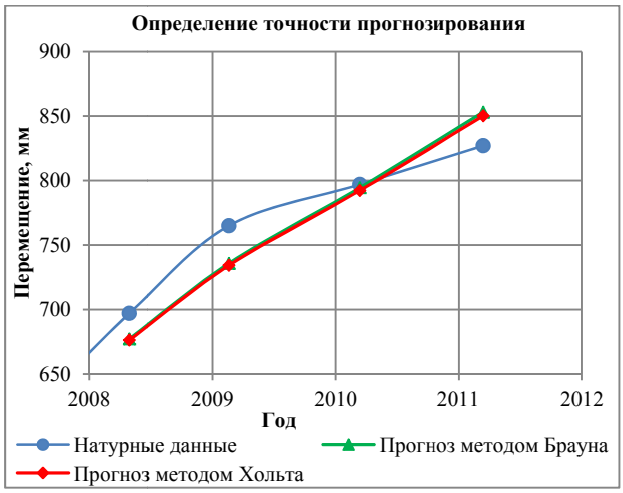


Рисунок 6. Проверочный прогноз реализованных оседаний

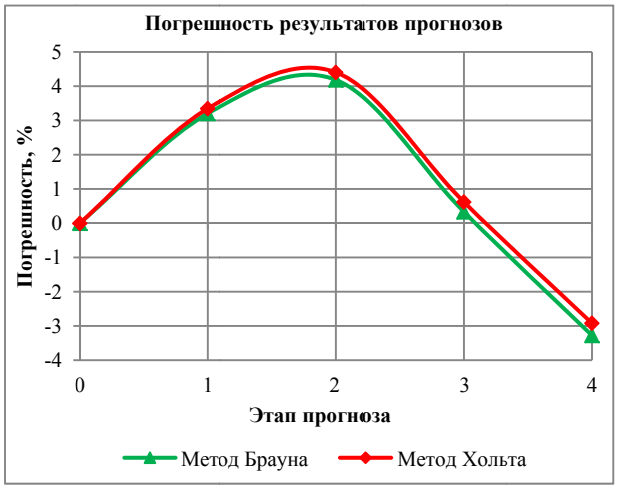


Рисунок 7. Погрешность результатов прогноза

Выполним сравнение результатов прогнозирования, полученных с применением адаптивных моделей Брауна и Хольта, а также вычисленных аналитическим путем, со значением фактически реализовавшихся оседаний для рассматриваемого репера.

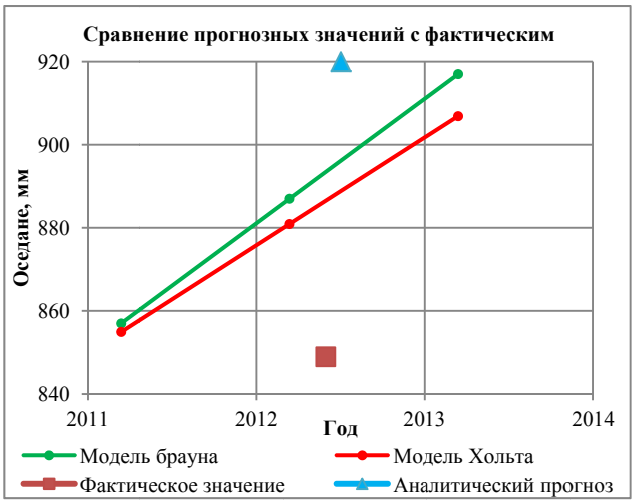


Рисунок 8. Сравнение результатов прогноза с фактическим значением

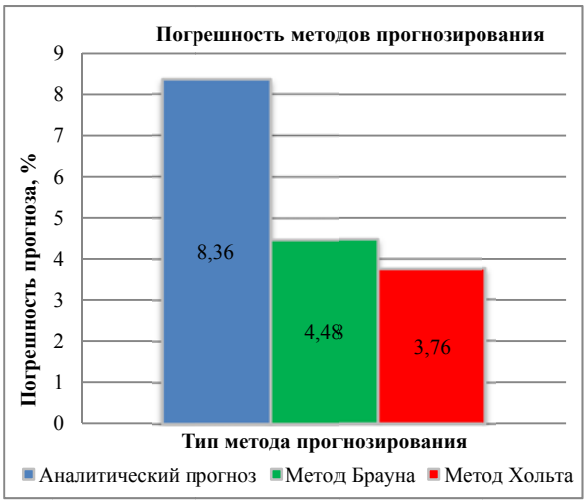


Рисунок 9. Погрешность результатов прогноза

Из анализа полученных графиков видно, что наиболее близким по значению к фактической величине оседания является результат прогноза с использованием модели Хольта. На рисунке 9 приведена диаграмма, отражающая количественное значение погрешностей использованных методов прогнозирования.

На основании полученных результатов заключаем, что использование адаптивных моделей прогнозирования на краткосрочных прогнозах имеет преимущество в точности перед аналитическими методами прогнозирования.

2. Определение наименее благоприятного положения здания в мульде сдвижения

В ходе многолетнего мониторинга состояния жилого фонда установлено, что наиболее чувствительными к деформациям земной поверхности являются панельные здания. Определение наименее благоприятного положения здания в мульде сдвижения произведено на примере жилого пятиэтажного панельного здания.

Общая характеристика объекта. Здание относится к типовой серии 1-468А. Жилой дом имеет пять этажей. Количество подъездов 8. Подвал расположен под всем зданием. Здание крупнопанельное, прямоугольное в плане. Длина здания в крайних осях 120 м, ширина в осях

11 м. Здание поделено деформационным швом на два отсека длиной 60 м. Высота этажей 2,8 м. Высота подвала в среднем составляет 2,2 м. Отметка здания по карнизу крыши составляет +14,500 м. За отметку 0,000 принят уровень чистого пола 1 этажа.

Модель здания выполнена из оболочечных конечных элементов и включает в себя наружные стены и перекрытия. Модель представлена на рисунке 10. Стеновые панели с одной из сторон здания условно не показаны [26].

К модели прикладываются кинематические граничные условия, величина перемещений каждого узла в основании модели определяется исходя из выбранного положения здания в мульде сдвижения.

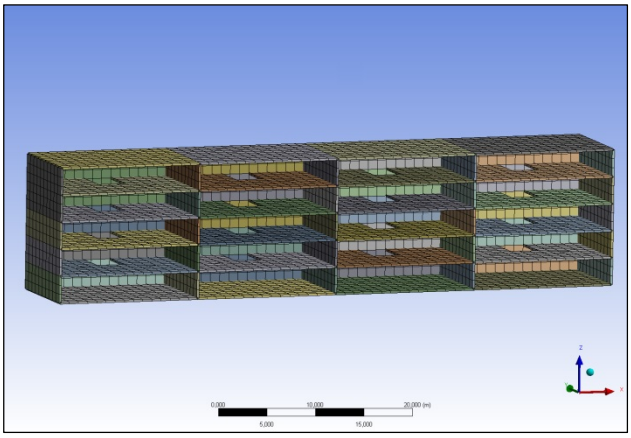


Рисунок 10. Конечно-элементная модель панельного здания

Для качественной оценки мульду сдвижения условно представим поверхностью вращения образованной полупериодом функции косинуса:

$$f(x) = -\frac{h}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) + 1 \right], \quad (1)$$

где h – максимальная величина осадки (в середине мульды);
L – ширина мульды.

В программном комплексе ANSYS выполнен ряд расчетов, моделирующих различное положение здания в мульде оседания. По результатам расчетов составлена таблица 1. В процессе моделирования варьировались следующие параметры: положение здания в мульде оседания и угол поворота продольной оси здания относительно оси X. Рассмотрено пять вариантов положения здания в мульде оседания, расположение характеризуется положением центра здания в плане (см. рисунок 11) от центра мульды до ее края с равными интервалами.

Таблица 1. Максимальные значения интенсивности напряжений, МПа

		Угол поворота продольной оси здания, относительно оси X					
		0°	10°	20°	30°	40°	45°
Положение здания	1	12,17	12,15	12,16	12,16	12,16	12,17
	2	9,54	9,78	10,08	10,40	10,66	10,77
	3	2,02	2,97	4,11	5,32	6,40	6,87
	4	8,20	8,97	9,32	8,96	7,93	7,20
	5	8,83	9,29	9,75	9,55	8,72	8,09

На основании данных таблицы 1 для каждого положения здания относительно плоского дна мульды построим графики изменения интенсивностей напряжений в зависимости от поворота здания и скоростей изменения значений интенсивностей напряжений. Графики представлены на рисунках 12 и 13 соответственно.

Рисунок 11. Положения здания в мульде оседания

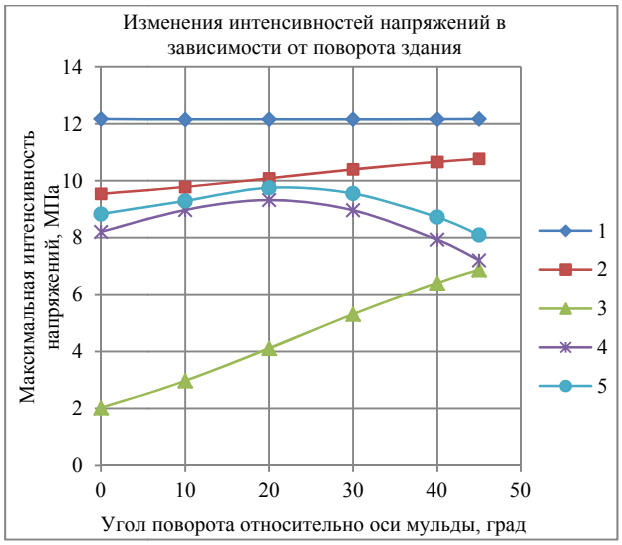


Рисунок 12. Изменение интенсивностей напряжений в зависимости от поворота здания

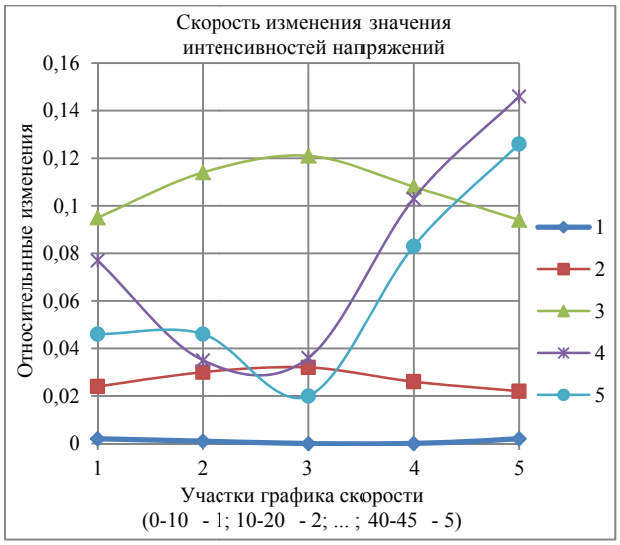


Рисунок 13. Скорости изменения значений интенсивностей напряжений

3. Оценка НДС типовой секции

Рассматриваются объекты типовой застройки – жилые панельные пятиэтажные здания типовой серии 1-468А, построенные в 1960-х гг. Конструктивная схема здания бескаркасная с поперечными несущими стенами и наружными самонесущими панелями. Лестничные марши и площадки сборные железобетонные. Пространственная жесткость и геометрическая неизменяемость зданий обеспечивается продольными вертикальными диафрагмами жесткости, жесткостью поперечных стен и дисков перекрытий [27].

План типовой секции представлен на рисунке 14.

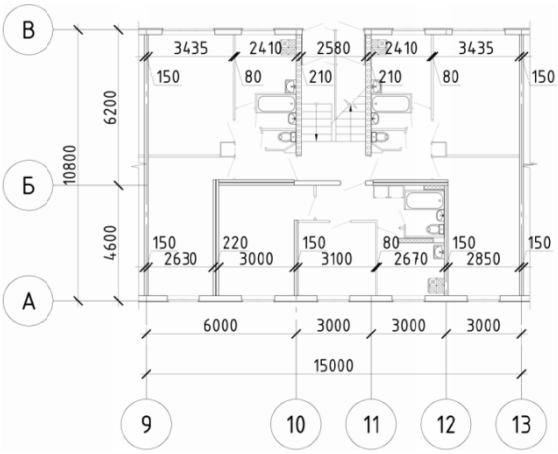


Рисунок 14. План типовой секции

Имеются результаты предварительного детального обследования нескольких зданий, которые показывают, что разрушение здания обычно начинается в зонах *растянутых стыков* [27].

Для оценки несущей способности зданий и прогнозирования развития процесса деформирования применялось численное моделирование и современные программные комплексы. Это наиболее целесообразный подход, который в настоящее время используется для решения подобных задач [9–13, 28]. Традиционно для выполнения расчетов реальный физический объект заменяется некоторой аппроксимирующей (расчетной) моделью, при этом целесообразно иметь не одну модель, а систему аппроксимирующих моделей [26–28].

Вначале для приближенной оценки здание рассматривалось как упругий стержень [8]. От кинематического воздействия равномерного растяжения определялось значение критического удлинения здания ε_{cr}. Величина ε_{cr} не должна быть больше, чем суммарная длина стыков здания (вдоль его оси), умноженная на деформацию стали в момент разрыва (для стали Ст 3 она составляет 26%). При других видах деформирования предельно допустимый прогиб/выгиб здания δ можно определить, рассматривая случай, когда в одном из сечений здания-стержня удлинение достигнет величины ε_{cr}.

Далее все расчеты выполнялись в конечно-элементном программном комплексе ANSYS, верифицированном в Российской академии архитектуры и строительных наук.

Конструктивная система здания и решение связей между панелями должны обеспечивать надежность конструкций здания при эксплуатационных и аварийных воздействиях [9, 29], а связи во всех стыках должны обеспечивать восприятие соответствующих расчетных усилий.

Вертикальные стыки между панелями несущих и самонесущих стен должны обеспечивать восприятие усилий сжатия, растяжения и сдвига. Горизонтальные стыки между панелями несущих стен должны обеспечивать восприятие усилий от внецентренного сжатия стены из ее плоскости и изгиба со сдвигом в плоскости стены.

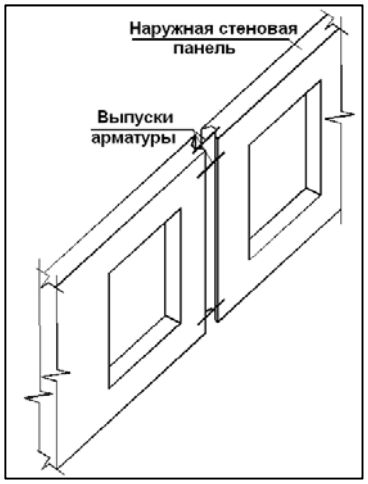


Рисунок 15. Зона стыка самонесущих панелей здания

Для изучения напряженно-деформированного состояния конструкции непосредственно в зоне стыка при растяжении и для определения предельного значения перемещения вначале была рассмотрена пространственная модель соединения наружных самонесущих панелей (рисунок 15). Панели в стыках соединяются друг с другом арматурой и двумя листовыми накладками. Общая площадь металла соединения в рассматриваемых зданиях составляет ~ 15 см^2. Заполнение стыка бетоном на рисунке условно не показано.

При создании расчетной модели использовались 3-мерные 8-узловые конечные элементы SOLID65, имеющие по три степени свободы в каждом узле. Эти элементы рекомендуется использовать для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций, выполненных из неоднородного материала (бетона/железобетона). При этом можно учесть наличие арматуры в бетоне, разнообразные включения в материал, процесс образования и развития трещин при больших или критических нагрузках.

Эффективные характеристики тензора жесткости железобетона определяются как смесь упругих характеристик компонент с учетом их направлений. В арматуре при этом могут возникать пластические деформации. Критерий прочности предусматривает возможность возникновения в элементе разного вида напряженного состояния. Разрушение (трещинообразование) происходит, когда интенсивность напряжений в элементе достигает критического значения. В этом случае материал теряет способность сопротивляться формоизменению, сохраняя способность сопротивляться всестороннему сжатию (если такой вид напряженного состояния возникнет после перераспределения напряжений и при дальнейшем деформировании).

При моделировании панелей в зоне стыка учитывалось наличие арматуры – стальных стержней диаметром 18 мм – и раствора, хотя обычно бетон в растянутых стыках не учитывается.

Как показали результаты нелинейного расчета, в зависимости от прочностных (предел прочности на растяжение и сжатие) и жесткостных (модуль упругости) физико-механических характеристик железобетона первые трещины в бетоне появляются при растяжении на величину 0,05 ÷ 0,4 мм. При появлении трещин в зоне стыка происходит перераспределение напряжений в железобетоне, вся нагрузка передается на арматуру, которая и обеспечивает прочность соединения. Картина трещин соответствует данным натурных обследований.

Учитывая, что здание состоит из типовых блок-секций, *следующая расчетная модель* представлена в виде секции-этажа длиной 15 м для определения местоположения наиболее слабого конструктивного элемента здания (рисунок 16).

Дискретизация секции-этажа выполнялась разными типами конечных элементов, включенными в библиотеку ПК ANSYS: *панели и перекрытия* здания моделировались пластинчатыми элементами SHELL93; *стыки самонесущих панелей* – стержневыми элементами BEAM188 со свойствами арматурной стали AIII (диаметром 18 мм – вверху и внизу секции и 8 мм – между ними); *платформенные горизонтальные и вертикальные стыки* – пластинчатыми элементами SHELL281 с учетом реальных размеров конструктивного решения узла (70 x 50 x 8 мм).

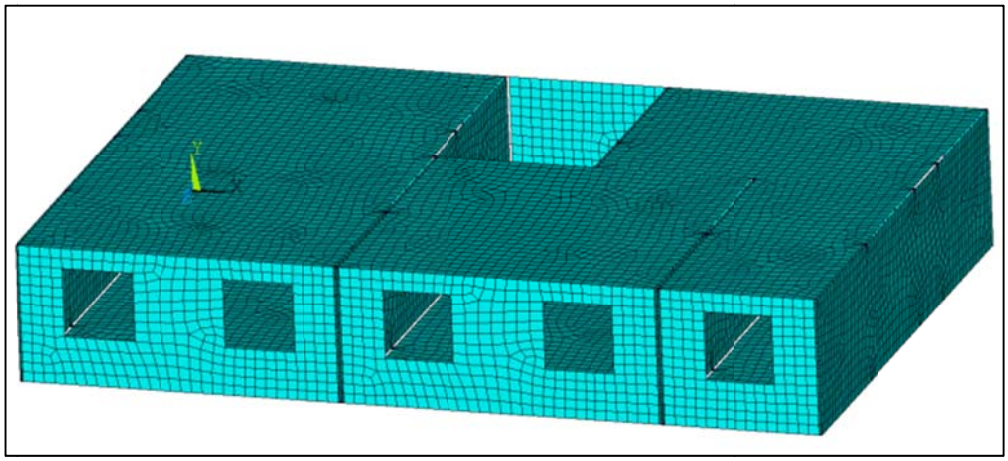


Рисунок 16. КЭ модель типовой секции

Рассматривались разные варианты кинематического воздействия на конструкции здания (растяжение, сжатие и изгиб), вызванного развитием деформаций в мульде сдвижения земной поверхности.

Результаты линейного расчета и уточненного нелинейного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций для всех видов нагружений показали, что при разных формах кинематического воздействия напряжения локализуются в стальных закладных элементах и наиболее нагружены стыки в зоне лестничной клетки. Это было выявлено и при обследовании зданий, находящихся в подобных условиях нагружения.

На рисунке 17 представлено изображение плит покрытия лестничной клетки, выполненное при обследовании здания, находящегося на подработанной территории. Выполнено переопирание плит покрытия для предотвращения внезапного обрушения.

Рисунок 17. Щели в стыках плит покрытия и стен лестничной клетки

На рисунке 18 приведены результаты расчета эквивалентных напряжений в стыках секции-этажа при растяжении. Для определения наиболее нагруженных элементов расчет выполнен в линейной постановке без учета пластичности.

Рисунок 18. Эквивалентные напряжения в стыках при растяжении (линейный расчет)

При описании физической нелинейности материала арматурной стали принималась модель билинейного изотропного упрочнения для проведения анализа при больших деформациях. Это сочетание условия текучести Мизеса с изотропным расширением поверхности пластичности. Предел текучести арматурной стали σ_T = 240 МПа.

При выполнении нелинейного расчета использовалась пошаговая процедура приложения кинематического воздействия, т. е. перемещения увеличивались пошагово за счет малых приращений, чтобы гарантировать получение достоверной зависимости нагрузка – перемещение. При этом на каждом шаге выполнялись равновесные итерации и оценивалась сходимость итерационного процесса методом Ньютона – Рафсона.

Пластические деформации для стальных закладных элементов типовой секции при растяжении и оседании представлены на рисунках 19 и 20 соответственно.

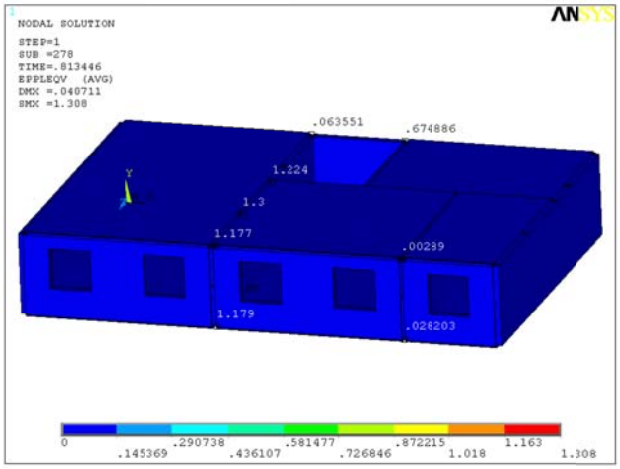


Рисунок 19. Эквивалентные пластические деформации при растяжении

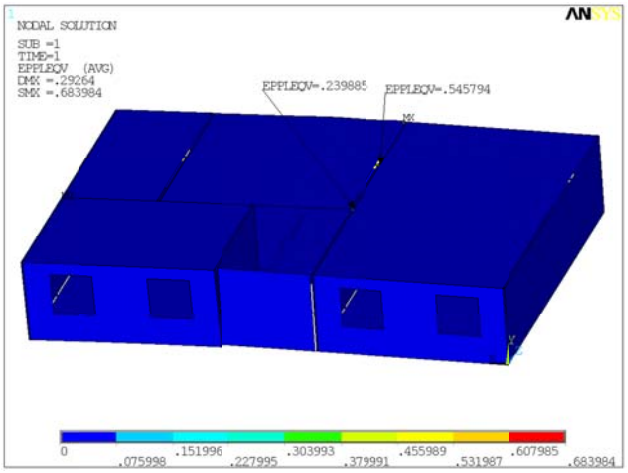


Рисунок 20. Эквивалентные пластические деформации при оседании

Сделано предположение, что при изгибе здания предельное состояние также наступит тогда, когда в одном из стальных закладных элементов здания будет достигнуто критическое удлинение ε_{cr}.

На основании расчетов для типовой секции составлена таблица 2.

Таблица 2. Максимальные значения интенсивности напряжений, МПа

Тип ГУ	Деформация, %	Приложенные перемещения, мм	Радиус кривизны пов-ти, м
Растяжение	1,8	1,24	∞
	2,4	1,47	∞
Оседание	1,7	2,11	4245
	2,0	2,44	2459

Выводы

Из выбранных моделей краткосрочного прогнозирования лучшие результаты показала модель Хольта. Погрешность тестового краткосрочного четырехлетнего прогноза, выполненного при помощи модели Хольта, в первые три года не превышает 3,00%. Погрешность второго шага прогнозирования при сравнении с фактическими данными оседания поверхности составляет 7,07%.

Рисунок 4 позволяет оценить динамику нарастания напряжений при изменении угла поворота здания относительно мульды оседания. Следует отметить, что поворот здания относительно оси мульды эквивалентен смещению плоского дна мульды относительно здания. Положение здания 3 (рисунок 11) характеризуется наиболее быстрым изменением напряжений. Положения 4 и 5 превосходят по скорости изменения напряжений положение 3 лишь в узком диапазоне углов от 40° до 45°. Положения 1 и 2, располагающиеся в области плоского дна, наименее чувствительны к изменению ориентации в пространстве.

Из анализа значений, полученных в результате численного моделирования, а также из графиков, представленных на рисунках 4 и 5, следуют выводы.

1. Наиболее опасным с точки зрения величины напряжений является положение здания 1. При таком положении здание подвергается изгибным деформациям, проседая в середине. На рисунках 21 и 22 представлены изополя интенсивностей напряжений для здания в таком положении.

2. Опасным с точки зрения эксплуатации здания является положение 3. При таком положении деформации здания постоянно нарастают и реализуются с максимальной скоростью, что может привести к аварийной ситуации при относительно невысоком уровне напряжений.

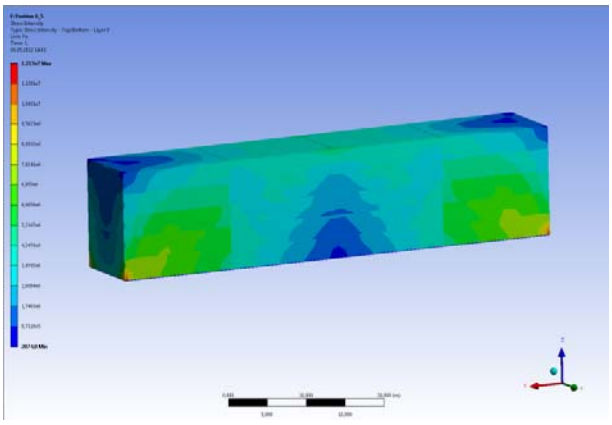


Рисунок 21. Интенсивность напряжений в стеновых панелях, МПа

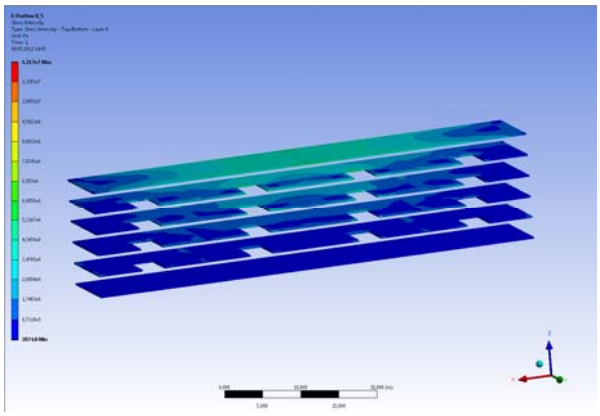


Рисунок 22. Интенсивность напряжений в перекрытиях, МПа

Проведенные вычислительные эксперименты для панельного здания типовой серии 1-468А позволили выявить некоторые особенности напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов здания, позволяющие в дальнейшем прогнозировать наличие аварийного состояния здания или возможность его дальнейшей эксплуатации.

Анализ напряженно-деформированного состояния наружных стеновых панелей из ячеистого бетона показал, что в зависимости от физико-механических свойств железобетона первые трещины в бетоне появляются при растяжении на величину 0,05…0,4 мм. При появлении трещин бетон исключается из работы и прочность в зоне стыка обеспечивает арматура. На поверхности панелей образуются характерные трещины непосредственно по стыку панелей и в углах оконных проемов, что совпадает с данными натурных обследований.

Во всех рассмотренных случаях кинематического воздействия наибольшая концентрация напряжений отмечается в стальных элементах, соединяющих лестничные площадки со стеновыми панелями, и в закладных деталях в уровне пола в нижнем углу лестничной клетки. Значительные напряжения возникают в вертикальных стыках панелей слева и справа от лестничной клетки. Наиболее опасным элементом конструкции является нижнее примыкание плит перекрытия к несущей стене в зоне лестничной клетки.

Литература

1. Бараненко Ф.Ф. Математические методы и модели краткосрочного прогноза чрезвычайных ситуаций на постоянно наблюдаемых натурных объектах: автореф. .. дисс. канд.физ.-мат. наук. Ставрополь, 2011. 20 с.
2. Москвичев В.В. Моделирование катастрофических процессов в природной среде [Электронный ресурс]. URL: http://www.nsc.ru/win/sbras/rep/rep2005/tom2/pdf/005.pdf (дата обращения: 05.02.2008).
3. Кузьмин В. А. Фундаментальные основы автоматизированного прогнозирования дождевых паводков // Естественные и технические науки. 2009. №6. С. 271–285.
4. Войтюк А.В., Бараненко Ф.Ф., Семенчин Е.А. Применение адаптивных моделей линейного роста для краткосрочного прогноза наполняемости водохранилища // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14. Вып. 1. С. 98–99.
5. Варшанина Т.П., Митусов Д.В., Плисенко О.А., Стародуб И.В. Нейросетевая модель прогноза паводков на малых реках Адыгеи // Известия РАН. Серия географическая. 2007. №6. С. 87–93.
6. Васильев А.С. Инженерно-технологические проблемы мониторинга и прогнозирования состояния гидросферы атмосферных и морских экологических систем // Наука и технологии в промышленности. 2006. №3. С. 65–71.
7. Ермаков В.В., Патраков А.Н. Мониторинг несущих строительных конструкций жилых зданий, построенных на подрабатываемых территориях без конструктивных мер защиты // Вестник ПГТУ. Строительство и архитектура. 2010. №1. С. 63–71.
8. Кашеварова Г.Г., Сон М.П., Воробьев А.В. Определение предельно допустимых деформаций панельных зданий, эксплуатируемых на подработанной территории // Материалы Российской конференции с международным участием «Геотехнические проблемы проектирования зданий и

сооружений на карстоопасных территориях». 22–23 мая 2012, г. Уфа. Уфа: БашНИИстрой, 2012. С. 51–55.

9. Кашеварова Г.Г., Фаизов И.Н., Зобачева А.Ю. Конструктивные меры защиты зданий и сооружений на подработанной территории // Вестник ПГТУ. Строительство и архитектура. 2010. №1. С. 72–77.
10. Золотова Л.Т., Мараков В.Е., Теннисон Л.О. Прогноз развития оседаний и деформаций земной поверхности на площадях, подработанных пластом В карналлитового состава // Маркшейдерский вестник. 2007. №4. С. 34–37.
11. Зацепин М.А. Математическое моделирование прогноза напряженно-деформированного состояния пологозалегающего массива горных пород // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Вып. 1. С. 68–73.
12. Кургузов В.Д. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород, ослабленного квадратной выработкой // Вычислительные технологии. 2003. Том 8. №5. С. 84–93.
13. Кашников Ю.А., Ашихмин С.Г. Численная модель для расчёта напряженно-деформированного состояния грунтового массива и земной поверхности при добыче калийных руд // Маркшейдерский вестник. 2002. №3. С. 41–46.
14. Hong X., Yong K., Mou Z.. Prediction and discuss of strap mining subsidence by numerical simulation analysis and its engineering apply // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 308-310. Pp. 1683–1687.
15. Abidin H.Z., Andreas H., Gumilar I., Fukuda Y., Pohan Y., Deguchi T.. Land subsidence of Jakarta (Indonesia) and its relation with urban development // Natural Hazards. 2011. Vol. 59. Issue 3. Pp. 1753–1771.
16. Jing W., Yang C., Kong, J., Ji W. Risk analysis of ground subsidence accidents caused by underground storage caverns in salt rock // Rock and Soil Mechanics. 2011. Vol. 32. No.S2. Pp. 544–550.
17. СП 21.13330.2012. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах.
18. ВСН 32-77 Инструкция по проектированию конструкций панельных жилых зданий. М.: Госгражданстрой, 1978.
19. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2003. 416 с.
20. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. М.: Статистика, 1977. 200 с.
21. Тутубалин В.Н. Статистическая обработка рядов наблюдений. М.: Знание, 1973. 64 с.
22. Holt C.C. Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages // ONR. Memorandum 52, Carnegie Institute of Technology. Pittsburgh, 1957.
23. Brown R.G. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series. New Jersey: Prentice-Hall, 1963. 468 p.
24. Brown R.G., Meyer R.F. The fundamental theorem of exponential smoothing // Operations Research. 1961. Vol. 9. No.5. Pp. 673–685.
25. Winters P.R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages // Management Science. 1960. Vol. 6. No.3.
26. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 600 с.
27. Кашеварова Г.Г., Воробьев А.В. Численный анализ возможности сохранения жилых панельных зданий на подработанной территории // Тезисы докладов IV международного симпозиума «Актуальные проблемы комплексного моделирования конструкций и сооружений». Челябинск: Издательский центр ЮУрГу, 2012. С. 77–79.
28. Белостоцкий В.Н. Сидоров А.М., Акимов П.А., Кашеварова Г.Г. Математическое моделирование техногенной безопасности ответственных строительных объектов мегаполисов // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2010. Т. 06. №1-2. С. 45–64.
29. Шапиро Г.И., Юрьев Р.В. К вопросу о построении расчетной модели панельного здания // Промышленное и гражданское строительство. 2004. №12. С. 32–33.

Александр Владимирович Воробьев, г. Пермь, Россия
Тел. моб.: +7(922)641-74-06; эл. почта: km02@yandex.ru

Галина Геннадьевна Кашеварова, г. Пермь, Россия
Тел. моб.: +7(912)884-38-04; эл. почта: ggkash@mail.ru

Оптимизация рамных конструкций с учетом возможности запроектных воздействий

Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой И.Н. Серпик;
к.т.н., доцент А.В. Алексейцев,
ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия»

Аннотация. В статье поставлена задача оптимизации стальных плоских рам на дискретных множествах параметров с учетом возможности возникновения аварийных ситуаций. Поиск решения осуществляется с использованием эволюционного моделирования.

Вычислительная схема включает следующие основные этапы: нахождение на основе оптимального проектирования варианта конструкции, удовлетворяющего требованиям СНиП; выполнение расчетов этого объекта в статической и динамической постановках в условиях появления локальных повреждений с определением динамического коэффициента для каждого рассматриваемого запроектного воздействия; реализация последовательности эволюционных синтезов конструкции при выполнении расчетов деформаций поврежденных стержневых систем в квазистатической постановке с учетом полученных динамических коэффициентов. Далее выполняется уточнение динамических коэффициентов при задании значений параметров конструкции, установленных в результате оптимального проектирования, и осуществляется проверка живучести и удовлетворения требований СНиП для синтезированной несущей системы. По результатам этой проверки могут корректироваться исходные предпосылки для расчетов и повторно выполняться процедуры оптимизации.

Анализ нестационарной динамики выполняется в физически и геометрически нелинейной постановке с использованием ассоциированного закона течения. Расчет в статической постановке реализуется в рамках деформационной теории пластичности с учетом влияния продольных сил на изгиб стержней.

Ключевые слова: запроектные воздействия; генетические алгоритмы; живучесть конструкций; параметрическая оптимизация; стальные рамы

Введение

В последнее время существенно увеличилось число аварий, приводящих к разрушению строительных систем. Часть из этих разрушений связана с воздействиями, которые не предусмотрены условиями нормальной эксплуатации конструкций, или так называемыми запроектными воздействиями [1, 2]. В 2009 году был принят федеральный закон № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений», согласно которому для зданий и сооружений повышенного уровня ответственности «должны быть предусмотрены конструктивные и организационно-технические меры по защите жизни и здоровья людей и окружающей среды от опасных последствий аварий». Повышение живучести строительных объектов обычно сопряжено с весьма существенными материальными затратами. Одним из путей снижения этих затрат является оптимальное проектирование несущих систем, в котором принимались бы во внимание как нормативные, так и запроектные воздействия.

Вопросам анализа поведения несущих конструкций при запроектных воздействиях посвящен ряд исследований [3–9]. Особое внимание при этом уделялось динамическому догружению систем при мгновенном выключении из объекта одного или нескольких конструктивных элементов. Задача оптимального проектирования конструкций с учетом возможных аварийных ситуаций рассматривалась в работах [10–19]. В статьях [10, 11] предлагается осуществлять оптимизацию характеристик надежности неразрезных железобетонных балок, используя прямой метод вероятностного анализа. В дальнейшем этот подход получил развитие в работах [12–14], где для оптимизации живучести железобетонных стержневых конструкций прямой метод вероятностного анализа использовался совместно с принципом эквиградиентности Г.А. Гениева. В работе [15] анализировалась проблема оптимизации полусферической оболочки, предназначенной для защиты от экстремальных ситуаций в шахтах. Статьи [16–19] посвящены изучению вопросов оптимизации тонкостенных конструкций при условии обеспечения их ударопрочности.

Оптимизация несущих систем с учетом аварийных ситуаций, как правило, выполнялась на непрерывных множествах варьируемых параметров. В то же время процесс реального

строительного проектирования обычно требует выбора параметров несущей конструкции на ограниченных дискретных множествах допустимых значений. К настоящему времени в современных информационных технологиях получило распространение эволюционное моделирование, иначе называемое генетическими алгоритмами [20]. Эти алгоритмы, построенные по схеме эволюции видов в живой природе, позволяют выполнять поиск рациональных решений как на непрерывных, так и на дискретных множествах параметров состояния. При этом по сравнению с традиционными методами случайного поиска генетические итерационные схемы обеспечивают возможность рассмотрения значительно большего числа варьируемых переменных и более эффективны в нахождении глобальных экстремумов. Вопрос применения генетических алгоритмов для оптимизации несущих систем при нормативных воздействиях уже достаточно подробно рассматривался в литературе [21–33], однако для решения сложных технических задач с учетом аварийных ситуаций эволюционное моделирование еще не получило широкого распространения. В настоящей работе представляется методика оптимизации стальных плоских рам с учетом возможности внезапного удаления ряда связей в расчетной схеме. Поиск осуществляется с использованием эволюционного моделирования на дискретных множествах параметров.

Постановка задачи и общая схема параметрической оптимизации

Минимизируется стоимость $C_б$ материала стержней рамы:

$$C_б(Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i \to \min , \tag{1}$$

где Y – система дискретных множеств допустимых значений варьируемых размеров поперечных сечений стержней; *n* – число стержней; c_i, m_i – стоимость единицы массы и масса *i*-го стержня.

Вводятся ограничения по выполнению требований СНиП и предотвращению недопустимо больших изменений геометрии конструкции в условиях мгновенного возникновения отдельных локальных повреждений. Напряженно-деформированное состояние объектов рассчитывается с помощью метода конечных элементов в рамках метода перемещений.

Алгоритм оптимального синтеза включает следующие основные этапы.

1. Нахождение на основе оптимального проектирования варианта исследуемой конструкции, удовлетворяющего требованиям СНиП, методом эволюционного моделирования с использованием подходов работы [32].

2. Выполнение расчетов этого варианта конструкции в статической и динамической постановках в условиях появления локальных повреждений. Расчет в статической постановке реализуется в рамках деформационной теории пластичности с учетом влияния продольных сил на изгиб стержней. Анализ нестационарной динамики осуществляется на основе методики работы [34] в физически и геометрически нелинейной постановке. Определяется динамический коэффициент для каждого рассматриваемого запроектного воздействия:

$$k_d = \alpha_s / \alpha_d , \tag{2}$$

где α_s, α_d – коэффициенты запаса несущей способности для статического и динамического нагружений.

3. Реализация последовательности эволюционных синтезов конструкции при выполнении расчетов деформаций поврежденных стержневых систем в квазистатической постановке с учетом полученных динамических коэффициентов в рамках используемой на этапе 2 процедуры анализа работы несущей системы при статическом нагружении. При этом для каждой новой оптимизации допустимые параметры проектирования должны иметь не меньшие значения, чем соответствующие величины, полученные на предыдущем поиске.

4. Уточнение динамических коэффициентов при задании значений параметров конструкции, установленных в результате выполнения этапа 3.

5. Проверка живучести и удовлетворения требований СНиП для синтезированной несущей системы.

6. По результатам расчетов на этапах 4, 5 алгоритма этапы 2, 3 могут реализовываться повторно.

Эволюционная оптимизация для поврежденной конструкции

При минимизации значения $C_б$ в расчетах этапа 3 учитываются ограничения по узловым перемещениям. Для каждого *i*-го узла ставится условие:

$$p_i = \frac{f_i}{f_{ia}} - 1 \le 0, \tag{3}$$

где p_i – величина, используемая для оценки удовлетворения поставленного ограничения; f_i – модуль вектора перемещения узла; f_{ia} – предельно допустимое значение этого перемещения.

Каждый проект интерпретируется как особь с определенным набором генов (параметров). Дискретные множества допустимых значений параметров выстраиваются от меньшего к большему. В эволюционной процедуре принимается во внимание основная группа проектов I, имеющая фиксированное четное число *N* объектов, и вспомогательная группа II улучшенных объектов, размер которой зависит от результатов работы эволюционного алгоритма, но не превышает *N*. Первоначально формируются проекты группы I из одинаковых вариантов конструкции с наибольшими допустимыми значениями параметров. Далее осуществляется движение по поколениям (итерационный процесс), включающее следующие основные действия.

Проверка выполнения ограничений для объектов группы I. Моделирование работы стержней выполняется в упруго-пластической постановке в рамках многослойной схемы. При этом слои дискретизируются с использованием ферменных конечных элементов. Для пакета слоев в целом считается справедливой гипотеза плоских сечений.

Влияние продольных сил в стержнях на изгибные деформации учитывается с помощью геометрических матриц (или матриц устойчивости) [35] конечных элементов. Выполняются расчеты напряженно-деформированного состояния вариантов конструкции методом последовательных приближений. В каждой итерации *s* > 1 решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\left(\left[K^{(s)}\right] + \left[K_G^{(s)}\right]\right)\left\{\delta^{(s)}\right\} = \{R\}, \tag{4}$$

где $\left[K^{(s)}\right]$ – матрица жесткости конечно-элементной модели для итерации *s*, получаемая с учетом секущих модулей упругости материала, которые определяются для каждого *i*-го конечного элемента по результатам выполнения итерации *s*−1; $\left[K_G^{(s)}\right]$ – геометрическая матрица системы конечных элементов в итерации *s*, выражающаяся через продольные силы в стержнях, полученные в *s*−1-й итерации; $\left\{\delta^{(s)}\right\}$ – вектор узловых перемещений, вычисляемый в итерации *s*; $\{R\}$ – вектор приведенной к узлам внешней нагрузки.

В первой итерации объект рассчитывается в линейно упругой постановке. При этом группа объектов I разделяется на подгруппы α и β. Если для какого-либо из проектов подгруппы α не удовлетворяется условие (3), то он заменяется не используемым в группе I проектом из группы II или вновь сформированным вариантом несущей системы. Если ограничения не удовлетворяются для объекта из группы β, то вводится штраф путем умножения значения целевой функции на коэффициент

$$k_p = \left(1 + \xi\chi\left(p_{f\max}\right)p_{f\max}\right), \tag{5}$$

где ξ – задаваемое положительное число; $\chi(x)$ – функция Хэвисайда от некоторого аргумента *x* ($\chi(x)$ = 0, если $x < 0$; $\chi(x)$ = 1, если $x \ge 0$); $p_{f\max}$ – максимальное значение p_f для проверяемого проекта конструкции.

Корректировка группы II *улучшенных проектов.* Каждый из объектов группы I проверяется по двум критериям: существует ли такой объект в группе II, и не превышает ли значение $C_б$ рассматриваемого объекта наибольшего значения целевой функции в данной группе. Если оба условия не выполняются, объект включается в группу II. В том случае, когда

число объектов во вспомогательной группе превысит N, проект с наибольшим значением $C_б$ из нее удаляется.

Проверка удовлетворения критерию окончания эволюционного алгоритма. Расчеты показывают, что при оптимальном синтезе рам с помощью рассматриваемой итерационной схемы отсутствие изменений в группе II в течение 300–500 поколений говорит о целесообразности остановки оптимизации. Дальнейшее продолжение итерационного процесса обычно не приводит к сколько-нибудь существенному изменению параметров для наиболее рациональных проектов. Эволюционное моделирование является эффективным инструментом для выхода из локальных экстремумов. Тем не менее, для задач переборного типа в общем случае не существует достоверного критерия получения глобального оптимума, кроме полного перебора вариантов.

Мутация (случайное изменение параметров). Случайным образом для части проектов группы I может быть изменено несколько параметров. Вводится следующая схема выбора значения рассматриваемого параметра. С помощью датчика случайных чисел, оперирующего на отрезке (0,1) и имеющего равномерный закон распределения, находится значение m_a, которое сравнивается с управляющим числом мутации m. Если соблюдается неравенство $m_a > m$, то случайно с равной вероятностью выбирается любая из допустимых величин. В противном случае на единицу может увеличиваться или уменьшаться номер текущей позиции величины этого параметра во множестве его допустимых значений.

Селекция и кроссинговер. Для объектов группы I выполняется селекция по критерию значения целевой функции с использованием метода рулетки и реализуется процедура одноточечного кроссинговера (обмена значениями параметров) [20]. Объекты, входящие в группы α и β, участвуют в этих операциях на равных основаниях.

Пример оптимизации рамы

В качестве примера выполнялась оптимизация рамы (рис. 1), изготовленной из стали С345. Считалось, что стержни рамы имеют сварные двутавровые профили. Учитывались запроектные воздействия путем независимого мгновенного устранения опор *C* и *D*. Варьировались размеры полок и стенок в поперечных сечениях двутавров при обеспечении указанной на рисунке 1 симметрии сечений и конструкции рамы. Для всех узлов задавалось f_{ia} = 1,8 м.

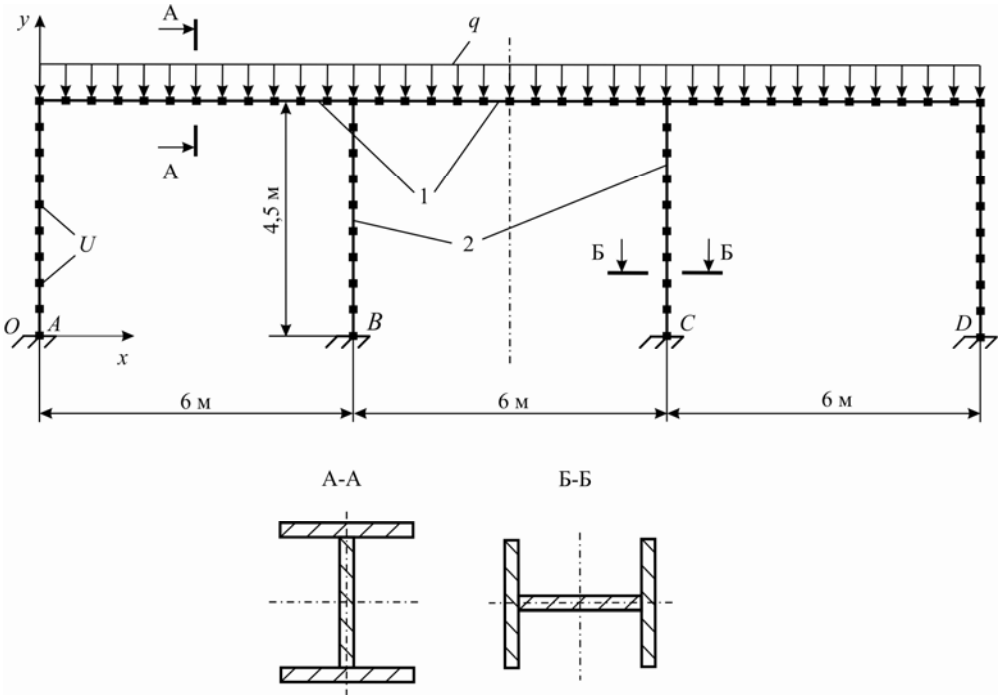


Рисунок 1. Плоская рама: *U* – узлы конечно-элементной модели; 1 – балки; 2 – стойки

Последовательно выполнялись 3 реализации эволюционной оптимизации: 1) с учетом требований СНиП; 2) при удалении опоры *D*; 3) при удалении опоры *C*. Первоначально динамические коэффициенты для объектов без опор *D* и *C* получились соответственно равными 1,49 и 1,81. При уточнении эти значения изменялись не более чем на 3%, что не приводило к сколько-нибудь существенной корректировке результатов оптимизационных расчетов. На рисунке 2 отражено изменение стоимости конструкции в ценах 2013 г. для первых 300 итераций оптимизационных процессов. Продолжение каждого из этих поисков путем выполнения еще 300–400 итераций не изменяло параметры наиболее эффективного проекта.

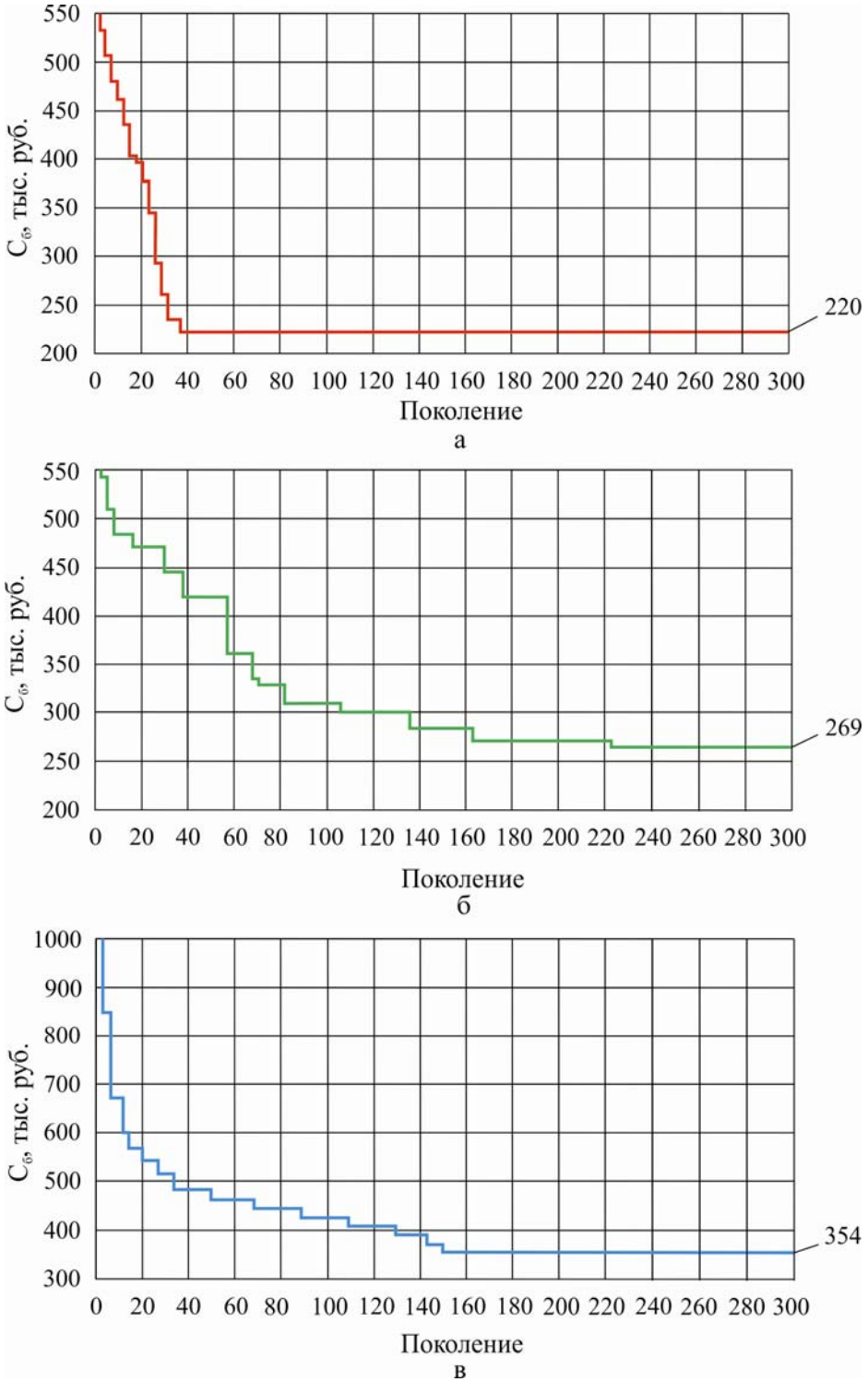


Рисунок 2. Изменение себестоимости рамы в итерационных процессах:
а – при ограничениях для условий нормальной эксплуатации объекта;
б, в – при рассмотрении возможности мгновенного удаления опор *D* и *C*

Заключение

1. Предложена эволюционная процедура оптимизации рамных стальных конструкций на дискретных множествах параметров с учетом возможности запроектных воздействий в виде локальных повреждений.

2. Работоспособность данного алгоритма проиллюстрирована на примере оптимального проектирования плоской трехпролетной рамы, рассматриваемой при действии нормативных эксплуатационных нагрузок и в условиях мгновенного устранения отдельных опор.

3. Использование рассматриваемой вычислительной схемы даст возможность снизить дополнительные затраты на защиту от последствий аварий зданий и сооружений повышенного уровня ответственности.

Статья подготовлена при поддержке гранта РФФИ №13-08-00457 «Оптимизация конструктивных систем с учетом возможности аварийных ситуаций».

Литература

1. Колчунов В.И. Основные направления развития конструктивных решений и обеспечение безопасности жилища // Промышленное и гражданское строительство. 2007. №10. С. 12–15.
2. Тамразян А.Г. Рекомендации к разработке требований к живучести зданий и сооружений // Вестник МГСУ. 2011. Т. 1. №2. С. 77–83.
3. Колчунов В.И., Скобелева Е.А., Клюева Н.В. К расчету живучести внезапно повреждаемых железобетонных рам с элементами составного сечения // Academia. Архитектура и строительство. 2006. №3. С. 23–26.
4. Клюева Н.В., Бухтиярова А.С., Прокопенко В.В. К определению параметра живучести пространственных конструктивных систем смешанным методом // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. №3. С. 146–149.
5. Chen J., Huang X., Ma R., He M. Experimental study on the progressive collapse resistance of a two-story steel moment frame // Journal of Performance of Constructed Facilities. 2012. Vol. 26. No.5. Pp. 567–575.
6. Ellingwood B.R., Dusenberry D.O. Building design for abnormal loads and progressive collapse // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 2005. Vol. 20. No.3. Pp. 194–205.
7. Kuhlmann U., Roelle L., Izzuddin B.A. Resistance and response of steel and steel-concrete composite structures in progressive collapse assessment // Structural Engineering International. 2012. Vol. 22. No.1. Pp. 86–92.
8. Starossek U., Haberland M. Disproportionate collapse: terminology and procedures // Journal of Performance of Constructed Facilities. 2010. Vol. 24. No.6. Pp. 519–528.
9. Vlassis A., Izzuddin B., Elghazouli A. Progressive collapse of multi-storey buildings due to failed floor impact // Engineering Structures. 2009. Vol. 31. No.7. Pp. 1522–1534.
10. Гениев Г.А., Колчунов В.И., Дегтярь А.Н. О применении прямого метода вероятностного анализа к задачам оптимизации характеристик надежности железобетонных многопролетных балок при мгновенном отказе отдельных конструктивных элементов // Сборник научных трудов ЦРО РААСН. Вып. 1. М., 2002. С. 32–36.
11. Гениев Г.А., Колчунов В.И., Дегтярь А.Н. Вопросы оптимизации характеристик надежности железобетонных многопролетных балок с позиции минимальной вероятности их отказа // Материалы вторых международных академических чтений «Новые энергосберегающие архитектурно-конструктивные решения жилых и гражданских зданий». Орел, 2003. С. 163–166.
12. Колчунов В.И., Дегтярь А.Н., Оссовских Е.В. К оптимизации надежности пространственных покрытий из железобетонных панелей оболочек КСО // Известия Орловского государственного технического университета. Серия «Строительство. Транспорт». 2004. № 3-4. С. 35–38.
13. Бондаренко В.М., Клюева Н.В., Дегтярь А.Н., Андросова Н.Б. Оптимизация живучести конструктивно нелинейных железобетонных рамно-стержневых систем при внезапных структурных изменениях // Известия Орловского государственного технического университета. Серия «Строительство. Транспорт». 2007. №4. С. 5–10.
14. Клюева Н.В., Андросова Н.Б. Анализ живучести нагруженных коррозионно повреждаемых железобетонных конструктивных систем // Вестник отделения архитектуры и строительных наук. 2009. №13. С. 152–162.

15. Guoyun L., Guoquan Z., Zhijun H. Design and optimization of an emergency shelter // Mechanic Automation and Control Engineering (MACE): Int. Conf. Wuhan, China, 2010. Pp. 705–708.
16. Han J., Yamazaki K. Crashworthiness optimization of S-shape square tubes // International Journal of Vehicle Design. 2003. Vol. 31. No.1. Pp. 72–85.
17. Khajavi M.N., Notghi B., Paygane G. A multi objective optimization approach to optimize vehicle ride and handling characteristics // World Academy *of* Science, Engineering *and* Technology. 2010. Vol. 62. Pp. 580–584.
18. Nariman-Zadeh K.N., Masoumi A., Darvizeh A., Notghi B. Robust multi-objective optimization of the S-shape energy absorbers with parametric uncertainties // Proceedings of the Annual International Conference *on* Mechanical Engineering. Tehran, Iran. 2001. Pp. 187–192.
19. Schumacher, A., Parameter-based optimization for crashworthiness structures // 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization. Rio de Janeiro, Brazil. 2005. – Pp. 1–10.
20. Гладков Л. А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. М.: Физматлит, 2010. 317 с.
21. Erbatur F., Hasancebi O., Tutuncu I., Kilic H. Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms // Computers and Structures. 2000. Vol. 75. Pp. 209–224.
22. Nanakorn P., Meesomklin K. An adaptive penalty function in genetic algorithms for structural design optimization // Computers and Structures. 2001. Vol. 79. No. 2. Pp. 2527–2539.
23. Jenkins W.M. A decimal-coded evolutionary algorithm for constrained optimization // Computers and Structures. 2002. Vol. 80. No. 5-6. Pp. 471–480.
24. Серпик И.Н., Мирошников В.В., Серпик М.И., Тютюнников А.И. Генетическая процедура синтеза несущих конструкций вагонов // Качество машин: Сборник трудов IV Международной научно-технической конференции. Брянск: БГТУ, 2001. Т.1. С. 75–77.
25. Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Левкович Ф.Н., Тютюнников А.И. Структурно-параметрическая оптимизация стержневых металлических конструкций на основе эволюционного моделирования // Известия вузов. Строительство. 2005. №8. С. 16–24.
26. Мосин А. М. Оптимальное проектирование упругодеформируемых стальных портальных рам с элементами переменной жесткости на основе генетического алгоритма: Дис…канд. техн. наук. Екатеринбург, 2004. 134 с.
27. Balling R.J., Briggs R.R., Gillman K. Multiple optimum size/shape/topology designs for skeletal structures using a genetic algorithm // Journal of Structural Engineering. 2006. Vol 132. No. 7. Pp. 1158–1165.
28. Юрьев А.Г., Клюев С.В. Эволюционные и генетические алгоритмы оптимизации строительных конструкций. Белгород: Издательство Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова, 2006. 134 с.
29. Togan V., Daloglu A.T. An improved genetic algorithm with initial population strategy and self-adaptive member grouping // Computers and Structures. 2008. Vol. 11–12. P. 1204–1218.
30. Kaveh A., Malakouti Rad S. Hybrid genetic algorithm and particle swarm optimization for the force method-based simultaneous analysis and design // Iranian Journal of Science and Technology. 2010. Vol. 34. No.B1. Pp. 15–34.
31. Ghasemi M.R., Yousefi M. Reliability-based optimization of steel frame structures using modified genetic algorithm // Asian Journal *of* Civil Engineering. 2011. Vol. 12. No. 4. Pp. 449–475.
32. Серпик И.Н., Алексейцев А.В. Построение высокопроизводительного алгоритма оптимизации стержневых систем на основе комбинированной эволюционной стратегии // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 58–63.
33. Серпик И.Н., Алексейцев А.В. Оптимизация металлических конструкций путем эволюционного моделирования. М.: Издательство АСВ, 2012. 240 с.
34. Серпик И.Н., Курченко Н.С., Алексейцев А.В., Лагутина А.А. Анализ в геометрически, физически и конструктивно нелинейной постановке динамического поведения плоских рам при запроектных воздействиях // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №10. С. 49–51.
35. Smith I.M., Griffiths D.V. Programming the finite element method. Fourth edition. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2004. 628 p.

Игорь Нафтольевич Серпик, г. Брянск, Россия
Тел. раб.: +7(4832)648800; эл. почта: iserpik@online.debryansk.ru

Анатолий Викторович Алексейцев, г. Брянск, Россия
Тел. моб.: +7(960)564-33-58; эл. почта: aalexw@mail.ru

Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

К.т.н., старший научный сотрудник О.А. Сергеев,
ООО «Экспресс Плюс»;
к.т.н., доцент В.Г. Киселев,
ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»;
к.ф.-м.н., доцент С.А. Сергеева,
ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»

Аннотация. Целью работы является формулировка и решение задачи оптимизации стержневых конструкций по массе с ограничениями на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Метод оптимизации основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и линейной аппроксимации ограничений на вероятность безотказной работы стержневой конструкции со случайными несовершенствами.

В настоящей работе начальные глобальные несовершенства рассматриваются как независимые случайные малые величины, распределенные по нормальному закону, и критическая нагрузка общей потери устойчивости тоже случайная величина. Исследуется случай, когда при случайных несовершенствах значение некратной критической нагрузки потери устойчивости конструкции, соответствующей предельной точке, изменяется, а тип некратной критической точки не меняется.

Ключевые слова: оптимизация; геометрически нелинейные стержневые конструкции; случайные глобальные несовершенства; вероятность безотказной работы; общая потеря устойчивости; некратные предельные точки

Введение

Все конструкции имеют небольшие несовершенства, которые приобретаются в процессе изготовления, транспортирования, монтажа и эксплуатации. В 1945 г. голландский профессор В.Т. Койтер первым установил, что поведение конструкции с несовершенствами в значительной степени определяется поведением конструкции без несовершенств [1]. Общая потеря устойчивости [2–5] связывается с несколькими типами некратных критических точек [6–10]: асимметричная точка бифуркации, устойчивая симметричная точка бифуркации, неустойчивая симметричная точка бифуркации и предельная точка. В.Т. Койтер также показал, когда и каким образом значение некратной критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции без несовершенств может значительно уменьшиться при наличии несовершенств. Некратная нагрузка потери устойчивости [11–15] есть степенная функция с показателем степени 2/3 для неустойчивой симметричной точки бифуркации и 1/2 для асимметричной точки бифуркации [1]. Критическая нагрузка общей потери устойчивости для предельной точки, которую В.Т. Койтер не рассматривал, есть линейная функция. В большинстве работ рассматриваются несовершенства, которые считаются известными в дискретных точках конструкции [16]. Обычно вектор несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$ представляют в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mu \mathbf{d}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ – вектор координат узлов (площадей элементов, длин элементов) конструкции без несовершенств; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор координат узлов (площадей элементов, длин элементов) конструкции с несовершенствами; $\mathbf{d}$ – первая форма потери устойчивости [17–19] конструкции без несовершенств; μ – масштабирующий множитель. В некоторых случаях фиксируется форма несовершенств $\mathbf{d}$ и ищется множитель μ, а в других задачах масштабирующий множитель μ фиксируется и можно сформулировать задачу нахождения самой худшей формы несовершенств $\mathbf{d}^{наихудший}$ [20, 21], которая дает максимальное уменьшение значения критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции. Использование этих двух представлений все-таки дает

приближенное значение критической нагрузки общей потери устойчивости, так как вид несовершенств (1) не является общим.

В настоящей работе начальные глобальные несовершенства рассматриваются как независимые случайные малые величины, распределенные по нормальному закону, и некратная критическая нагрузка общей потери устойчивости тоже как случайная величина. Рассматривается ситуация, когда при случайных несовершенствах значение критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции, соответствующей предельной точке, изменяется, а тип критической точки – предельная точка – не меняется. Ограничение на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости включается в ограничения задачи оптимизации [22–24].

1. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых параметров $\mathbf{X}^*$ из области допустимых значений F, для которых масса W конструкции минимальна:

$$\mathrm{W}\left(\mathbf{X}^*\right)=\min_{\mathbf{X}\in\mathrm{F}}\mathrm{W}\left(\mathbf{X}\right), \tag{2}$$

где $\mathbf{X}$ – вектор управляемых параметров. Область допустимых значений F определяется следующими ограничениями:

- *на вероятность безотказной работы конструкции [25]:*

$$1-P\left(\ 0<\Lambda^{imp}\left(\mathbf{X},\boldsymbol{\varepsilon}\right)<1\ \right)\geq\delta, \tag{3}$$

где Λ^{imp} – некратный критический пропорциональный множитель внешней консервативной нагрузки $\mathbf{P}_0$; P – вероятность общей потери устойчивости стержневой конструкции; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор случайных глобальных несовершенств, которые имеют нормальное распределение, компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ являются малыми величинами; δ – заданный допуск. Для конструкции без несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}=\{0\}$;

- *на предельные значения управляемых параметров:*

$$\mathbf{X}_{\min}\leq\mathbf{X}\leq\mathbf{X}_{\max}, \tag{4}$$

где $\mathbf{X}_{\min}$ и $\mathbf{X}_{\max}$ – нижние и верхние значения параметров проектирования.

Метод оптимизации [26] основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и линейной аппроксимации ограничений на вероятность безотказной работы стержневой конструкции со случайными несовершенствами для одного типа критической точки – предельной точки.

2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия Π зависит от вектора перемещений $\mathbf{u}$, пропорционального множителя нагрузки Λ, случайного вектора глобальных несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$. Все компоненты внешней консервативной нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру Λ. Полная потенциальная энергия стержневой конструкции со случайными несовершенствами имеет вид:

$$\Pi\left(\mathbf{u},\Lambda,\boldsymbol{\varepsilon}\right)=\varphi\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon}\right)-\Lambda\,\mathbf{u}^T\mathbf{P}_0, \tag{5}$$

где $\varphi\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon}\right)$ – энергия деформации, $\mathbf{P}_0$ – вектор внешних консервативных нагрузок.

Уравнения равновесия стержневой конструкции для критического состояния имеют вид:

$$\mathbf{r}^c\left(\mathbf{u}^{imp},\Lambda^{imp},\boldsymbol{\varepsilon}\right)=\left\{\frac{\partial\Pi^c}{\partial\mathrm{u}_i}\right\}=\{0\},\ i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

так как полная потенциальная энергия стационарна в точке. Верхний индекс imp в (6) означает зависимость от вектора несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Уравнения равновесия (6) определяют равновесные кривые в (*n*+1)-мерном пространстве переменных ($\mathbf{u}, \Lambda$) при фиксированных несовершенствах $\boldsymbol{\varepsilon}$. На равновесных кривых имеются критические точки – точки, в которых выполняется условие:

$$\det\left|\frac{\partial \mathrm{r}_i^c}{\partial \mathrm{u}_j}\right| = \det\left|\mathbf{K}^c\right| = 0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где $\mathbf{K}^c$ – касательная матрица жесткости стержневой конструкции [27–30].

Альтернативным условием для определения критической точки является равенство нулю первого собственного значения касательной матрицы жесткости конструкции, которое определяется из следующей проблемы собственных значений:

$$\mathbf{K}^c\,\mathbf{\Phi}_1 = \{0\}. \tag{8}$$

Условие (7) или (8) трактуется как общая потеря устойчивости конструкции, так как при выполнении (7) или (8) возможны неоднозначные решения уравнений равновесия (6).

При варьировании несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$ критические точки будут образовывать *m*-мерную поверхность критических состояний, где *m* – размерность вектора случайных несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Дифференцируя уравнения равновесия (6) по параметрам продвижения $t_1, t_2, \ldots, t_m$ вдоль *m*-мерной поверхности критических состояний, во всех точках которой касательная матрица жесткости $\mathbf{K}^c = \partial\mathbf{r}^c/\partial\mathbf{u}$ является особенной, запишем:

$$\mathbf{K}^c\,\dot{\mathbf{u}}^{imp} + \mathbf{r}_\Lambda^c\dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [0], \tag{9}$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по $\mathbf{t}^T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

Уравнение (9) будет использоваться для определения критической точки – предельной точки.

3. Определение предельной точки

Умножим слева уравнение (9) на $\mathbf{\Phi}_1^T$, где $\mathbf{\Phi}_1$ – первая форма потери устойчивости стержневой конструкции без несовершенств. Тогда можно записать:

$$\mathbf{\Phi}_1^T\left(\mathbf{K}^c\,\dot{\mathbf{u}}^{imp} + \mathbf{r}_\Lambda^c\dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \{0\}^T. \tag{10}$$

Из (10) приходим к условию потери устойчивости стержневой конструкции [25]:

$$\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c\,\dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{0\}^T, \tag{11}$$

которое будем использовать для определения некратной предельной точки.

Точка, для которой выполняется

$$\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0,\ \mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \neq \{0\}^T,\ \dot{\Lambda}^{imp} \neq \{0\}^T,\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq [0],\ \mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c\,\dot{\Lambda}^{imp} = -\,\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{12}$$

называется предельной точкой. Влияние одного случайного несовершенства ε_1 на предельную точку показано на рисунке 1, *а*. Критический множитель Λ^{imp} внешней консервативной нагрузки зависит линейно от ε_1 в окрестности $\varepsilon_1 = 0$ [25] (рис. 1, *б)*. На рисунке 1 предельные точки развиваются вдоль прямой критических состояний *1*, а критический множитель нагрузки, соответствующий предельной точке, для конструкции без несовершенств обозначен Λ^c.

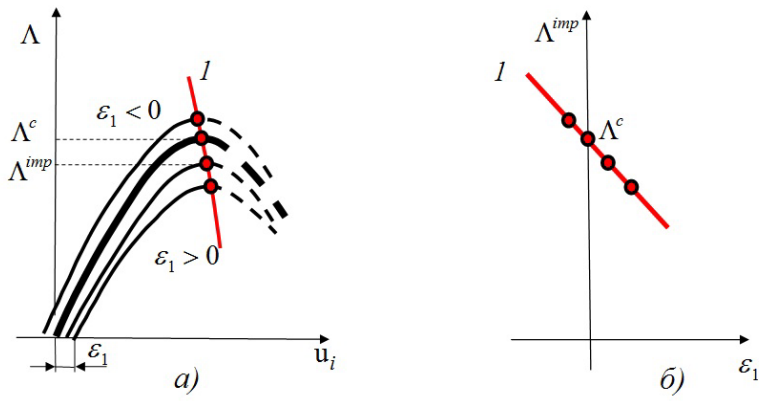


Рисунок 1. Прямая критических состояний

4. Анализ чувствительности критического множителя нагрузки для некратной предельной точки

Для разложения в ряд Тейлора критического множителя и критических перемещений Λ^{imp} и $\mathbf{u}^{imp}$ необходимо определить их производные по параметрам продвижения $t_1, t_2, \ldots, t_m$ вдоль *m*-мерной поверхности критических состояний.

Не нарушая общности, для упрощения рассмотрим два случайных несовершенства ε_1 и ε_2 (*m* = 2). Параметрические уравнения 2-мерной поверхности критических состояний имеют вид:

$$\mathbf{u}^{imp} = \mathbf{u}^{imp}(t_1, t_2), \quad \Lambda^{imp} = \Lambda^{imp}(t_1, t_2), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(t_1, t_2). \tag{13}$$

Все значения t_1 и t_2, меняющиеся в некоторой области, дают координаты всех точек 2-мерной поверхности критических состояний.

Разложим Λ^{imp}, ε_1, ε_2 в ряд Тейлора в окрестности точки (t_1^0, t_2^0), где t_1^0, t_2^0 соответствуют отсутствию несовершенств у стержневой конструкции, т. е. $\varepsilon_1(t_1^0, t_2^0) = 0$, $\varepsilon_2(t_1^0, t_2^0) = 0$. Можно записать, пренебрегая компонентами второго и более порядков малости,

$$\Lambda^{imp}(t_1, t_2) = \Lambda^{imp}(t_1^0, t_2^0) + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0)\Delta t_1 + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0)\Delta t_2; \tag{14}$$

$$\varepsilon_1(t_1, t_2) = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0)\Delta t_1 + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0)\Delta t_2; \tag{15}$$

$$\varepsilon_2(t_1, t_2) = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0)\Delta t_1 + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0)\Delta t_2, \tag{16}$$

где t_1 и t_2 – параметры продвижения вдоль поверхности критических состояний, а производные $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0)$, $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0)$ по параметрам продвижения t_1 и t_2 вдоль 2-мерной поверхности критических состояний определяются из уравнения (11) следующим образом:

$$\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_1} = -\frac{\mathbf{\Phi}_1^T \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c}{\mathbf{\Phi}_1^T \mathbf{r}_{\Lambda}^c} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t_1}; \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_2} = -\frac{\mathbf{\Phi}_1^T \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c}{\mathbf{\Phi}_1^T \mathbf{r}_{\Lambda}^c} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t_2}. \tag{18}$$

Предположим, что $t_1 = \varepsilon_1$, а $t_2 = \varepsilon_2$. Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_1} = 1, \ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_2} = 0, \ \ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_1} = 0, \ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_2} = 1. \tag{19}$$

Используя (19) в уравнениях (15) и (16), получим

$$\Delta t_1 = \varepsilon_1, \ \Delta t_2 = \varepsilon_2 . \tag{20}$$

Следовательно, уравнение (14) приводится к виду:

$$\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Lambda^c + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1}(0,0)\, \varepsilon_1 + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_2}(0,0)\, \varepsilon_2 . \tag{21}$$

Формула (21) легко обобщается на случай *m* несовершенств:

$$\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = \Lambda^c + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}(0,0, \ldots, 0)\, \varepsilon_i \ , \tag{22}$$

где Λ^c – критический множитель нагрузки $\mathbf{P}_0$ для конструкции без несовершенств, соответствующий предельной точке.

5. Анализ чувствительности вектора перемещений для некратной предельной точки

Пренебрегая компонентами второго и более порядков малости, можно записать:

$$\mathbf{u}^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = \mathbf{u}^c + \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(0,0, \ldots, 0)\, \boldsymbol{\varepsilon} . \tag{23}$$

Матрица $\mathbf{K}^c$ в уравнении (9) является особенной, и нахождение $\dot{\mathbf{u}}^{imp} = \dfrac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ из (9) становится невозможным. Так как критическая точка – некратная точка, то необходимо записать только одно дополнительное уравнение. Для получения этого дополнительного уравнения дифференцируем уравнение (8) по ε_1. Тогда можно записать:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{K}^c \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial \varepsilon_1} = \{0\}. \tag{24}$$

Умножим слева уравнение (24) на $\mathbf{\Phi}_1^T$ и получим одно дополнительное уравнение для определения $\dfrac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1}$:

$$\mathbf{\Phi}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \mathbf{\Phi}_1 = 0 . \tag{25}$$

Итак, имеем *n* уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^c \dfrac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \dfrac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial \Lambda} \dfrac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \dfrac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dfrac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} = \{0\}, \\ \mathbf{\Phi}_1^T \left(\dfrac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \dfrac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \dfrac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dfrac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \dfrac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \mathbf{\Phi}_1 = 0 \end{cases} \tag{26}$$

для определения производной $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1}$. Аналогично определяются остальные производные $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_2}, \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_3}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_m}$, входящие в неизвестную матрицу $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$.

Теперь мы имеем методику определения производных критического множителя нагрузки и критических перемещений по параметрам продвижения по *m*-мерной поверхности критических состояний. В частности, имеем производные от Λ^{imp} и $\mathbf{u}^{imp}$ по случайным несовершенствам $\boldsymbol{\varepsilon}$.

6. Вероятность критической нагрузки общей потери устойчивости для некратной предельной точки

Рассмотрим пока два независимых нормально распределенных случайных несовершенства ε_1 и ε_2. Их плотности распределения вероятностей определяются как

$$f_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon_1 - m_{\varepsilon_1})^2}{2\sigma_{\varepsilon_1}^2}},$$
$$f_2(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon_2 - m_{\varepsilon_2})^2}{2\sigma_{\varepsilon_2}^2}}, \quad (27)$$

где m_{ε_1}, m_{ε_2} – математические ожидания нормальных случайных несовершенств ε_1, ε_2; σ_{ε_1}, σ_{ε_2} – средние квадратичные отклонения нормальных случайных несовершенств.

Сначала найдем плотность распределения вероятностей случайной величины $\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при фиксированных Λ^c, $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1}$ и $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_2}$ в уравнении (21). Функция $\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ представляет собой плоскость *1* в пространстве Λ^{imp}, ε_1, ε_2 (рис. 2). Плоскость *2*, параллельная плоскости $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$, на текущем расстоянии λ^{imp} пересечет плоскость *1* по прямой $\lambda^{imp} = \Lambda^c + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_2}\varepsilon_2$. Эта прямая *3* разделит плоскость $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$ на две области.

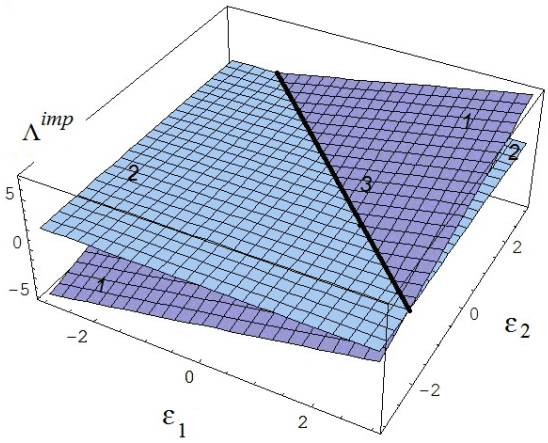


Рисунок 2. Функция $\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Запишем функцию распределения случайной величины :

$$G\left(\Lambda^{imp}\right)=P\left(\Lambda^{c}+\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1+\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_2<\lambda^{imp}\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\frac{\lambda^{imp}-\Lambda^{c}-\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1}{\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}}} f\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)d\varepsilon_2\right\}d\varepsilon_1 \quad (28)$$

Так как случайные несовершенства ε_1 и ε_2 независимы, то совместная плотность распределения $f\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ определяется как [31]

$$f\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)=f_1\left(\varepsilon_1\right)f_2\left(\varepsilon_2\right). \quad (29)$$

Используя теорему Барроу для (28), т. е. дифференцируя функцию распределения случайной величины Λ^{imp} по переменной λ^{imp}, получим плотность распределения вероятностей случайной величины Λ^{imp}:

$$g\left(\Lambda^{imp}\right)=\frac{dG\left(\Lambda^{imp}\right)}{d\lambda^{imp}}=\frac{1}{\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1\left(\varepsilon_1\right)f_2\left(\frac{\Lambda^{imp}-\Lambda^{c}-\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1}{\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}}\right)d\varepsilon_1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\right)^2\sigma_{\varepsilon_1}^2+\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\right)^2\sigma_{\varepsilon_2}^2}}e^{-\frac{\left(\Lambda^{imp}-\left(\Lambda^{c}+\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}m_{\varepsilon_1}+\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}m_{\varepsilon_2}\right)\right)^2}{2\left(\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\right)^2\sigma_{\varepsilon_1}^2+\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\right)^2\sigma_{\varepsilon_2}^2\right)}}. \quad (30)$$

Аналогичное выражение было получено в работе [31] другим способом.

Таким образом, плотность распределения вероятностей случайной величины Λ^{imp} есть нормальный закон с математическим ожиданием

$$m_{\Lambda^{imp}}=\Lambda^{c}+\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}m_{\varepsilon_1}+\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}m_{\varepsilon_2} \quad (31)$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{\Lambda^{imp}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\right)^2\sigma_{\varepsilon_1}^2+\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\right)^2\sigma_{\varepsilon_2}^2}. \quad (32)$$

По методу математической индукции линейная функция $\Lambda^{imp} = \Lambda^c + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i$ с m независимыми нормальными случайными несовершенствами ε_i распределена нормально:

$$g\left(\Lambda^{imp}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}} e^{-\frac{\left(\Lambda^{imp} - \left(\Lambda^c + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} m_{\varepsilon_i}\right)\right)^2}{2\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2\right)}} \tag{33}$$

с математическим ожиданием

$$m_{\Lambda^{imp}} = \Lambda^c + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} m_{\varepsilon_i} \tag{34}$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{\Lambda^{imp}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2} \ . \tag{35}$$

На рисунке 3 показана форма функции плотности распределения вероятности нагрузки общей потери устойчивости для некратной предельной точки.

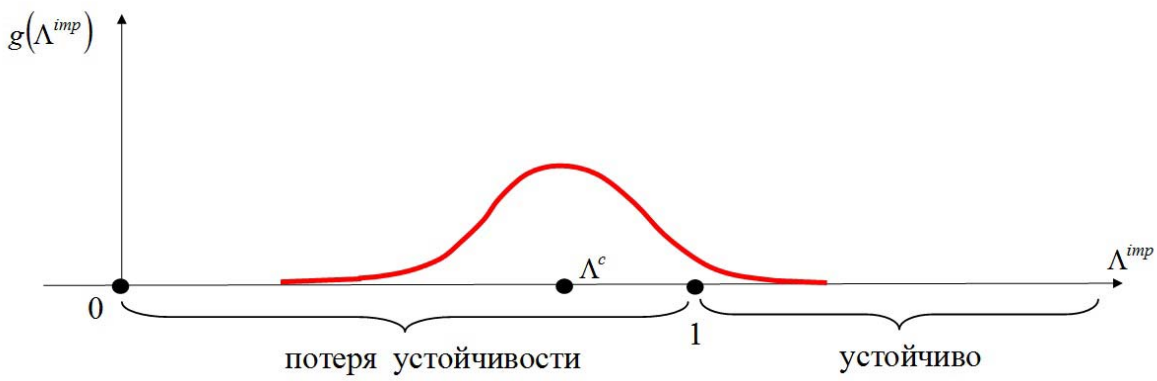


Рисунок 3. Функция плотности распределения вероятности Λ^{imp}

Важно отметить, что функция плотности распределения вероятности критической нагрузки общей потери устойчивости Λ^{imp} зависит от управляемых параметров конструкции $\mathbf{X}$. Поэтому график плотности вероятности случайной величины Λ^{imp} смещается относительно точки потери устойчивости $\Lambda^{imp} = 1$ (рис. 3).

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины Λ^{imp} в интервал общей потери устойчивости $(0, 1)$ (рис. 3) равна определенному интегралу от плотности распределения вероятности $g\left(\Lambda^{imp}\right)$:

$$P\left(0 < \Lambda^{imp} < 1\right) = \int_0^1 g\left(\Lambda^{imp}\right) d\Lambda^{imp} \ . \tag{36}$$

Выражение (36) позволяет подсчитать искомую вероятность критической нагрузки общей потери устойчивости для предельной точки. Функция плотности $g\left(\Lambda^{imp}\right)$ распределения вероятностей случайной величины Λ^{imp} определяется по (33), где производные $\dfrac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_i}$ находятся по формуле:

$$\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_i}=-\frac{\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c}{\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{r}_{\Lambda}^c}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\varepsilon_i}\ , \tag{37}$$

а m_{ε_i}, σ_{ε_i} – заданные параметры случайных нормальных несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$.

7. Пример расчета

Рассмотрим пространственный купол с тремя степенями свободы, нагруженный в узле 1 сосредоточенной силой $P_0=3{,}041\cdot10^7$ Н (рис. 4). На рисунке 5 также представлен вид купола сверху. Модуль упругости $E=6{,}895\cdot10^{10}$ Н/м^2, удельный вес $\rho g=26977{,}5$ Н/м^3. А – площади поперечных сечений элементов. Независимые случайные несовершенства $\boldsymbol{\varepsilon}$ подчинены нормальному закону распределения с математическими ожиданиями, равными нулю, и заданными средними квадратичными отклонениями.

Расстояние S = 1 м; ε_1 – несовершенство модуля упругости E элементов фермы 1 и 3; ε_2 – несовершенство координаты z узла 1; ε_3 – несовершенство модуля упругости E элементов фермы 2 и 4. Средние квадратичные отклонения σ_1, σ_2, σ_3 для трех независимых несовершенств ε_1, ε_2, ε_3 равны 1962 МПа, 0,005 м, 981 МПа.

Параметрами проектирования являются площади поперечных сечений A, м^2, элементов и высота H, м, купола. Допустимая область F определяется следующими ограничениями на параметры проектирования: $0{,}0012\le A\le0{,}002$, $0{,}5\le H\le0{,}6$ и также ограничением на вероятность безотказной работы конструкции $1-P\left(0<\Lambda^{imp}<1\right)\ge0{,}99$.

Полная потенциальная энергия купола записывается в виде:

$$\Pi=-\Lambda P_0u_z+\frac{2A}{\sqrt{\left(S^2+4(H-\varepsilon_2)^2\right)^3}}$$
$$\left[S^2\left(u_x^2(E+\varepsilon_1)+u_y^2(E+\varepsilon_3)\right)+(2E+\varepsilon_1+\varepsilon_3)\left(u_x^2+u_y^2+u_z(-2H+u_z+2\varepsilon_2)\right)^2\right].$$

Критический множитель нагрузки общей потери устойчивости купола определяется из уравнения (22) и имеет вид:

$$\Lambda^{imp}=\frac{32AEH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{\left(4H^2+S^2\right)^3}}+\frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{\left(4H^2+S^2\right)^3}}\varepsilon_1-\frac{32AEH^2S^2}{P_0\sqrt{3}\sqrt{\left(4H^2+S^2\right)^5}}\varepsilon_2+$$
$$+\frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{\left(4H^2+S^2\right)^3}}\varepsilon_3.$$

Оптимальный проект купола определяется некратной предельной точкой $\{\mathbf{X}^*\} = \{1321{,}93\,\text{мм}^2; 600\,\text{мм}\}$ с весом $W_{opt} = 11{,}357$ кГ (рис. 6), где 1 соответствует ограничению, состоящему в том, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99; 4, 5, 6 – кривые уровней целевой функции. На рисунке 6 показаны ограничения 2 и 3, где вероятность безотказной работы конструкции равна 0,95 и 0,90 соответственно.

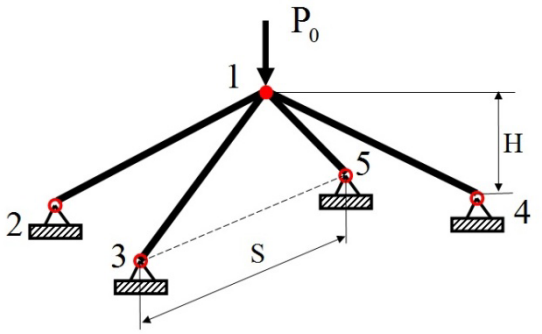


Рисунок 4. Пространственный купол

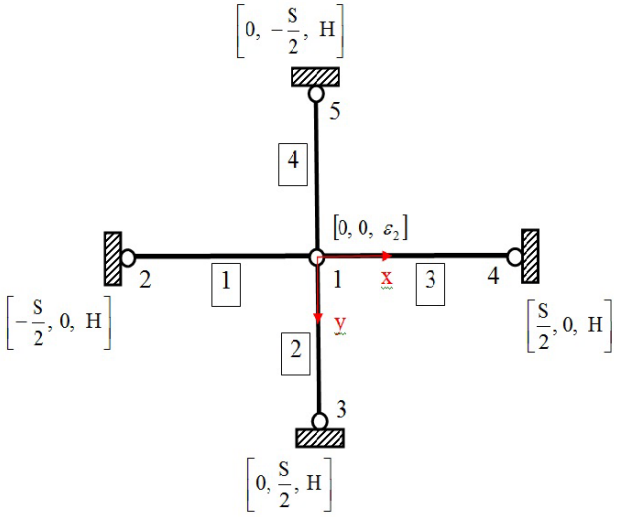


Рисунок 5. Вид пространственного купола сверху

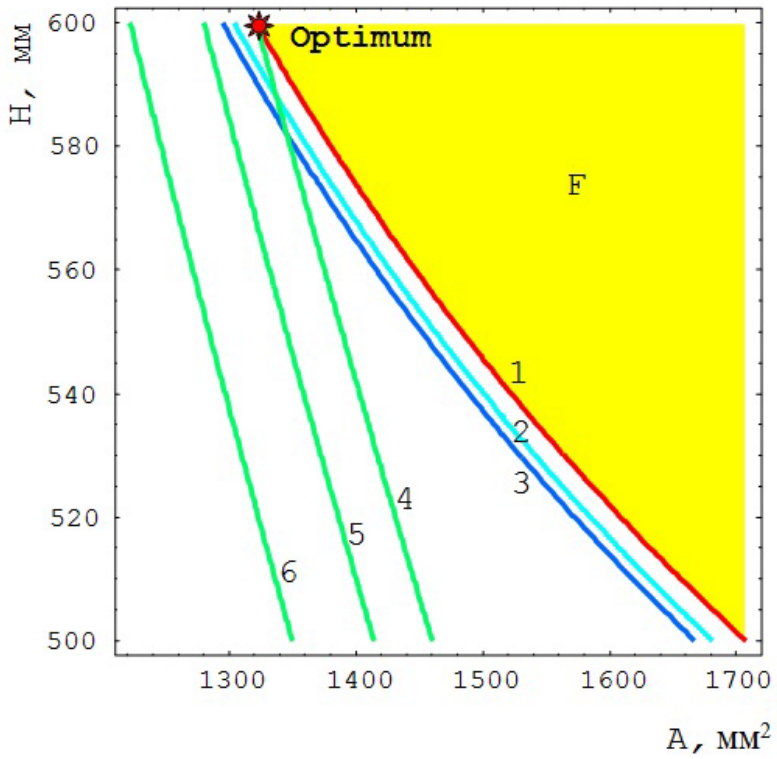


Рисунок 6. Графическое решение задачи оптимизации массы купола

Заключение

Сформулирована и решена новая задача оптимизации по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с ограничениями на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Проанализированы свойства функции плотности распределения вероятности критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции при наличии *m* независимых нормальных случайных несовершенств. Для некратной предельной критической точки решен тестовый пример.

Литература

1. Arnold M.A. van der Heijden. W.T. Koiter's elastic stability of solids and structures. New York: Cambridge University Press, 2009. 230 p.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
3. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2003. 256 с.
4. Каган-Розенцвейг Л. М. О расчете упругих рам на устойчивость // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 74–78.
5. Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней // Инженерно-строительный журнал. 2013. №1(36). С. 87–96.
6. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимальное проектирование геометрически нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках // Морские интеллектуальные технологии. 2010. №1(7). С. 45–48.
7. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Оптимизация геометрически нелинейных стержневых конструкций с начальными глобальными несовершенствами // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2010. Вып. 72. С. 100–112.
8. Ohsaki M., Ikeda K. Stability and Optimization of Structures–Generalized Sensitivity Analysis. New York: Springer-Verlag, 2007. 269 p.
9. Bojczuk D., Mroz Z. Nonlinear sensitivity analysis of discrete structures // Foundations of civil and environmental engineering. 2002. No.1. Pp. 19–41.
10. Polynkin A.A., Keulen F., Toropov V.V. Optimization of geometrically nonlinear thin-walled structures using the multipoint approximation method // Structural optimization. 1995. Vol. 9. No.2. Pp. 105–116.
11. Gravesen J., Evgrafov A., Nguyen D.M. On the sensitivities of multiple eigenvalues // Structural and Multidisciplinary optimization. 2011. Vol. 44. Issue 4. Pp. 583–587.
12. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках // Инженерно-строительный журнал. 2010. №5(15). С. 16–30.
13. Жгутов В. М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7(9). С. 55–64.
14. Жгутов В. М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. II // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8(10). С. 31–39.
15. Жгутов В.М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. III // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6(16). С. 23–37.
16. Ohsaki M., Ikeda K. Imperfection sensitivity analysis of hilltop branching with many symmetric bifurcation points // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Issue 16. Pp. 4704–4719.
17. Ikeda K., Murota K., Elishakoff I. Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections // Computers & Structures. 1996. Vol. 59. No.3. Pp. 463–469.
18. Mróz Z., Piekarski J. Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1998. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1231–1262.

19. Балыкин С.В., Фрумен А.И. Влияние начальной погиби, соответствующей форме потери устойчивости сферической оболочки из оргстекла, на ее критическое давление // Тезисы докладов XXIII Международной конференции. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург: 28 сентября – 01 октября 2009 г. С. 38–40.

20. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимизация по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с несовершенствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. Вып. 4. Часть 5. С. 2232–2234.

21. Lindgaard E., Lund E., Rasmussen K. Nonlinear buckling optimization of composite structures considering “worst” shape imperfections // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Issues 22–23. Pp. 3186–3202.

22. Valdebenito M.A., Schuëller G.I. A survey on approaches for reliability-based optimization // Structural and Multidisciplinary optimization. 2010. Vol. 42. Issue 5. Pp. 645–663.

23. Selyugin S.V. On optimal geometrically non-linear trusses // Structural and Multidisciplinary optimization. 2005. Vol. 29. Issue 2. Pp. 113–124.

24. Krużelecki J., Stawiarski A. Optimal design of thin-walled columns for buckling under loadings controlled by displacements // Structural and Multidisciplinary optimization. 2010. Vol. 42. Issue 2. Pp. 305–314.

25. Любимов А.К., Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях по устойчивости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2012. Вып. 74. С. 134–145.

26. Ohsaki M. Optimization of finite dimensional structures. USA: CRC Press, 2010. 439 p.

27. Belytschko T., Lio W.K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. New York: John Wiley & Sons, 2001. 650 p.

28. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol.1. New York: John Wiley & Sons, 1991. 345 p.

29. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol.2. New York: John Wiley & Sons, 1997. 494 p.

30. Antmann S.S. Nonlinear problems of elasticity. New York: Springer-Verlag, 2005. 835 p.

31. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: КНОРУС. 2010. 480 с.

Олег Анатольевич Сергеев, г. Нижний Новгород, Россия
Тел. моб.: +7(910)797-41-90; эл. почта: nnsoa@rambler.ru

Владимир Геннадьевич Киселев, г. Нижний Новгород, Россия
Тел. раб.: +7(831)433-20-10; эл. почта: kivg@mts-nn.ru

Светлана Анатольевна Сергеева, г. Нижний Новгород, Россия
Тел. моб.: +7(904)064-86-51; эл. почта: nnsveta@rambler.ru

Коррозионный рост трещин и усталостная прочность сложных технических систем

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник А.Р. Арутюнян;
д.ф.-м.н., профессор Р.А. Арутюнян,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Аннотация. Рассматривается проблема надежности сложных механических систем, состоящих из некоторого числа элементов с дефектами типа трещин, скорость роста которых в значительной степени определяется процессами коррозионной усталости. К таким системам могут быть отнесены различные инженерные конструкции: энергетические, транспортные, химические и др.

Учитывая, что надежность системы в целом зависит от надежности отдельных элементов и способа их соединения, авторы рассмотрели системы с последовательным, параллельным соединением элементов и системы с резервированием. Для каждой системы определены функции надежности на основе распределения Вейбулла. Сформулированы критерии коррозионной усталости и построены соответствующие кривые усталостной прочности.

По результатам расчетов получены практические рекомендации по проектированию сложных технических систем.

Ключевые слова: рост коррозионных трещин; критерий прочности Гриффитса; сложные механические системы; последовательное соединение элементов; соединение элементов с резервированием; критерий усталости

Постановка задачи

Большинство современных технических систем подвергаются воздействию циклических нагрузок различной частоты. Такие нагрузки приводят к усталостным разрушениям [1, 2], которые, согласно мировой статистике, составляют от 80 до 90% всех разрушений. В последние десятилетия в связи с многочисленными случаями эксплуатационных разрушений в различных областях инженерной практики, возникающих при низких, но длительно действующих циклических нагрузках, выполнены многочисленные исследования в области многоцикловой (гигацикловой) усталости [3–5]. Эти исследования, востребованные во многих областях современной инженерной практики, в частности в строительстве (мосты, платформы, различные транспортные системы), указывают на необходимость пересмотра концепции существования бесконечной долговечности при напряжениях ниже предела усталости.

Обзор литературы

Как показывают многочисленные опыты [6–12], выполненные над различными конструкционными материалами, под воздействием коррозионной среды на кривых усталости не наблюдается явно выраженного предела усталости. Эти положения являются достоверными в случае воздействия циклических нагрузок и агрессивных (коррозионных) сред. При наличии коррозионной среды происходит интенсификация физико-химических процессов, соответственно, возникновение некоторых характерных эффектов. Действительно, при наличии коррозионной среды на кривых усталости отсутствует горизонтальный участок, а на кинетических диаграммах роста коррозионно-усталостных трещин не удается выделить пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений [13, 14]. Таким образом, отсутствуют показатели, по которым можно вести расчет на долговременную эксплуатационную надежность материалов и конструкций. Для учета этих положений и формулировки критерия коррозионно-усталостной прочности в работе используются методы механики материалов, в частности, уравнение роста трещин и методы теории надежности.

Кинетическое уравнение роста коррозионных трещин

Для роста трещины в коррозионной среде формулируется кинетическое уравнение, основанное на описании химических процессов растворения металла в кончике трещины. Считается, что коррозионные процессы контролируются кинетическим уравнением, соответствующим реакции разложения твердого раствора, а коэффициент интенсивности напряжений является ответственным за ускорение коррозионных процессов [14]. Как показывают

опыты, при воздействии агрессивной среды происходит ускорение роста трещин усталости. При этом получаются разнообразные диаграммы коррозионно-усталостного роста трещины [13], скорость которой зависит, в частности, от частоты нагружения. Для описания этих эффектов в работе предлагается записывать кинетическое уравнение роста трещин в шкале эффективного времени [12]: $z = tf^{\alpha} = Nf^{\alpha-1}$ ($f = N/t$), где f – частота нагружения; t – реальное время; N – число циклов нагружения; α – постоянная.

Исходя из этих положений, запишем кинетическое уравнение роста коррозионных трещин в следующем виде:

$$\frac{dl}{dz} = F(\Delta K)z^{\beta}, \tag{1}$$

где l – текущая длина трещины; ΔK – размах коэффициента интенсивности напряжений за цикл; F – некоторая функция от ΔK; β – постоянная.

Далее для функции F принимается степенная зависимость в виде:

$$F(\Delta K) = K_1(\Delta K)^m, \tag{2}$$

где K_1, m – постоянные.

Внося (2) в уравнение (1) и записывая это уравнение через число циклов нагружения, когда $z = N$ ($\alpha = 1$), получим:

$$\frac{dl}{dN} = K_1(\Delta K)^m N^{\beta}. \tag{3}$$

При $\beta = 0$ из уравнения (1) следует кинетическое уравнение Пэриса – Эрдогана [15].

Принимая $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi l}$ ($\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$, σ_{max}, σ_{min} – максимальное и минимальное напряжения за цикл) и начальные условия $N = 0$, $l = l_0$, получим решение уравнения (3) в виде:

$$l = \left[\frac{2-m}{2(\beta+1)}(\Delta\sigma)^m \pi^{m/2} K_1 N^{\beta+1} + l_0^{\frac{2-m}{2}}\right]^{\frac{2}{2-m}}. \tag{4}$$

Для описания чисто коррозионного роста трещин в уравнении (1) можно считать $F(\Delta K) = const = F_0$, $\alpha = 0$ ($z = t$), тогда из (1) следует:

$$\frac{dl}{dt} = F_0\, t^{\beta}. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) при начальном условии $N = 0$, $l = l_0$ имеет вид:

$$l = \frac{F_0}{\beta+1} t^{\beta+1} + l_0. \tag{6}$$

На рисунке 1 показаны кривые роста трещин усталости для разных значений напряжений согласно формулам (4) и (6). Приняты следующие значения коэффициентов: $m = 4$, $l_0 = 10^{-6}$ *м*, $\beta = 1$, $F_0 = 5 \cdot 10^{-20}[м] \cdot [цикл.]^{-2}$, $K_1 = 3 \cdot 10^{-15}[м]^{-1} \cdot [цикл.]^{-2} \cdot [МПа]^{-4}$.

Согласно кривым на рисунке 1, в случае отсутствия внешнего напряжения после инкубационного периода наблюдается медленный рост трещины (кривая 3). При воздействии напряжения и коррозионной среды инкубационный период завершается ускоренным ростом трещины до разрушения образца (кривые 1, 2).

В механике материалов считается, что разрушение образца с трещиной наступает при достижении длины трещины критической величины l_*. В случае хрупких материалов условие разрушения определяется критерием Гриффитса [16], согласно которому критическая длина трещины соответствует уровню критического напряжения

$$l_* = \frac{2\gamma E}{\pi(\Delta\sigma)^2}, \tag{7}$$

где γ – поверхностная энергия; E – модуль Юнга.

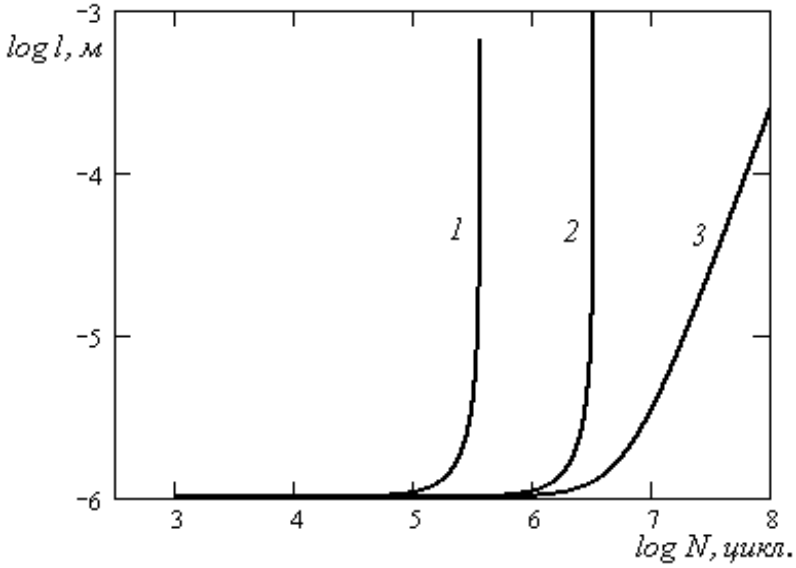


Рисунок 1. Теоретические кривые роста трещин усталости по формуле (4): кривая 1 – $\Delta\sigma = 150MPa$, кривая 2 – $\Delta\sigma = 50MPa$ и по формуле (6) – кривая 3

Отметим, что в случае циклических нагружений при построении кривых усталости в качестве $\Delta\sigma$ следует рассматривать амплитуду напряжения $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ или максимальное напряжение цикла σ_{max}.

Согласно концепции Гриффитса разрушение не произойдет, если длина трещины меньше критической. При этом не рассматривается практически важный случай медленного роста трещин меньше критических размеров под воздействием напряжений и коррозионной среды, когда рост трещины можно описать с помощью соотношения (4). Этот подход используется при формулировке критерия прочности для элемента среды и сложных механических систем.

Критерий усталости для образца (элемента среды)

Сначала рассмотрим критерий усталости для элемента среды, дефектное состояние которого определяется некоторым числом начальных трещин, размеры которых изменяются в пределах $l_0 \le l \le l_*$. Считая распределение размеров начальных трещин случайным, функцию надежности зададим в виде экспоненциальной зависимости Вейбулла [17]:

$$R_0(l) = \frac{e^{-\lambda l^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}{e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}, \tag{8}$$

где λ, φ – постоянные.

С учетом (4) функцию надежности (8) можно записать через число циклов нагружения N:

$$R_0(N) = \frac{e^{-\lambda l^\varphi(N)} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}{e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}. \tag{9}$$

Задавая уровень надежности $R_0 = R_*$ и учитывая уравнение (4), из соотношения (9) получим критерий усталостной прочности для элемента среды:

$$(\Delta\sigma)^m N^{\beta+1} = \frac{2(\beta+1)}{(2-m)\pi^{m/2}K_1}\left[\left(-\frac{1}{\lambda}ln(C)\right)^{\frac{2-m}{2\varphi}} - l_0^{\frac{2-m}{2}}\right], \quad (10)$$

где $C = R_*\left(e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}\right) + e^{-\lambda l_*^\varphi}$; $l_* = \frac{2\gamma E}{\pi(\Delta\sigma)^2}$.

Вероятностный критерий коррозионно-усталостной прочности сложных механических систем

Далее формулируется вероятностный критерий [17–22] коррозионно-усталостной прочности сложных систем с последовательным соединением элементов и с резервированием.

Пусть элементы взаимодействуют так, что отказ любого из них приводит к отказу системы. Такое соединение называют последовательным. При одинаковых показателях надежности всех элементов функция надежности последовательно соединенных n элементов имеет вид:

$$R(N) = R_0^n(N) = \left(\frac{e^{-\lambda l^\varphi(N)} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}{e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}\right)^n. \quad (11)$$

Задавая уровень надежности $R = R_*$ и учитывая уравнение (4), из соотношения (11) получим критерий усталостной прочности для системы с последовательным соединением элементов:

$$(\Delta\sigma)^m N^{\beta+1} = \frac{2(\beta+1)}{(2-m)\pi^{m/2}K_1}\left(\left(-\frac{1}{\lambda}ln(C_1)\right)^{\frac{2-m}{2\varphi}} - l_0^{\frac{2-m}{2}}\right), \quad (12)$$

где $C_1 = R_*^{\frac{1}{n}}\left(e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}\right) + e^{-\lambda l_*^\varphi}$; $l_* = \frac{2\gamma E}{\pi(\Delta\sigma)^2}$.

В случае параллельного соединения k элементов отказ системы будет происходить при отказе всех элементов, а функция надежности будет выражаться в виде:

$$R(N) = 1 - [1 - R_0(N)]^k = 1 - \left(1 - \frac{e^{-\lambda l^\varphi(N)} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}{e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}}\right)^k. \quad (13)$$

Критерий коррозионной усталости для систем с параллельным соединением элементов имеет вид:

$$(\Delta\sigma)^m N^{\beta+1} = \frac{2(\beta+1)}{(2-m)\pi^{m/2}K_1}\left\{\left[-\frac{1}{\lambda}ln(C_2)\right]^{\frac{2-m}{2\varphi}} - l_0^{\frac{2-m}{2}}\right\}, \quad (14)$$

где $C_2 = \left[1 - (1 - R_*)^{\frac{1}{k}}\right]\left(e^{-\lambda l_0^\varphi} - e^{-\lambda l_*^\varphi}\right) + e^{-\lambda l_*^\varphi}$; $l_* = \frac{2\gamma E}{\pi(\Delta\sigma)^2}$.

В случае общего резервирования с k параллельно и n последовательно соединенными элементами функция надежности и критерий усталости выражаются в виде:

$$R(N)=1-\left[1-R_0^n(N)\right]^k=1-\left[1-\left(\frac{e^{-\lambda l^{\varphi}(N)}-e^{-\lambda l_*^{\varphi}}}{e^{-\lambda l_0^{\varphi}}-e^{-\lambda l_*^{\varphi}}}\right)^n\right]^k; \quad (15)$$

$$(\Delta\sigma)^m N^{\beta+1}=\frac{2(\beta+1)}{(2-m)\pi^{m/2}K_1}\left(\left(-\frac{1}{\lambda}ln(C_3)\right)^{\frac{2-m}{2\varphi}}-l_0^{\frac{2-m}{2}}\right), \quad (16)$$

где $C_3=\left[1-(1-R_*)^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{1}{n}}\left(e^{-\lambda l_0^{\varphi}}-e^{-\lambda l_*^{\varphi}}\right)+e^{-\lambda l_*^{\varphi}}$, $l_*=\frac{2\gamma E}{\pi(\Delta\sigma)^2}$.

В случае раздельного резервирования функция надежности и критерий усталости выражаются следующими соотношениями:

$$R(N)=\left[1-(1-R_0(N))^k\right]^n=\left[1-\left(1-\frac{e^{-\lambda l^{\varphi}(N)}-e^{-\lambda l_*^{\varphi}}}{e^{-\lambda l_0^{\varphi}}-e^{-\lambda l_*^{\varphi}}}\right)^k\right]^n; \quad (17)$$

$$(\Delta\sigma)^m N^{\beta+1}=\frac{2(\beta+1)}{(2-m)\pi^{m/2}K_1}\left(\left(-\frac{1}{\lambda}ln(C_4)\right)^{\frac{2-m}{2\varphi}}-l_0^{\frac{2-m}{2}}\right), \quad (18)$$

где $C_4=\left[1-\left(1-R_*^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{k}}\right]\left(e^{-\lambda l_0^{\varphi}}-e^{-\lambda l_*^{\varphi}}\right)+e^{-\lambda l_*^{\varphi}}$, $l_*=\frac{2\gamma E}{\pi(\Delta\sigma)^2}$.

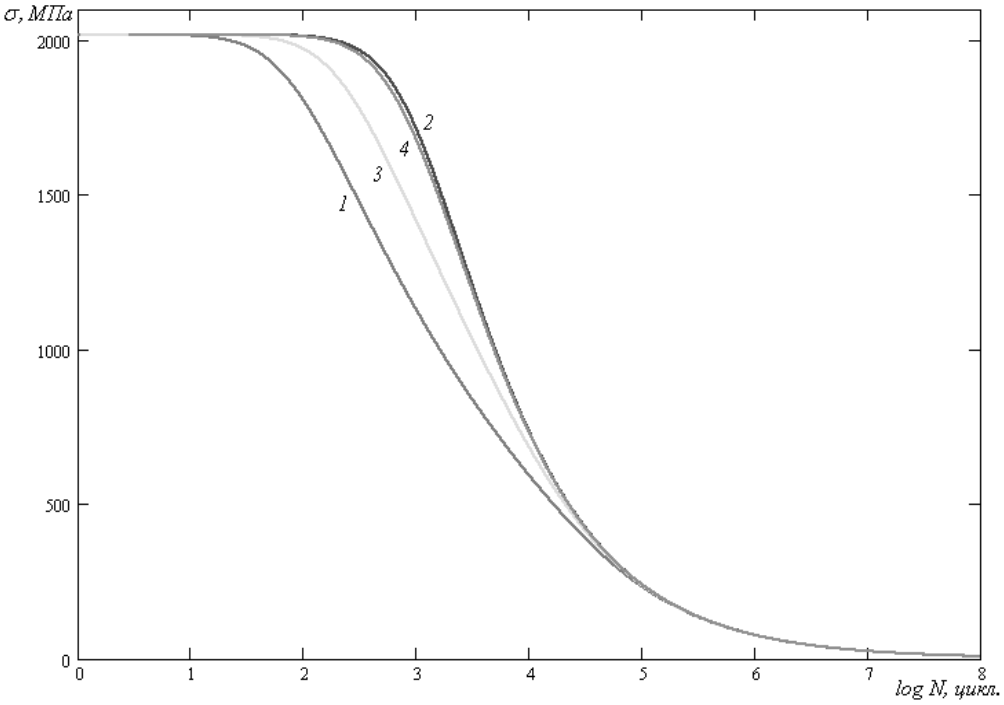


Рисунок 2. Кривые коррозионной усталости при $\beta=1$: 1 – последовательное, 2 – параллельное соединение элементов, 3 – случай общего и 4 – раздельного резервирования

Теоретические кривые усталости согласно формулам (12), (14), (16) и (18) отмечены на рисунке 2 цифрами 1, 2, 3 и 4 соответственно. При расчетах по этим формулам были использованы следующие величины коэффициентов: $K_1 = 3 \cdot 10^{-15} [м]^{-1} \cdot [цикл.]^{-2} \cdot [МПа]^{-4}$, $m = 4$, $l_0 = 10^{-3}$ м, $R_* = 0,8$, $C = 7,5 \cdot 10^{-11} [м]^{-1} \cdot [цикл.]^{-2} \cdot [МПа]^{-4}$, $\gamma = 0,15$ Дж / м^2, $E = 10^5$ МПа, $\lambda = 5[м]^{-1}$, $k = 10$, $n = 20$, $\varphi = 2$, $\beta = 1$.

Как следует из рисунка 2, на начальном и конечном участках кривые усталости совпадают. Значительное различие кривых усталости наблюдается на среднем участке.

Заключение

Сформулированы кинетические уравнения роста коррозионно-усталостных трещин и критерии усталостной прочности для образца с трещиной и сложных технических систем. Предполагается, что коррозионные процессы контролируются кинетическим уравнением, соответствующим реакции разложения твердого раствора, а коэффициент интенсивности напряжений является ответственным за ускорение коррозионных процессов. Считается, что в начальном состоянии трещины имеют размеры, которые являются безопасными для данного уровня напряжений. Под воздействием коррозионной среды происходит медленный квазистатический рост трещины и при достижении ее длиной критической величины, соответствующей данному уровню напряжения, настает мгновенное хрупкое разрушение согласно критерию хрупкой прочности Гриффитса.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Предложенные кинетические уравнения роста коррозионных трещин описывают характерные кривые роста коррозионно-усталостных трещин при отсутствии внешнего напряжения, которые отличаются от соответствующих кривых, полученных под воздействием внешнего напряжения.

2. Сформулированы критерии усталости для образца (элемента среды) и для сложных технических систем с последовательным соединением элементов и с резервированием, которые выражаются в виде единой аналитической зависимости и описывают все участки экспериментальных кривых усталости. Этот результат является новым в мировой научной литературе по усталости.

3. Показано, что долговечность сложных систем, построенных по принципу резервирования, значительно выше по сравнению с системой без резервирования. При этом схемы параллельного и раздельного резервирования являются наиболее надежными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №12-01-00594, №12-01-31257).

Литература

1. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. М.: Машиностроение, 1964. 276 с.
2. Коцаньда С. Усталостное растрескивание металлов. М.: Металлургия, 1990. 623 с.
3. Schijve J. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art // International journal of fatigue. 2003. Vol. 25. Issue 8. Pp. 679–702.
4. Ботвина Л.А. Гигацикловая усталость – новая проблема физики и механики разрушения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. №4. С. 41–51.
5. Bathias C. There is no infinite fatigue life in metallic materials // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 1999. Vol. 22. No.7. Pp. 559–565.
6. Chlistovsky R.M., Heffernan P.J., DuQuesnay D.L. Corrosion-fatigue behaviour of 7075-T651 aluminum alloy subjected to periodic overloads // International Journal of Fatigue. 2007. Vol. 29. Issues 9–11. Pp. 1941–1949.

7. Nan Z.Y., Ishihara S., Goshima T. Corrosion fatigue behavior of extruded magnesium alloy AZ31 in sodium chloride solution // International Journal of Fatigue. 2008. Vol. 30. Issue 7. Pp. 1181–1188.

8. Beretta S., Carboni M., Fiore G., Lo Conte A. Corrosion–fatigue of A1N railway axle steel exposed to rainwater // International Journal of Fatigue. 2010. Vol. 32. Issue 7. Pp. 952–961.

9. Bayraktar E., Mora R., Garcia I.-M., Bathias C. Heat treatment, surface roughness and corrosion effects on the damage mechanism of mechanical components in the very high cycle fatigue regime // International Journal of Fatigue. 2009. Vol. 31. Issue 10. Pp. 1532–1540.

10. Nascimento M.P., Voorwald H.J.C. Considerations on corrosion and weld repair effects on the fatigue strength of a steel structure critical to the flight-safety // International Journal of Fatigue. 2010. Vol. 32. Issue 7. Pp. 1200–1209.

11. Wasekar N.P., Jyothirmayi A., Sundararajan G. Influence of prior corrosion on the high cycle fatigue behavior of microarc oxidation coated 6061-T6 Aluminum alloy // International Journal of Fatigue. 2011. Vol. 33. Issue 9. Pp. 1268–1276.

12. Shahnewaz Bhuiyan Md., Mutoh Y. Corrosion fatigue behavior of conversion coated and painted AZ61 magnesium alloy // International Journal of Fatigue. 2011. Vol. 33. Pp. 1548–1556.

13. Романив О.Н., Никифорчин Г.Н. Механика коррозионного разрушения конструкционных сплавов. М.: Металлургия, 1986. 294 с.

14. Арутюнян Р.А., Денисова А.А. Кинетика роста коррозионных трещин и критерий усталостного разрушения // Вестник СПбГУ. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. Вып. 3. №17. С. 60–64.

15. Пэрис П., Эрдоган Ф. Критический анализ законов распространения трещин // Техническая механика. Труды Американского общества инженеров механиков. 1963. Серия D. Том 85. №4. С. 60–68.

16. Griffith A.A. The theory of rupture // Proceedings of the First International Congress of Applied Mechanics. Delft, 1924. Pp. 58–63.

17. Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability // Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. No.3. Pp. 293–297.

18. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252 с.

19. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 450 с.

20. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.

21. Арутюнян Р.А. Об одной вероятностной модели усталостного разрушения сложных систем // Доклады РАН. 1993. Т. 332. №3. С. 317–318.

22. Арутюнян Р.А. Оценка надежности сложных инженерных систем в условиях циклических нагружений // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1998. Вып. 4. №22. С. 64–67.

Александр Робертович Арутюнян, Санкт-Петербург, Россия
Тел. раб.: +7(812)526-65-91; эл. почта: arutalr@rambler.ru

Роберт Ашотович Арутюнян, Санкт-Петербург, Россия
Тел. раб.: +7(812)526-65-91; эл. почта: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

Учет малоцикловой усталости при оптимизации параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

Старший преподаватель Н.В. Ковалева,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»

Аннотация. В статье предложен алгоритм проектирования оптимальных параметров пластического демпфирования в системах сейсмоизоляции с учетом малоцикловой усталости. Приведены все этапы определения пластического ресурса демпферных стержней, входящих в состав пластического демпфирования систем сейсмоизоляции маятникового типа.

Этапы расчета включают в себя: решение динамической задачи на нестационарные сейсмические воздействия различной балльности и продолжительности; определение числа циклов нагружения; распределение числа циклов нагружения с различным уровнем перемещений; переход от перемещений к максимальным деформациям; установление допускаемого числа циклов и пластического ресурса стержня по имеющимся критериям (формула Коффина – Менсона и правило Палмгрема – Майнера).

Также показано, что обеспечение оптимальных параметров пластического демпфирования осуществляется за счет изменения количества стержней в демпфере либо изменения геометрии стрежня (длины, размеров сечения).

Ключевые слова: системы сейсмоизоляции маятникового типа; пластическое демпфирование; сейсмические воздействия; циклическое нагружение; малоцикловая усталость; пластический ресурс

Введение

Основной принцип защиты объектов от сейсмических воздействий основан на стремлении превратить систему защищаемый объект – сейсмоизоляция в низкочастотную. Вместе с тем необходимо обеспечить достаточно высокий уровень демпфирования, чтобы исключить резонансные явления при совпадении какой-либо частотной составляющей воздействия с частотой системы сейсмоизоляции. В качестве демпфирующих элементов могут быть использованы пластически деформируемые устройства. Например, в конструкции маятниковой опоры, разработанной ОАО «КБСМ» (Санкт-Петербург), пластические демпферы представляют собой консольные стержни [1–3] (рис. 1).

а) **б)**

Рисунок 1. Конструкция сейсмоопоры, разработанной ОАО «КБСМ»: а) сейсмоопора маятникового типа; б) пластические демпферы, используемые в данной сейсмоопоре

Оптимальные параметры пластического демпфирования обеспечиваются за счет изменения количества стержней в демпфере либо изменения геометрии стрежня (длины, размеров сечения). Однако, помимо динамических параметров, необходимо обеспечить достаточную работоспособность пластического демпфера в условиях циклических нагружений, которые сопровождают сейсмические воздействия. Основные сведения о поведении и свойствах металлов при циклических нагружениях отражены в работах В.В. Москвитина [4], В.П. Когаева [5], Ю.А. Окопного [6]. Необходимость учета малоцикловой усталости при сейсмостойком проектировании отражена в работах E. Simbort [7], S. Cambell [8], P. Fajfar [9], E. Cosenza [10, 11], R. Perera [12], A. Teran-Gilmor [13, 14]. Однако данные исследования проводились применительно к сейсмостойким зданиям. В настоящей статье рассмотрена проблема возникновения малоцикловой усталости у демпфирующих элементов, входящих в состав пластического демпфирования систем сейсмоизоляции маятникового типа. Для определения пластического ресурса элементов необходимо знать величины деформаций, возникающих при сейсмическом воздействии, поэтому отдельно разработан алгоритм их определения. Показано, что можно не только рассчитать проектируемую систему на малоцикловую усталость, но и предложить методику подбора конструктивных параметров демпфирования, чтобы обеспечить требуемый пластический ресурс демпфирующих элементов.

Методика определения пластического ресурса

При сейсмическом воздействии на конструкцию возникает циклическое нагружение демпферных стержней, при этом они работают в упругопластической зоне, то есть становится актуальной проблема малоцикловой усталости стержней. Иначе говоря, необходимо определить число циклов, при котором произойдет разрушение. Если в процессе сейсмического воздействия число циклов нагружения демпферных стержней не превзойдет допустимого, то система сейсмоизоляции работоспособна и у нее имеется требуемый пластический ресурс. Таким образом, методика определения пластического ресурса должна состоять из следующих этапов:

- решение динамической задачи и определение числа циклов нагружения;
- распределение числа циклов нагружения с различным уровнем перемещений;
- переход от перемещений к максимальным деформациям;
- по имеющимся критериям (формула Коффина – Менсона [5] и правило Палмгрема – Майнера [15]) установление допускаемого числа циклов и пластического ресурса стержня.

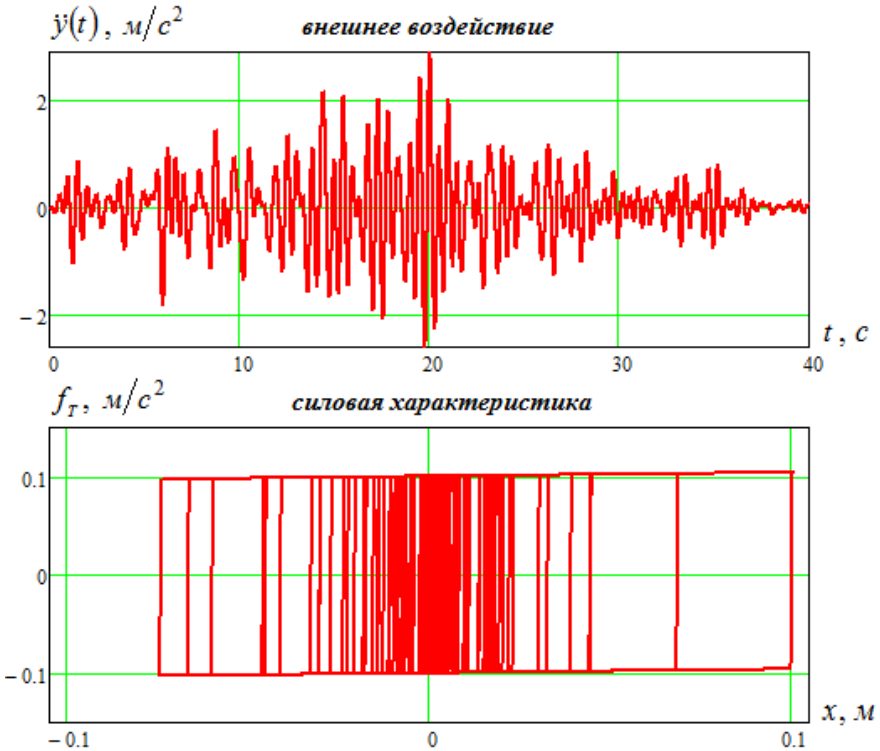


Рисунок 2. Пример динамического расчета системы с одной степенью свободы с нелинейным демпфированием на реальную акселерограмму

Решение динамической задачи описано в [2, 16] (рис. 2). Как видно из рисунка 2, в динамическом процессе происходит циклическое нагружение стержней с различной амплитудой. Если рассмотреть колебания за относительно небольшой промежуток времени, то картина циклов нагружения становится достаточно ясной (рис. 3). Из решения динамической задачи определяется число циклов с различной амплитудой по перемещению.

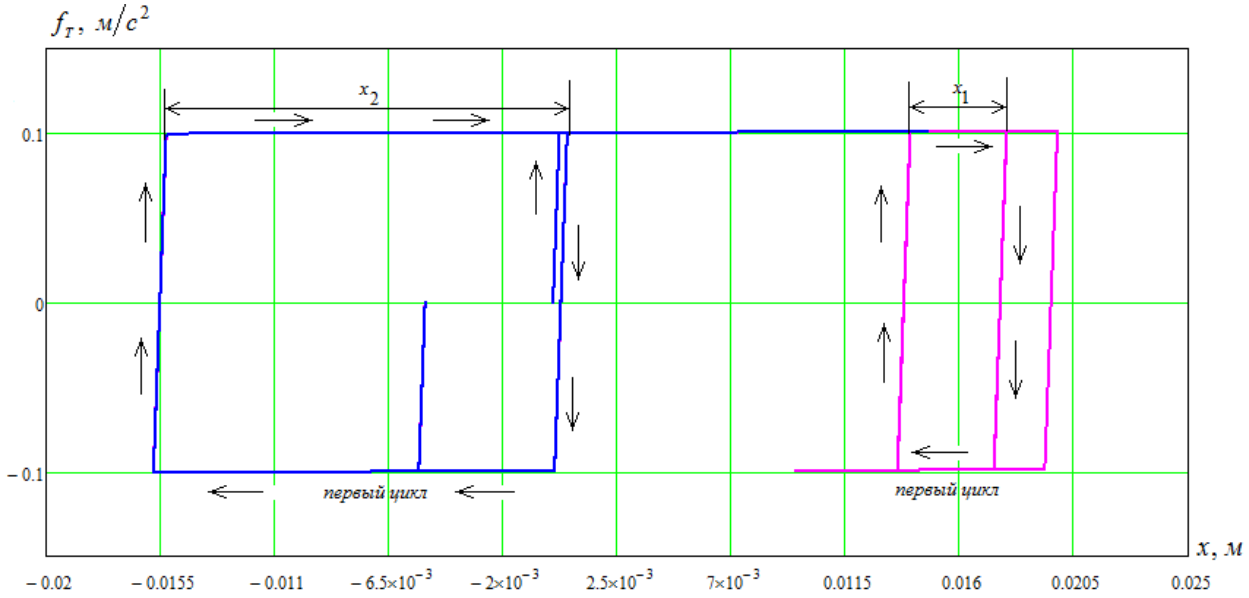


Рисунок 3. Пример определения циклов нагружения с различной амплитудой по перемещению

Переход от перемещений к максимальным деформациям описан в работе [17], где была получена методика определения зависимости усилие – перемещение для консольных стержней различной конфигурации и поперечных сечений в виде параметрических зависимостей $p(t)$ и $w(t)$. Для каждого перемещения x_i (считаем его равным прогибу консольного конца стержня w_i) определяем параметр t_i, который связан с деформацией стержня в крайних волокнах сечения следующим соотношением:

$$\varepsilon = t \cdot \varepsilon_T ,$$

где $\varepsilon_T \equiv \dfrac{\sigma_T}{E}$ – деформация текучести.

Допускаемое числе циклов и пластический ресурс стержня можно определить по методике, описанной в работе [18], где используется критерий малоцикловой прочности, основанный на линейном суммировании усталостных d_c (циклические деформации) и квазистатических d_s (односторонне накопленные деформации) повреждений [6].

Чтобы пластический ресурс не был превзойден, должно выполняться неравенство:

$$d_c + d_s \le 1 , \qquad (1)$$

где доля усталостного повреждения определяется по формуле:

$$d_c = \int_1^{N_k} \frac{dN}{N_{ci}} , \qquad (2)$$

где N – число циклов нагружения; N_k – число циклов до разрушения; N_{ci} – число циклов, определяемое для заданной в цикле деформации по формуле Коффина – Менсона [5]:

$$\varepsilon_c \cdot N_c^{0.5} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\psi}\ , \qquad (3)$$

где ε_c – величина пластической деформации;

ψ – относительное остаточное сужение материала.

Односторонне накопленная деформация определяется по формуле:

$$d_s = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_в}\ , \qquad (4)$$

где ε – односторонне накопленная деформация;

$\varepsilon_{\max}$ – односторонне накопленная деформация к моменту разрушения;

$\varepsilon_в$ – величина пластической деформации, соответствующей временному сопротивлению.

Если после расчетов неравенство (1) не выполняется, нехватку пластического ресурса можно устранить, варьируя геометрию и материал стержней.

Числовой пример

Как показано в статье [19], оптимальным уровнем демпфирования для системы сейсмоизоляции маятникового типа с использованием пластических демпферов с частотой 0,4 Гц будет $f_T = 0.1\ \ м/c^2$ – приведенное к единичной массе усилие, соответствующее переходу от первого участка билинейной силовой характеристики пластического демпфера ко второму. Поэтому в качестве примера была рассмотрена схема демпфирования со следующими параметрами:

- защищаемый объект – 9-этажное здание массой $M = 6000\ \ т$;
- система сейсмоизоляции состоит из 30 маятниковых опор грузоподъемностью $q = 200\ \ т$;
- в составе каждой опоры – пластический демпфер, состоящий из 20 стержней, $p_T = 1\ \ т$ для каждого стержня.

Исходя из данного параметра $p_T = 1\ \ т$, для каждого стержня с помощью методики, изложенной в работе [14], были подобраны:

- высота стрежня – 1,1 $м$;
- сечение стрежня – круглое, диаметром 60 $мм$;
- материал стержней – 01Х18Н9Т со следующими механическими характеристиками:

$$\sigma_T = 288 МПа\ ,\ \sigma_B = 646 МПа\ ,\ \delta = 64{,}5\%\ ,\ \psi = 75{,}2\%\ ,\ E = 2\cdot 10^5\ МПа.$$

Билинейная аппроксимация реальной силовой характеристики пластического демпфера характеризуется тремя параметрами (рис. 4). Для динамических расчетов удобнее пользоваться следующими величинами:

$$f_T = \frac{P_T}{m_0},\ \ \omega = \sqrt{\frac{c}{m_0}}\ ,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c_{пл}}{m_0}}\ ,$$

где $m_0 = \dfrac{q}{g}$, q – грузоподъемность (рабочая нагрузка) сейсмоопоры.

Характеристики пластического демпфирования одной сейсмоопоры приведены в таблице 1. Расчеты производились для воздействий разной балльности и продолжительности по времени. Результаты динамического расчета приведены в таблице 2.

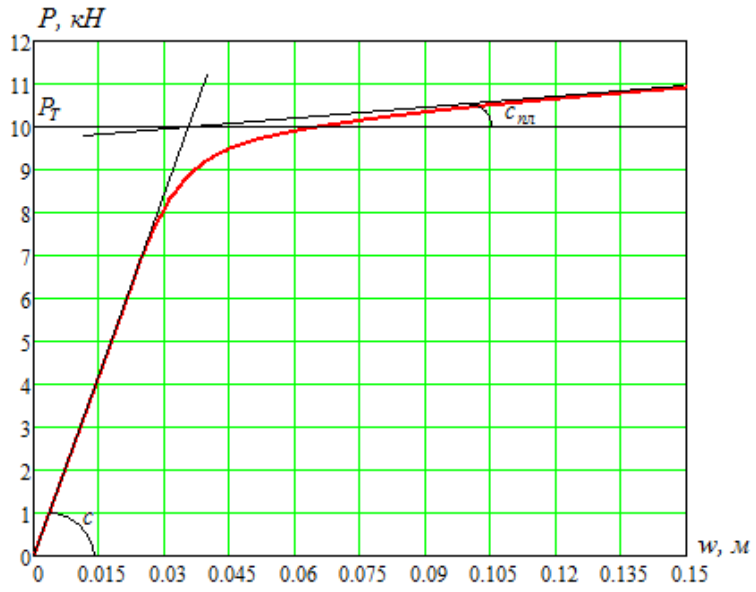


Рисунок 4. Силовая характеристика пластического демпфера и ее билинейная аппроксимация

Таблица 1. Параметры силовой характеристики пластического демпфирования одной маятниковой сейсмоопоры

Кол-во стержней	p_T, кН	c, кН/м	$c_{пл}$, кН/м	Грузоподъемность, тс	f_T, м/с^2	ω, 1/с	ω_0, 1/с
20	10	330	10	100	0,1	18	3

Таблица 2. Результаты динамического расчета

№ воздействия	Максимальные ускорения сейсмического воздействия	Время воздействия	Максимальные значения абсолютных ускорений системы	Максимальные значения относительных перемещений системы
1	2,9 $м/с^2$	40 $с$	0,76 $м/с^2$	100 $мм$
2	6,3 $м/с^2$	70 $с$	1,48 $м/с^2$	210 $мм$

Для стрежня круглого сечения были использованы параметрические зависимости $p(t)$ и $w(t)$:

$$p(t)=\frac{\pi}{16}at+\frac{1-a}{24}\left(3t\arcsin\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{\left(5t^2-2\right)\sqrt{t^2-1}}{t^3}\right);$$

$$w(t)=t-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{16}at+\frac{1-a}{24}\left(3t\arcsin\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{\left(5t^2-2\right)\sqrt{t^2-1}}{t^3}\right)\right]^2}\times \tag{5}$$

$$\times\left[\int_0^1\left(\frac{\pi}{16}\tau\right)^2 d\tau+\int_1^t\left[\frac{\pi}{16}a\tau+\frac{1-a}{24}\left(3\tau\arcsin\left(\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\left(5\tau^2-2\right)\sqrt{\tau^2-1}}{\tau^3}\right)\right]^2 d\tau\right],$$

где $a = \frac{E_{пл}}{E}$ – коэффициент упрочнения, принят $a = 0{,}01$; $E_{пл}$ – модуль упрочнения.

Далее была определена одностороннее накопленная деформация по формуле (5), а также величины различных уровней циклических деформаций и соответствующее им количество циклов по формуле (4). Поскольку $\varepsilon_в$ на несколько процентов меньше величины δ, определяемой по ГОСТу для каждого материала, принимаем для стали 01Х18Н9Т [20] $\varepsilon_в = 50\ \%$.

Результаты расчета малоцикловой усталости приведены в таблице 3. Результаты варьирования диаметра и количества стрежней представлены в таблице 4.

Таблица 3. Результаты расчета малоцикловой усталости

№	Уровень переме-щений	Односторонне накопленные деформации	Циклическая деформация	Число циклов	Число циклов до разруше-ния	Усталостное повреждение d_c	Квази-статическое повреждение d_s
	$x_{\max}$	$\varepsilon_{\max}$	ε_{ci}	N_i	N_{ci}	N_i/N_{ci}	$\varepsilon_{\max}/\varepsilon_в$
1	0,1	0,029	0,041	1	290	0,005	
			0,029	4	575	0,008	
			0,011	9	4400	0,004	
			0,002	26	138700	0,0008	
						0,018	0,021
	Утрачиваемый пластический ресурс			4%	Остаточный		96%
2	0,21	0,052	0,074	3	90	0,034	
			0,029	5	575	0,009	
			0,011	7	4400	0,003	
			0,002	22	138700	0,0008	
						0,046	0,104
	Утрачиваемый пластический ресурс			15%	Остаточный		85%

Таблица 4. Результаты варьирования параметров пластического демпфирования

Кол-во стержней	f_T, $м/с^2$	d, $мм$	Утрачиваемый пластический ресурс	
			Воздействие №1	Воздействие №2
20	0.1	60	4%	15%
30	0,75	55	3%	14%
40	0,5	50	2%	13%

Из таблицы 4 видно, что уменьшение диаметра стержней с 60 до 50 мм приводит к уменьшению утрачиваемого пластического ресурса на 1–2%. Однако, чтобы сохранить оптимальное значение силы p_T, при уменьшении толщины стержней необходимо увеличить их количество.

Заключение

Разработана методика определения пластического ресурса демпферных стержней, входящих в состав пластического демпфирования систем сейсмоизоляции, в условиях циклического нагружения при сейсмическом воздействии. Также показано, что необходимый пластический ресурс можно обеспечить варьированием геометрии и количества стержней.

Литература

1. Belyaev V., Guskov V., Routman Y. NPP seismic protection against shok and vibration loads // 20nd Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology – SMiRT20, Finland, 2009. Reference paper: 2479.
2. Рутман Ю.Л. Маятниковые сейсмоизолирующие опоры. Конструкция. Расчет. Эксперимент // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 37–43.
3. Belyaev V., Routman Y., Kovaleva N. Studing support-pendulum seismic isolation system for large NPP equipment // 22nd Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology – SMiRT22, USA, 2013. Reference paper: 423.
4. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
5. Когаев В.П., Матухов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
6. Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2001. 409 с.
7. Simbort E., Rutman Y. L. The Choice of the Seismic-Load Reduction Coefficient Based on the Analysis of the Plastic Resource of Structure taking into account the Low-Cycle fatigue // 15th World Conference on Earthquake Engineering. Portugal, 2012. Reference paper: 1392.
8. Cambell S.D., Richard R.M., Partige J.E. Steel moment frame damage prediction using low-cycle fatigue // XIV World Conference on Earthquake Engineering. China, 2008. Vol. V. Pp. 225–232.
9. Cosenza E., Manfredi G. Low Cycle Fatigue: Characterization of the Plastic Cycle due to Earthquake Ground Motion // Testing of metals for structures: proceedings of the International Workshop “Needs in Testing Metals”. London, 1992. Pp. 116–131.
10. Cosenza E., Manfredi G. Seismic design based on low cycle fatigue criteria // XI World Conference of Earthquake Engineering. Mexico, 1996. Reference paper: 1141.
11. Fajfar P. Equivalent ductility factors, taking into account Low-Cycle Fatigue // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1992. Vol. 21. Pp. 837–848.
12. Perera R., Alarcon E., Carnicero A. Modelization of low cycle fatigue damage in frames // XII World Conference on Earthquake Engineering. New Zealand, 2000. Paper reference: 0714.
13. Teran-Gilmor A., Jirsa J.O. A simple low cycle fatigue model and its implications for seismic design // XIII World Conference on Earthquake Engineering. Canada, 2004. Paper reference: 882.
14. Teran-Gilmor A., Jirsa J.O. The use of cumulative ductility strength spectra for seismic design against low cycle fatigue // XIII World Conference on Earthquake Engineering. Canada, 2004. Paper reference: 889.
15. Miner M.A. Cumulative damage in fatigue // Journal of Applied Mechanics. 1945. Vol. 12. Pp. 159–164.
16. Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л. Оценка эффективности параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 37–43.
17. Симборт С. Э. Определение коэффициента редукции с учетом динамических характеристик сейсмических воздействий: дисс.… канд. техн. наук. Санкт-Петербург. СПбГАСУ, 2012. 168 с.
18. Ковалева Н.В., Скворцов В.Р., Рутман Ю.Л. Определение параметров силовой диаграммы пластически деформируемых элементов конструкции // Сборник «Труды Двадцать второй международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». СПб.: Изд-во НИЦ МОРИНТЕХ, 2007. С. 220–225.
19. Ковалева Н.В., Давыдова Г.В., Рутман Ю.Л. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 107–115.
20. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1981. 496 с.

Надежда Владимировна Ковалева, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)835-55-52; эл. почта: balloun@yandex.ru

Конечно-элементное моделирование динамики мостов при воздействии подвижной нагрузки

Д.т.н., заведующий кафедрой «Строительная механика» Г.М. Кадисов,
ФГБОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)»;
инженер В.В. Чернышов,
ООО НПО «МОСТОВИК»

Аннотация. Получены и проанализированы решения задачи о динамике вантового моста в двух вариантах моделирования.

В первом варианте применены конечные элементы в пространстве и во времени; для изучения колебаний вантового моста под воздействием перемещающейся с постоянной скоростью вертикальной силы и построения графиков изменения во времени усилий в фиксированных сечениях пролетного строения изображены первые три собственные формы колебаний моста.

Во втором варианте подвесное пролетное строение представлено складкой с абсолютно жесткими поперечными диафрагмами в местах прикрепления вант, пилон представлен стержнем; получены собственные формы колебаний моста путем решения однородной системы уравнений смешанного метода. Изображены узловые линии складки для первых четырех собственных форм.

Дано сравнительное описание применимости вышеуказанных методов в решении задач динамики под воздействием подвижной нагрузки.

Ключевые слова: динамика; вантовый мост; подвижные нагрузки; собственные формы

Введение

В связи с активным строительством транспортных сооружений и увеличением массогабаритных параметров транспортного потока возникает вопрос об учете данного вида динамического воздействия на мостах. Решения задач о воздействии подвижной нагрузки на пролетные строения мостов приведены в работах [1–6]. Колебания висячих и вантовых мостов совместно с подвижными нагрузками рассмотрены в работах [7–15]. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом представлено в работах [16–22]. Воздействия высокоскоростных, сейсмических, ударных и ветровых нагрузок на мосты рассмотрены в работах [23–28]. В большинстве вышеперечисленных исследований решены и описаны плоские задачи. Пространственные задачи о колебаниях мостов с подвижными нагрузками представлены в работах [29–34], где пролетное строение смоделировано складчатой системой. В связи с широким внедрением программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, в практику проектирования сложных пространственных сооружений актуальным является использование этих комплексов и в задачах с подвижной нагрузкой.

Постановка задачи. При помощи программного комплекса Midas Civil требуется численно получить решение динамики вантового моста под воздействием перемещающейся с постоянной скоростью вертикальной силы с определением усилий в пролетном строении в каждый момент времени и сравнить с решениями, полученными другими численными методами.

Решение задачи методом конечных элементов

В качестве примера принят вантовый мост, представленный на рисунке 1. Балка жесткости имеет коробчатое поперечное сечение с ортотропными плитами, габаритные размеры представлены на рисунке 2.

В узлах примыкания вант предусмотрены диафрагмы. Материал балки – сталь с модулем упругости $E = 2.06E + 08$ *кН/м*^{2} и объемным весом $\rho = 76.98$ *кН/м*^{3}. Рамный пилон коробчатого сечения: у основания габарит *3 х 3 м*, толщина *0.6 м*, на вершине *2 х 2 м*, толщина *0.4 м*. Материал пилона – бетон с модулем упругости $E = 3.6E + 07$ *кН/м*^{2} и объемным весом $\rho = 24.52$ *кН/м*^{3}. Ванты $d = 0.1$ м из стали с модулем упругости $E = 1.95E + 08$ кН/м^2 и объемным весом $\rho = 76.98$ *кН/м*^{3}.

По данным параметрам была смоделирована расчетная схема вантового моста. Общий вид расчетной схемы представлен на рисунке 3. Конечно-элементная модель балки жесткости и пилона представлена стержневыми балочными элементами, ванты – элементами, работающими только на растяжение. Балка жесткости имеет три шарнирно-подвижные вдоль оси моста точки опирания на концах и на перемычке пилона. У основания пилон закреплен жестко. С целью оптимизации работы системы выполнено регулирование напряженного состояния путем изменения усилий в вантах, проведены проверочные расчеты по прочности и устойчивости по действующим нормам.

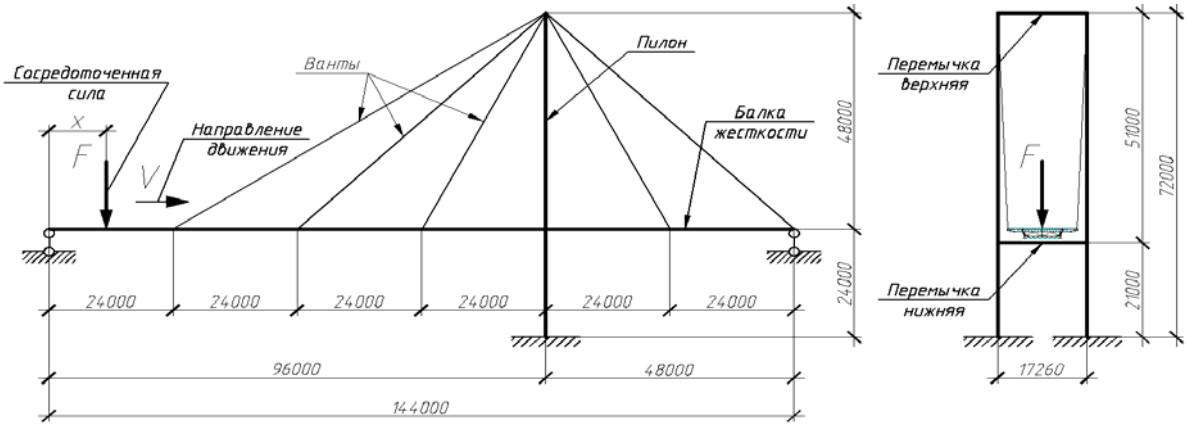


Рисунок 1. Общий вид вантового моста

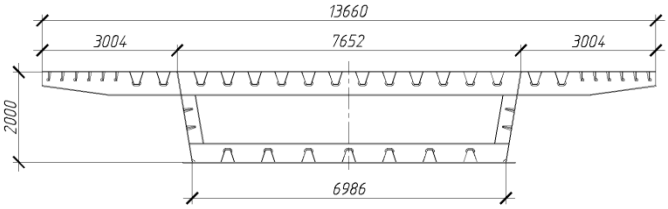


Рисунок 2. Поперечное сечение балки жесткости

Рисунок 3. Общий вид расчетной схемы

Вычисление собственных форм и периодов колебаний произведено программным комплексом Midas Civil по методу Ланцоша [35]. В расчете учтено 100 форм. Первые две формы, а также значения периодов собственных колебаний представлены на рисунке 4.

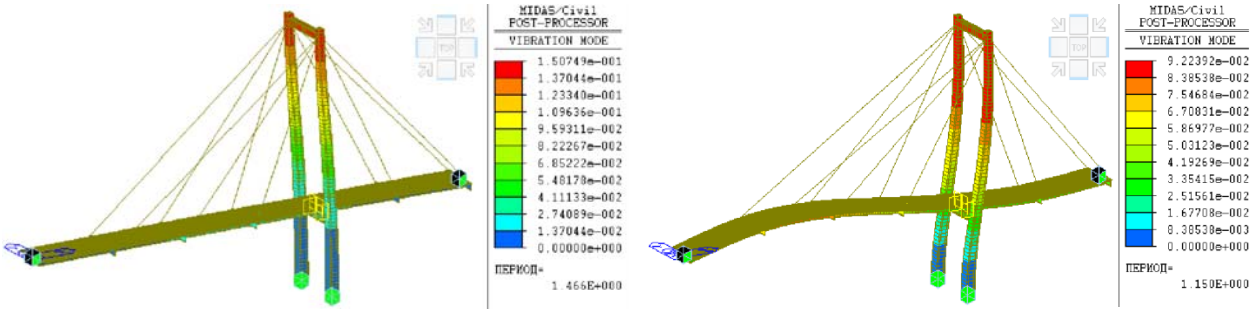


Рисунок 4. Формы колебания вантового моста

Рассмотрим динамическое воздействие от перемещения силы $F = 981$ *кН* по оси балки жесткости со скоростью V по направлению, указанному на рисунке 1. Балка жесткости разбита на конечные элементы длиной a, на каждый *j-й* узел прикладывается сила F_j, изменяющаяся во времени по закону $F_j = f(t)$ согласно рисунку 5. Каждая функция включается в строго определенной последовательности и ограничена промежутком времени, равным $t = 2a / V$. Общее время расчета зависит от скорости прохождения силы по балке жесткости и равно $t = L_{МОСТ} / V$. Распределение каждой сосредоточенной силы на узлы конечно-элементной модели выполняется с учетом узловой передачи нагрузки. В фиксированный момент времени оказываются загруженными два узла, если сила находится между ними, или один при нахождении силы над узлом, тем самым создается эффект непрерывного «перетекания» силы от узла к узлу.

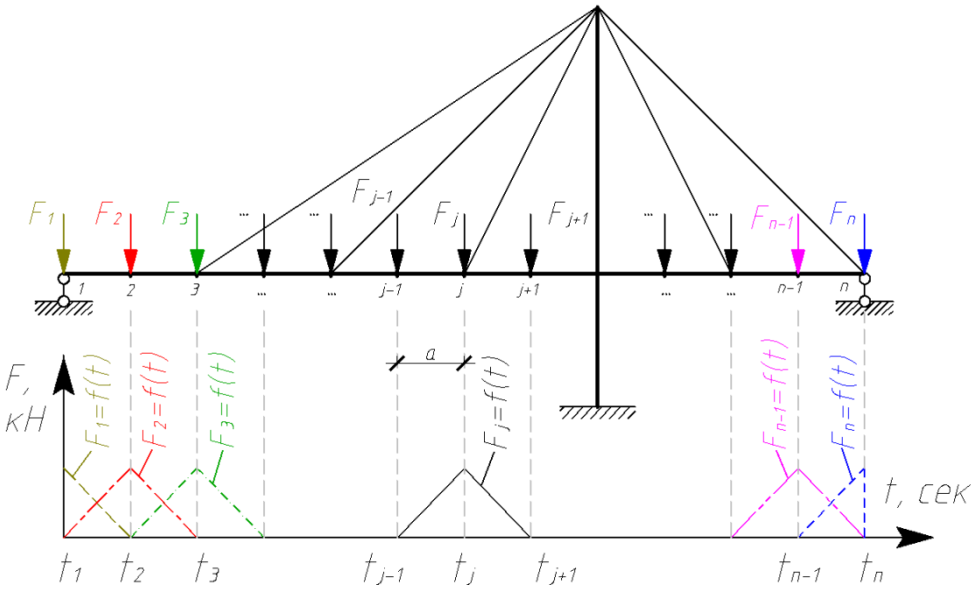


Рисунок 5. Функции изменения сил F во времени t

Рассмотрено движение силы по балке жесткости со скоростями 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210 и 240 км/ч. Огибающая эпюра динамических моментов в балке жесткости при разных скоростях движения силы приведена на рисунке 6.

По графику видно, что при увеличении скорости движения нагрузки происходит увеличение моментов. Объясняется это тем, что движущаяся сила вызывает колебания вантового моста с частотой, близкой к частоте первой собственной форме системы.

Интерес представляет изменение усилий в фиксированных сечениях в течение времени перемещения с постоянной скоростью V вертикальной силы в сравнении с квазистатическим состоянием, когда скорость движения близка к нулю. График изменения моментов во времени в сечениях x = 36 м и x = 126 м при движении силы F со скоростью 210 км/ч представлен на рисунке 7 и со скоростью 5 км/ч – на рисунке 8.

По графикам видно, что при перемещении силы F со скоростью 210 км/ч усилия в сечении x = 36 м на 30% выше, чем при квазистатическом состоянии. А для сечения x = 126 м значение усилия при перемещении силы со скоростью 210 км/ч, наоборот, ниже на 10%; объясняется это тем, что сила как бы проскакивает пролет, не вызывая большого воздействия. Если обратиться к рисунку 6, видно, что при меньшей скорости в 180 км/ч мы получаем большие значения усилий для сечения x = 126 м.

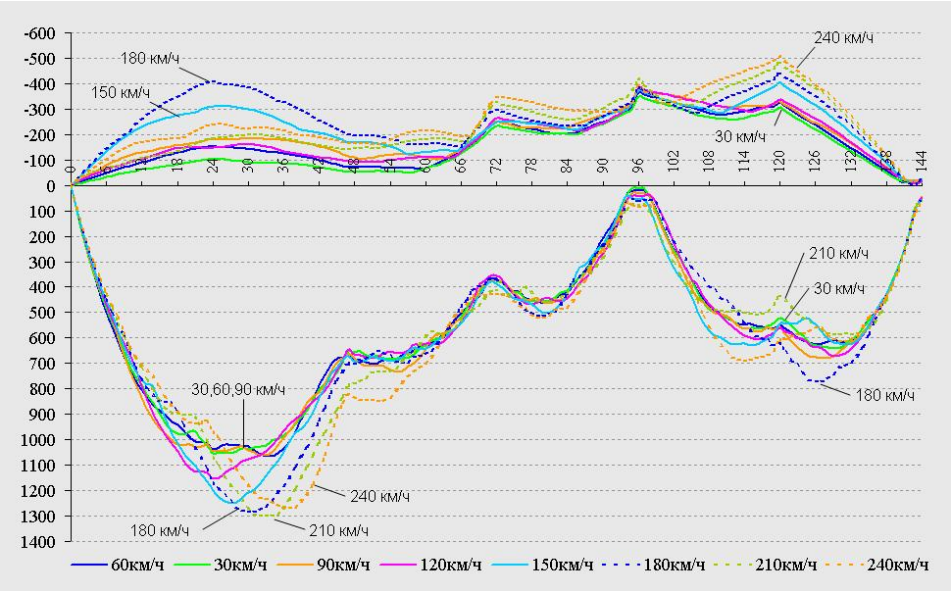


Рисунок 6. Огибающая эпюра динамических моментов в балке жесткости

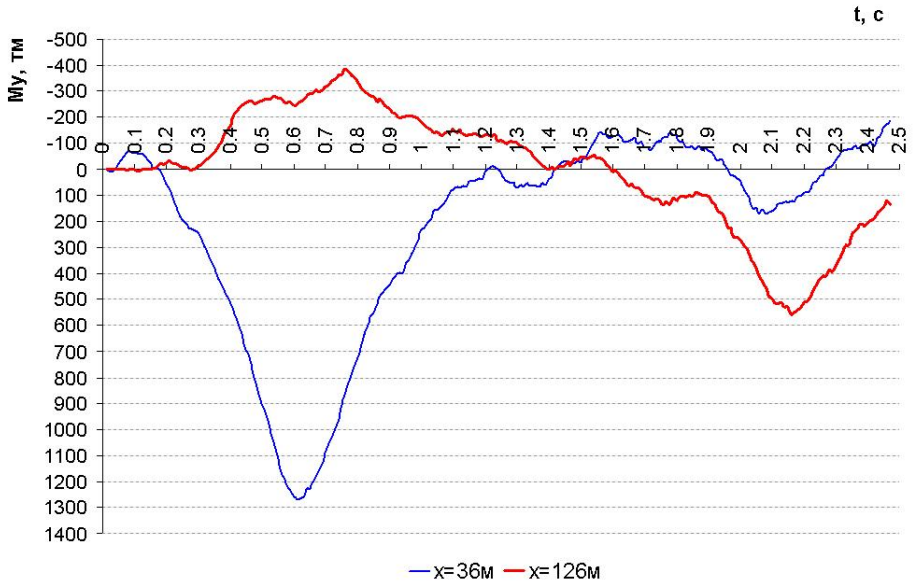


Рисунок 7. Изменение моментов во времени при перемещении силы со скоростью 210 км/ч

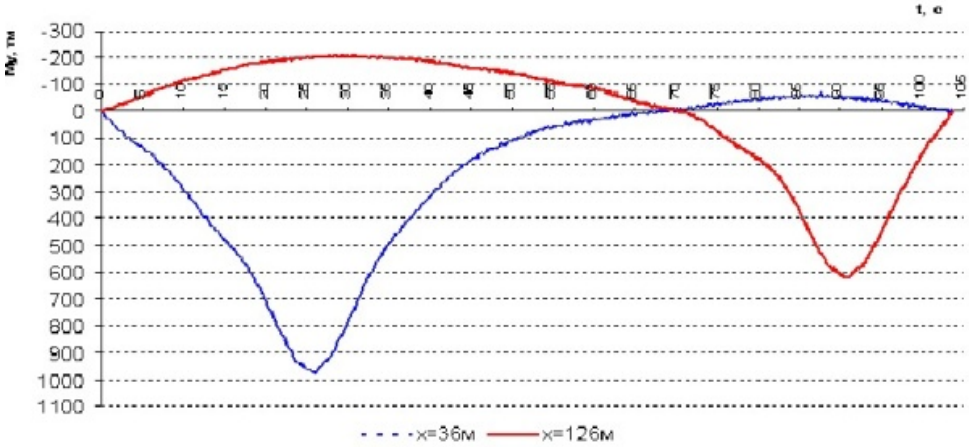


Рисунок 8. Изменение моментов во времени при перемещении силы со скоростью 5 км/ч

Решение задачи с применением модели складки

Модель складки для расчета пролетных строений мостов предложена В.А. Александровым в работе [29], где представлены метод перемещений для однопролетных складок и смешанный метод для многопролетных. Там же рассмотрена, в частности, задача о движении пары сосредоточенных сил по бездиафрагменному плитно-ребристому пролетному строению. В работе [30] дополнительно рассмотрены некоторые особенности, связанные с расчетом напряженно-деформированного состояния складки, моделирующей тонкостенный стержень. Колебания складчатых систем при движении регулярной колонны автомобилей рассмотрены в работах [31, 32]. Задача на собственные значения колебаний вантового моста рассмотрена в работе [34], где подвесное пролетное строение представлено моделью складки. Ниже модель складки дополнена абсолютно жесткими поперечными диафрагмами в местах прикрепления пролетного строения к вантам. Основные уравнения смешанного метода представлены ниже уравнениями равновесия складки, пилона и диафрагм:

$$(\mathbf{R}_i - \lambda \mathbf{M}_i)\mathbf{z}_i + \mathbf{R}_{ix}\mathbf{X} + \mathbf{R}_{iy}\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (i = \overline{1, n_s}); \tag{1}$$

$$(\mathbf{R}_\pi - \lambda \mathbf{M}_\pi)\mathbf{z}_\pi + \mathbf{R}_{\pi x}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\pi = \overline{1, n_p}); \tag{2}$$

$$\mathbf{TY} = \mathbf{0}; \tag{3}$$

уравнениями совместности перемещений складки, пилона и вант(4), складки и диафрагм (5), (6):

$$\sum_i \mathbf{\Delta}_{xi}\mathbf{z}_i + \sum_\pi \mathbf{\Delta}_{x\pi}\mathbf{z}_\pi + \mathbf{\Delta}_{xx}\mathbf{X} = \mathbf{0}; \tag{4}$$

$$\sum_i \mathbf{\Delta}_{yi}\mathbf{z}_i = \mathbf{\Delta}_y; \tag{5}$$

$$\mathbf{\Delta}_y = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_\pi$ – амплитуды узловых перемещений i-й гармоники складки, пилона; $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – усилия в вантах и усилия взаимодействия диафрагм и складки; $\mathbf{\Delta}_y$ – перемещения складки в сечениях с диафрагмами по направлению усилий $\mathbf{Y}$; $\mathbf{z}$ – основные перемещения абсолютно жестких диафрагм; $\mathbf{T}$ – прямоугольная блочная матрица коэффициентов в уравнении равновесия диафрагм с числом блоков, равным числу диафрагм. Каждый блок этой матрицы содержит 3 строки и столько столбцов, сколько сил взаимодействия одной диафрагмы со складкой. Напомним, что $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_{ix}$, $\mathbf{R}_{iy}$ – реакции дополнительных связей, распределенных вдоль узловых линий складки, от деформирования складки по i-й гармонике и от усилий $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$; $\mathbf{M}_i$ – приведенная матрица инерционности для i-й гармоники складки, $\mathbf{M}_\pi$ – пилона; $\mathbf{R}_\pi$, $\mathbf{R}_{\pi x}$, – аналогичные матрицы в дополнительных связях пилона; $\mathbf{\Delta}_{xi}$, $\mathbf{\Delta}_{x\pi}$, $\mathbf{\Delta}_x$, $\mathbf{\Delta}_y$ – перемещения по направлению усилий $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$.

Решение представленной системы уравнений выполняется в следующем порядке. Сначала для каждой гармоники складки и пилона решаются отдельно задачи на собственные значения с определением собственных форм $\boldsymbol{\varphi}_{ik}$, $\boldsymbol{\varphi}_{\pi k}$ и квадратов собственных частот $\lambda_{ik}, \lambda_{\pi k}$, а затем $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_\pi$ представляются рядами по собственным формам складки и пилона, как в работе [34]. z_i из уравнения (1) выражается через $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, $\mathbf{z}_\pi$ из уравнения (2) – только через $\mathbf{X}$. Тогда уравнения (4) и (5) будут содержать в левой части неизвестные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Учитывая, что усилия взаимодействия Y уравновешены (3), их можно выразить через равнодействующие $\mathbf{R}$ ($\mathbf{Y} = \mathbf{BR}$), и количество неизвестных в системе двух матричных уравнений снижается, при этом правая часть второго уравнения исчезает: $\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta}_y = \mathbf{0}$. Далее однородная система уравнений решается аналогично работе [34]. Отметим, что определитель однородной системы как функция параметра λ, согласно [36], имеет полюсы на спектре раздельных складки λ_{ik} и пилона $\lambda_{\pi k}$, а нули – на

спектре вантового моста в целом. Это позволяет сначала объединить спектры складки и пилона, затем их ранжировать и искать нули в промежутках между каждой парой соседних полюсов методом деления отрезка пополам или методом золотого сечения, или, наконец, малыми равномерными шагами найти очередной корень характеристического уравнения. Затем определяются соответствующие ему векторы $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ и $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_\pi$.

Для решения такой задачи на собственные значения колебаний вантового моста составлена программа на языке программирования C++, с помощью которой вычисляются вертикальные, горизонтальные и угловые перемещения узловых линий складки, перемещения пилона, усилия в вантах и т. п. для каждой собственной формы моста. Эта программа дополнила пакет программного обеспечения для статических и динамических расчетов пространственных упругих систем.

Покажем результаты расчета собственных форм вантового моста, представленного на рисунке 1. Балка жесткости смоделирована складкой с поперечным сечением (рис. 9). Ванты поддерживают 1-ю и 5-ю узловые линии.

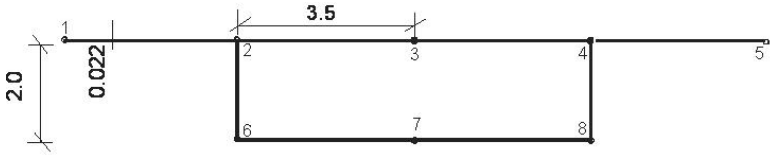


Рисунок 9. Поперечное сечение балки жесткости. Узловые линии пронумерованы

На рисунках 10–13 показаны графики вертикальных перемещений узловых линий складки первых 4 собственных форм вантового моста. Шаг между вычисленными ординатами равен 2 м.

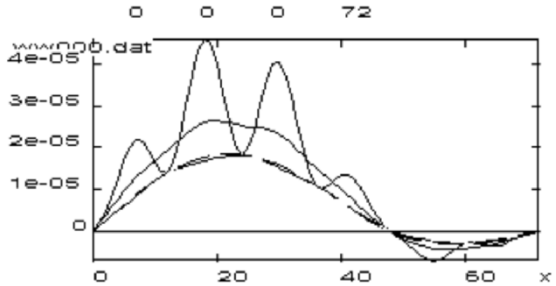


Рисунок 10. Первая форма колебаний

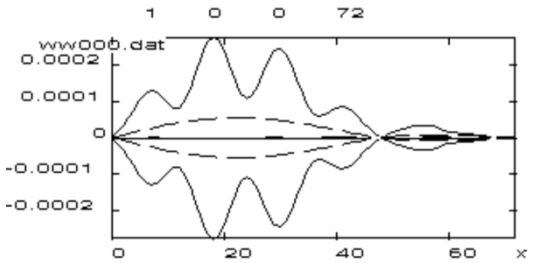


Рисунок 11. Вторая форма колебаний

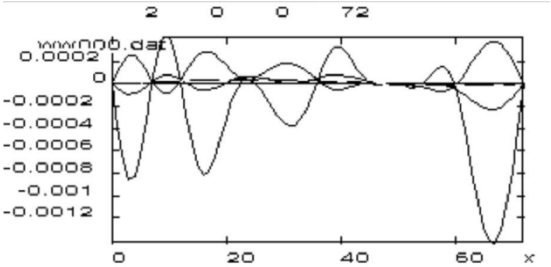


Рисунок 12. Третья форма колебаний

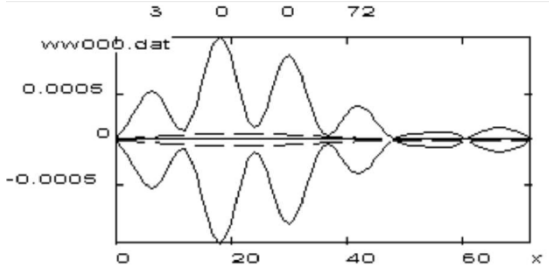


Рисунок 13. Четвертая форма колебаний

На рисунке 10 и рисунке 12 даны симметричные формы относительно продольной оси моста, а на рисунке 11 и рисунке 13 – кососимметричные. Легко заметить, что наибольшие перемещения имеют точки крайних узловых линий, расположенные посередине между диафрагмами.

Следует отметить, что балка жесткости вантового моста в первом примере представлена балочными конечными элементами, а во втором – пространственной тонкостенной складкой. Отсюда и получено некоторое различие в изображенных собственных формах.

Заключение

На конкретном примере о колебаниях вантового моста с подвижной нагрузкой показано применение конечно-элементного моделирования в пространстве и во времени. Дано сравнение собственных форм, полученных МКЭ и моделью складки.

Программные комплексы, основанные на МКЭ, при правильном их применении позволяют решать и исследовать задачи динамики протяженных конструкций, находящихся под воздействием подвижных нагрузок. В качестве альтернативного метода для оценки и сравнения результатов можно применить метод складки без дискретизации в продольном направлении и во времени.

Литература

1. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // Труды МИИТ. 1950. Вып. 74. С. 5–9.
2. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Механика и машиностроение. 1961. №4. С.109–115.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
4. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс. М.: Стройиздат, 1980. 432с.
5. Khalifa M.A., Hodhod O.A., Zaki M.A. Analysis and design methodology for an FRP cable-stayed pedestrian bridges // Composites part B: Engineering. 1996. Vol. 27. No.3–4. Pp. 307–317.
6. Рутман Ю.Л., Мелешко В.А. Причины колебаний моста в Волгограде // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №3. С. 55–58.
7. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. М.: Высшая школа, 1970. 407 с.
8. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж: ВГУ, 1983. 196 с.
9. Das A., Dutta A., Talukdar S. Efficient dynamic analysis of cable-stayed bridge under vehicular movement using space and time adaptively // Finite Elements in Analysis and Design. 2004. No. 40. Issue 4. Pp. 407–424.
10. Нгуен Тхак Куанг. Оптимизация проектирования вантовых мостов с исследованием их параметров // Архитектура и строительство России. 2007. №3. С. 25–31.
11. Потапов В.Д., Папаев М.А. Об устойчивости висячих и вантовых мостов, находящихся под действием ветровых нагрузок, в детерминированной и стохастической постановках // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. №5. С. 32–37.
12. Круглов В.М., Косицын С.Б., Потапов В.Д., Долотказин Д.Б., Лукьянов М.А. Статические расчеты вантового моста с арочным пилоном // Строительная механика и расчет сооружений. 2008. №5. С. 19–23.
13. Chen R.L., Xiao Y.X., Guo X.G. Modal characteristics of A large Span railway cable-stayed bridge // Journal of vibration and shock. 2010. No.2. Pp. 7–10.
14. Дороган А.С. Вантово-висячие мосты. Часть 2: с криволинейными вантами // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. №1. С. 6–14.
15. Дороган А.С. Вантово-висячие мосты с прямолинейными вантами. Часть 1 // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. №5. С. 2–9.
16. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Ройтбурд З.Г., Тарасенко В.П., Яковлев Г.Н. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.
17. Иванченко И.И. К динамическому расчету ферм мостов // Межвузовский сборник научных трудов. М.: МИИТ. 1989. Вып.817. С. 87–89.
18. Fryba L. Dynamics of railway bridges. London: Thomas Tel ford, 2001.
19. Yau J.D., Yang Y.B. Vibration reduction for cable-stayed bridges traveled by high-speed trains // Finite Elements in Analysis and Design. 2004. Vol. 40. Issue 3. Pp. 341–359.
20. Круговова Е.А., Михеев Г.В., Ковалев Р.В. Компьютерное моделирование взаимодействия железнодорожных экипажей и мостов // Вестник брянского государственного технического университета. 2010. №3. С. 39–48.

21. Liu J., Qu W., Pi Y.L. Longitudinal vibration analysis of floating-type railway cable-stayed bridge subjected to train braking // 2010 International conference on mechanic automation and control engineering. 2010. Pp. 2806–2809.

22. Zhang K., Zhao X., Liang X., Liu W. Evaluation method for load-bearing capacity of a single-tower cable-stayed bridge // Wuhan ligong daxue xuebao. 2010. №34. С. 254–257.

23. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений. Высокоскоростные подвижные, сейсми-ческие и ударные нагрузки. М.: Наука, 2011. 574 с.

24. Иванченко И.И. Динамическое взаимодействие мостов и высокоскоростных железнодорожных составов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. №3. С. 146–160.

25. Круговова Е. А. Оценка влияния колебаний моста на динамику поезда в программном комплексе «Универсальный механизм» // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2012. №6(296). С. 16–23.

26. Yang Y.B., Yau J.D., Wu Y.S. Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Applications to High-Speed Railways. Singapore: World Scientific Publishing, 2004. 530 p.

27. Смирнов М.С. Динамика сооружений. Определение частот и форм собственных колебаний сооружения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2006. 64 с.

28. Fujino Y., Siringoringo D. Vibration mechanisms and controls of long-span bridges: A Review // Structural Engineering International. 2013. Vol. 23. No.3. Pp. 248–268.

29. Смирнов А.Ф., Александров А. В.,Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. М.: Стройиздат, 1964. 380 с.

30. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.

31. Кадисов Г.М. Колебания складчатых систем при подвижных нагрузках. Омск: СибАДИ, 1997. 178 с.

32. Кадисов Г.М. Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2007. 272 с.

33. Кадисов Г.М., Чернышов В.В. Динамика вантового моста после обрыва ванты // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. 2011. №22. С. 19–23.

34. Кадисов Г.М. К определению собственных форм вантового моста смешанным методом // Вестник СибАДИ. 2012. №2(24). С. 45–49.

35. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.

36. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.

Григорий Михайлович Кадисов, г. Омск, Россия
Тел. моб.: +7(913)615-64-38; эл. почта: kadisov@rambler.ru

Виталий Витальевич Чернышов, г. Омск, Россия
Тел. моб.: +7(913)661-00-07; эл. почта: Chervv@mail.ru

Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов

К.ф.-м.н., доцент Л.У. Султанов;
аспирант Р.Л. Давыдов,
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Аннотация. В работе построена методика численного исследования упругопластических тел с учетом конечных деформаций. Определяющие соотношения получены с использованием упругого потенциала в рамках теории пластического течения. В качестве критерия пластичности применяется условие Губера – Мизеса с упрочнением. Используется процедура пошагового нагружения, где разрешающее вариационное уравнение получено из принципа виртуальных мощностей в текущей конфигурации.

При моделировании пластических деформаций применяется метод проецирования напряжений на поверхность текучести с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния, основанного на введении в разрешающую систему уравнений мощности дополнительных напряжений. Численная дискретизация основана на методе конечных элементов.

Приводится решение тестовой задачи об упругопластическом растяжении стержня круглого поперечного сечения, результаты которого сравнены с результатами, полученными другими авторами.

Ключевые слова: большие деформации; нелинейная упругость; пластичность; метод конечных деформаций

При строительстве и эксплуатации конструкций, при взаимодействии конструкций между собой возникают нелинейные задачи. Решению нелинейных задач, в частности с учетом больших упругопластических деформаций, посвящено множество публикаций. Они отличаются постановкой задач, методикой разделения состояний на упругие и пластические и алгоритмами решений. Так как подобные задачи в большинстве своем имеют лишь численное решение, то большой популярностью пользуется метод конечных элементов [1–3] для дискретизации задачи в рамках шаговых методов, в которых неизвестные определяются либо относительно начального состояния [4, 5], либо относительно предыдущего состояния [6], либо решение ищется в актуальном состоянии [7–9]. В первом варианте кинематику описывает тензор деформаций Коши – Грина, напряженное состояние – второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа. Во втором случае используются модифицированный тензор приращения деформаций Коши – Грина и модифицированный тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа, с помощью которого определяется тензор истинных напряжений в текущем состоянии. Третий вариант – пошаговое интегрирование уравнений в актуальной конфигурации. При моделировании пластических деформаций [3, 10–13] существует два подхода: разделение скорости деформации на сумму упругой и пластической составляющих [5] и представление полного градиента деформаций в виде произведения неупругой и упругой составляющих [4, 6].

В настоящей работе приводится методика исследования конечных упругопластических деформаций, которая является продолжением работы [14]. В работе [14] исследуются идеально упругопластические материалы, в качестве упругого закона используется закон Гука в скоростях напряжений Яуманна. В представленной работе вводится удельная потенциальная энергия деформации, которая зависит от левого тензора Коши – Грина [7–9, 15–18]. Получены определяющие соотношения упругого деформирования для изотропного материала в виде зависимости производной Трузделла тензора напряжении Коши – Эйлера от деформации скорости [2, 19, 20]. В рамках теории течения и ассоциированного закона течения используется аддитивное представление для полной деформации скорости [5, 10, 21]. Критерием упругого деформирования является условие Губера – Мизеса с изотропным упрочнением. Алгоритм расчета основан на методе последовательных нагружений, где разрешающая система уравнений получена путем линеаризации уравнения мощностей в актуальном состоянии. При моделировании пластических деформаций применяется метод проецирования напряжений на поверхность текучести [20, 22] с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния, основанным на введении в разрешающую систему уравнений мощности дополнительных напряжений. В качестве примера рассмотрено построение алгоритма решения

для материала второго порядка. Численная реализация основана на методе конечных элементов. Используется 8-узловой конечный элемент. Созданный алгоритм исследования больших упругопластических деформаций апробирован на решении тестовой задачи о растяжении круглого стержня с образованием шейки.

1. Кинематика среды. Уравнение в скоростях напряжений

В настоящей работе используются основные положения и соотношения кинематики среды, которые приводятся в работах [7–9 и 14]. В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются тензор градиента деформации $\mathbf{F}$, мера деформации Фингера, тензор пространственного градиента скорости $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$, тензор деформации скорости $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\right]$. Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений $\mathbf{\Sigma}$, определенного в актуальном состоянии.

В качестве базового уравнения используется уравнение принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации:

$$\int_{\Omega} \mathbf{\Sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{d} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta\vec{\upsilon} d\Omega + \int_{S^{\sigma}} \vec{p} \cdot \delta\vec{\upsilon} dS\,, \tag{1.1}$$

где $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости материальной точки; Ω – текущий объем; S^{σ} – часть поверхности, на которой заданы усилия; $\vec{f}$, $\vec{p}$ – векторы объемных и поверхностных сил соответственно.

После линеаризации (1.1) получим уравнение в скоростях напряжений Коши – Эйлера:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[\dot{\mathbf{\Sigma}} \cdot\cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{d} + \mathbf{\Sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{d}} + \frac{\dot{J}}{J} \mathbf{\Sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{d} \right] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left[\dot{\vec{f}} + \vec{f} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta\vec{\upsilon} d\Omega + \int_{S} \left[\dot{\vec{p}} + \vec{p} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta\vec{\upsilon} dS, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $J = \det(\mathbf{F})$ – относительное изменение объема.

2. Определяющие соотношения

Определяющие соотношения получим, используя потенциальную энергию упругой деформации, которую определяет функция *W.*

Для изотропного материала, свойства которого не зависят от направления, функция удельной потенциальной энергии деформации запишется в виде:

$$W = W\left(I_{1B}, I_{2B}, I_{3B}\right),$$

тогда тензор напряжений можно выразить как

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{B} \cdot \left\{ \frac{\partial W}{\partial I_{1\mathbf{B}}} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_{2\mathbf{B}}} \left[I_{1\mathbf{B}} \mathbf{I} - \mathbf{B} \right] + \frac{\partial W}{\partial I_{3\mathbf{B}}} I_{3\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1} \right\}.$$

Из последнего соотношения получим выражение для скорости напряжений Коши – Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Sigma}} &= 2\left\{ \frac{1}{J} \dot{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} + \frac{1}{J} \left[\mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{B}^2} \right] \cdot\cdot \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} I_{1d} \right\} = \\ &= \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{\Sigma}} \cdot\cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{h}^T - \mathbf{\Sigma} I_{1d}, \end{aligned}$$

где введено обозначение:

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{\Sigma}} = \frac{4}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{B} \partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}.$$

В результате получаем физическое соотношение упругого деформирования в виде линейного уравнения:

$$\mathbf{\Sigma}^{Tr} = \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{\Sigma}} \cdot\cdot \mathbf{d},$$

где $\mathbf{\Sigma}^{Tr} = \dot{\mathbf{\Sigma}} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{h}^T - I_{1d}\mathbf{\Sigma}$ – производная Трусделла тензора напряжений $\mathbf{\Sigma}$ [2, 19].

Моделирование упругопластических деформаций основано на аддитивном представлении полной деформации скорости, т. е. $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, где $\mathbf{d}^e$ – упругая составляющая, а $\mathbf{d}^p$ – пластическая.

Предполагается справедливость ассоциированного закона течения:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Sigma}},$$

где $\dot{\lambda}$ – скорость пластических деформаций; Φ – функция текучести.

Рассмотрим в качестве критерия упругого деформирования условие Губера – Мизеса, которое для изотропной среды допускает обобщение в виде:

$$\Phi = \sigma_i - \sigma_T(\chi) \le 0, \tag{2.1}$$

где $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{\Sigma}' \cdot\cdot \mathbf{\Sigma}'}$ – интенсивность напряжений; $\sigma_T(\chi)$ – функция упрочнения; χ – параметр упрочнения.

Тогда, используя (2.1), пластическую деформацию скорости можно записать следующим образом:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \mathbf{\Sigma}'} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\mathbf{\Sigma}'}{\sigma_i}.$$

3. Метод проецирования напряжений на поверхность текучести

По известным параметрам k-го состояния определим $(k+1)$-е по следующей формуле:

$$^{k+1}\mathbf{\Sigma} + \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_i} \mathbf{\Lambda} \cdot\cdot {}^{k+1}\mathbf{\Sigma}' = {}^{k+1}\tilde{\mathbf{\Sigma}}. \tag{3.1}$$

Здесь

$$^{k+1}\tilde{\mathbf{\Sigma}} = {}^{k}\mathbf{\Sigma} + \{\mathbf{\Lambda} \cdot\cdot {}^{k}\mathbf{d} + {}^{k}\mathbf{h} \cdot {}^{k}\mathbf{\Sigma} + {}^{k}\mathbf{\Sigma} \cdot {}^{k}\mathbf{h}^T - I_{1d}\, {}^{k}\mathbf{\Sigma}\}\Delta t \tag{3.2}$$

– так называемый тензор «пробных» напряжений. Уравнение (3.1) определяет снос напряжений на поверхность текучести [19].

4. Общий алгоритм решения

Алгоритм решения основан на методе пошагового нагружения [9, 16], разрешающее уравнение на k-м шаге нагружения будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_k} \left\{ {}^{k}\mathbf{d} \cdot\cdot {}^{k}\mathbf{\Lambda} \cdot\cdot \delta\mathbf{d} + \frac{1}{2} {}^{k}\mathbf{\Sigma} \cdot\cdot \left[\delta\mathbf{h}^T \cdot {}^{k}\mathbf{h} + {}^{k}\mathbf{h}^T \cdot \delta\mathbf{h} \right] - [{}^{k}\vec{\nabla}_y \cdot {}^{k}\vec{\upsilon}]\vec{f}^* \cdot \delta\vec{\upsilon} \right\} d\Omega + \\ + \int_{S^\sigma} \{ {}^{k}\vec{t}_n^* \cdot {}^{k}\mathbf{h}^T - [{}^{k}\vec{\nabla}_y \cdot {}^{k}\vec{\upsilon}]\, {}^{k}\vec{t}_n^* \} \cdot \delta\vec{\upsilon} dS = \int_{\Omega_k} {}^{k}\dot{\vec{f}}^* \cdot \delta\vec{\upsilon} dV + \int_{S^\sigma} {}^{k}\dot{\vec{t}}_n^* \cdot \delta\vec{\upsilon} dS - \\ - \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega_k} {}^{k}\mathbf{\Sigma} \cdot\cdot \delta\mathbf{d} dV - \int_{\Omega_k} {}^{k}\vec{f}^* \cdot \delta\vec{\upsilon} dV - \int_{S^\sigma} {}^{k}\vec{t}_n^* \cdot \delta\vec{\upsilon} dS \right\}.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Решая уравнение (4.1), получим вектор скорости $\vec{\upsilon}$, который определяет конфигурацию на следующем шаге нагружения:

$$^{k+1}\vec{R} = {}^{k}\vec{R} + {}^{k}\vec{\upsilon}\Delta t \ ,$$

и напряженное состояние:

$$^{k+1}\mathbf{\Sigma} = {}^{k}\mathbf{\Sigma} + {}^{k}\dot{\mathbf{\Sigma}}\Delta t \ .$$

5. Численный пример

В качестве примера построены физические соотношения для следующего потенциала упругих деформаций:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8}\left(I_{1B} - 3\right)^2 + \mu\left(I_{1B} - 3\right) - \frac{\mu}{2}\left(I_{2B} - 3\right),$$

где λ, μ – параметры Ляме.

Получены линеаризированные определяющие соотношения. Численная реализация основана на методе конечных элементов. Используется 8-узловой конечный элемент [15, 17].

Упругопластическое растяжение круглого стержня. В качестве нагрузки на торцы стержня задается перемещение. Для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 1,8%. Критерием пластичности служит условие Губера – Мизеса (2.1). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид: $\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi})$.

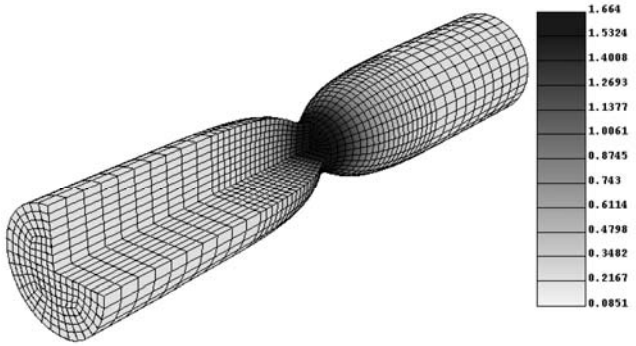


Рисунок 1. Интенсивность пластических деформаций для конечного положения

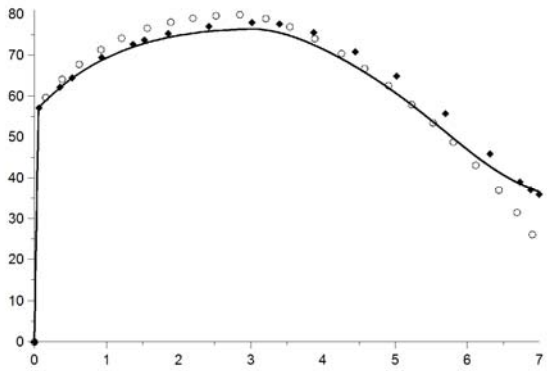


Рисунок 2. Диаграмма сила – перемещение (сплошная кривая – решение по описанной методике, ○ – решение из работы [4], ♦ – решение из работы [5])

Заключение

В работе построена методика численного исследования конечных деформаций, работоспособность которой продемонстрирована на решении тестовой задачи. Отметим, что настоящая методика при соответствующем выборе упругого потенциала и критерия пластичности позволяет исследовать довольно широкий круг задач.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №12-01-00955, №12-01-97026, №12-01-31212, №13-01-97059, №13-01-97058

Литература

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир. 1984. 428 с.
2. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. New York: Cambridge University Press, 1997. 283 p.

3. Yamada Y., Yoshimura N., Sakura T. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method // International Journal of Mechanical Sciences. 1968. Vol. 10. No.2. Pp. 343–354.
4. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Computational Materials Science. 2003. Vol. 28. Issues 3–4. Pp. 732–742.
5. Schröder J., Gruttmann F. A simple orthotropicfinite elasto-plasticity model based on generalizedstress–strain measures // Computational Mechanics. 2002. Vol. 30. Issue 1. Pp. 38–64.
6. Cheng J.H., Kikuchi N. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1985. Vol. 49. Issue 1. Pp. 71–108.
7. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2008. Т. 150. Кн. 1. С. 29–37.
8. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2008. Т. 150. Кн. 3. С. 122–132.
9. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2009. Т. 151. Кн. 3. С. 108–120.
10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
11. Поздеев А.А., Няшии Ю.А., Трусов П.В. Остаточные напряжения: Теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
12. Berezhnoi D.V., Paimushin V.N. Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2011. Vol. 75. No.4. Pp. 447–462.
13. Neale K.W. A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity // International Journal of Solids and Structures. 1972. Vol. 8. No.7. Pp. 865–876.
14. Султанов Л.У. Исследование больших вязкоупругопластических деформаций в трехмерной постановке МКЭ : Дис. ... канд. физ.-мат. наук . Казань, 2005. 141 с.
15. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел IV. Конечноэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2010. Т. 152. Кн. 4. С. 115–126.
16. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. 2005. №6(41). С. 36–43.
17. Голованов А. И., Султанов Л. У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. №4. С. 13–16.
18. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: КГУ, 2009. 465 с.
19. Gadala M.S., Wang J. Computational implementation of stress integration in FE analysis of elasto-plastic large deformation problems // Finite Elements in Analysis and Design. 2000. Vol. 35. Issue 4. Pp. 379–396.
20. Pinsky P.M., Ortiz M., Pister K.S. Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1983. Vol. 40. Issue 2. Pp. 137–158.
21. Gupta A.K., Mohraz B., Schnobrich W.C. Elasto-plastic analysis of three-dimensional structures using the isoparametric element // Nuclear Engineering and Design. 1972. Vol. 22. Issue 2. Pp. 305–317.
22. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительных методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.

Ленар Усманович Султанов, г. Казань, Россия
Тел раб.: +7(843)233-71-85; эл. почта: ls561@mail.ru

Руслан Лаврентьевич Давыдов, г. Казань, Россия
Тел. раб.: +7(843)233-71-85; эл. почта: ruslan.davydov@mail.ru

Численное исследование гиперупругих материалов

К.ф.-м.н., доцент Л.У. Султанов;
аспирант Л.Р. Фахрутдинов,
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Аннотация. В настоящей работе рассматривается методика исследования гиперупругих тел, использующихся для определения больших деформаций нелинейных упругих материалов (различных полимеров, в том числе эластомеров, пены) с использованием меры деформации Фингера.

Дается кинематика движения среды, напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши – Эйлера. Большое внимание уделено алгоритму получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши – Эйлера. Рассмотрен пример получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши – Эйлера для материала, описываемого потенциалом Муни – Ривлина. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода.

Для проверки работоспособности методики решен ряд задач: задача о плоской деформации квадратной полосы и задача об упругом деформировании плиты под действием равномерного давления. Полученные в ходе решения результаты не противоречат данным, опубликованным ранее.

Ключевые слова: гиперупругие материалы; большие деформации; метод конечных элементов

Введение

В современном строительстве, наряду с традиционными стройматериалами, широко применяются новые, более технологичные типы материалов. К ним относят различные эластомеры и другие подобные полимеры, отличительной особенностью которых является то, что они допускают большие деформации, сохраняя при этом упругие свойства. Подобные материалы также называются гиперупругими. С точки зрения механики деформируемого твердого тела речь идет о нелинейно упругих телах, при деформировании которых необходимо учитывать геометрическую нелинейность в рамках больших деформаций. Подобного рода проблемы рассматриваются во многих статьях и обобщены в ряде монографий, среди которых можно выделить работы [1–9]. В них приводится обширная библиография по данному вопросу и изложены основные положения по построению определяющих соотношений, и в данной статье этот материал активно используется. Из числа журнальных публикаций можно отметить статьи [10–17], которые посвящены гиперупругим и термогиперупругим материалам, в которых также рассматриваются различные варианты построения определяющих соотношений для конкретных материалов и приводятся примеры решения задач. Методика, описанная в этой статье, в идейном плане близка к методам, использованным в работах [18, 19]. Соотношения приводятся в наиболее компактной форме прямого тензорного исчисления. Подробнее о методах и технологии работы с использованием такой формы записи можно ознакомиться в работах [1, 3, 6].

В настоящей работе рассмотрена методика исследования гиперупругих тел с использованием меры деформации Фингера. Приведена кинематика движения среды. Рассмотрен пример получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши – Эйлера для материала, описываемого потенциалом Муни – Ривлина. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода. Также решены некоторые задачи для проверки работоспособности методики.

Кинематика среды

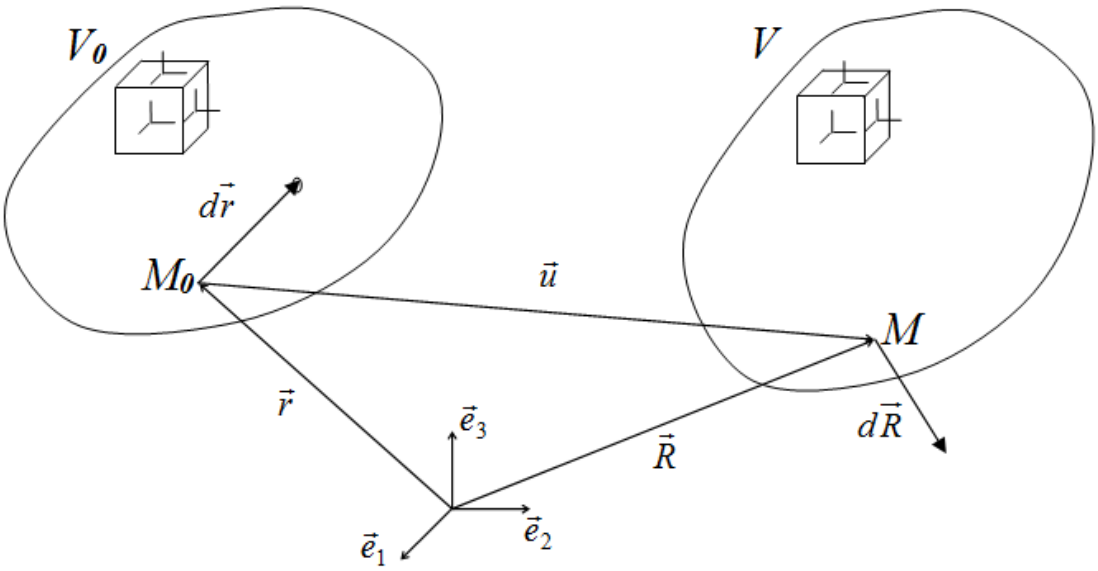


Рисунок 1. Кинематика среды

В глобальной неподвижной системе координат с ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ положение исследуемого деформируемого тела описывается с помощью:

- $\vec{r}\left(\xi^j\right) = x^i\left(\xi^j\right)\vec{e}_i$ – радиус-вектор материальной частицы в недеформированном состоянии;
- $\vec{R}\left(\xi^j\right) = y^i\left(\xi^j\right)\vec{e}_i$ – радиус-вектор материальной частицы в деформированном состоянии;
- $\vec{u}\left(\xi^j\right) = \vec{R}\left(\xi^j\right) - \vec{r}\left(\xi^j\right) = u^i\left(\xi^j\right)\vec{e}_i$ – вектор перемещения;
- $\vec{\upsilon}\left(\xi^j\right) = \dot{\vec{R}}\left(\xi^j\right) = \dot{y}^i\left(\xi^j\right)\vec{e}_i = \upsilon^i\left(\xi^j\right)\vec{e}_i$ – вектор скорости.

Базовым тензором, играющим ключевую роль в кинематике конечных деформаций, является тензор градиента деформаций:

$$(F) = \left(\vec{\nabla}_x \vec{R}\right)^T = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\left(\vec{e}_i \vec{e}_j\right).$$

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются:

- левый тензор Коши – Грина (мера деформации Фингера): $(B) = (F)\cdot(F)^T$;
- тензор пространственного градиента скорости: $(h) = \left(\dot{F}\right)\cdot\left(F^{-1}\right)$;
- тензор деформации скорости:
$$(d) = \frac{1}{2}\left[(h) + (h)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{F}\right)\cdot\left(F^{-1}\right) + \left(F^{-1}\right)^T\cdot\left(\dot{F}\right)^T\right].$$

Определяющие соотношения

Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений $(\Sigma)=\sigma_{ij}\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right)$, определенного в актуальном состоянии.

В качестве аргументов функции потенциальной энергии деформации примем компоненты тензора меры деформации Фингера, т. е. :

$$W=W\left(B_{ij}\right),$$

где вводятся в рассмотрение меры деформации, которые не сопровождаются изменением объема:

$$(\hat{B})=J^{-2/3}(B)$$

Здесь $J=dV/dV_0$ – относительное изменение объема.

Таким образом:

$$W=W_0(J)+W'(I_{1\hat{B}},I_{2\hat{B}}).$$

Тогда тензор напряжений Коши – Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma)=\frac{2}{J}(F)\cdot(F)^T\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right)=\frac{2}{J}(B)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right).$$

Скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$\left(\dot{\Sigma}\right)=\left(\Lambda_\Sigma\right)\cdot\cdot\left(d\right)+\left(h\right)\cdot\left(\Sigma\right)+\left(\Sigma\right)\cdot\left(h\right)^T-\left(\Sigma\right)I_{1d},$$

где введено обозначение:

$$\left(\Lambda_\Sigma\right)=\frac{4}{J}\left(B\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial B\partial B}\right)\cdot\left(B\right).$$

В результате получаем физическое соотношение для производной Трусделла в виде линейного уравнения:

$$\left(\Sigma^{Tr}\right)=\left(\dot{\Sigma}\right)-\left(h\right)\cdot\left(\Sigma\right)-\left(\Sigma\right)\cdot\left(h\right)^T+I_{1d}\left(\Sigma\right)=\left(\Lambda_\Sigma\right)\cdot\cdot\left(d\right).$$

Таким образом, для гиперупругого тела определяющие соотношения для скоростей имеют вид линейной зависимости при использовании обобщенной производной Трусделла для тензора истинных напряжений Коши – Эйлера и тензора деформации скорости.

Алгоритм расчета

Для решения задачи используется метод последовательных нагружений. Считается, что известно k -е состояние, по которому нужно найти $(k+1)$-е состояние.

В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей, записанного для $(k+1)$-го шага:

$$\iiint\limits_{V_{k+1}}\left({}^{k+1}\Sigma\right)\cdot\cdot\left(\delta\,{}^{k+1}d\right)dV=\iiint\limits_{V_{k+1}}{}^{k+1}\vec{f}\cdot\delta\vec{\upsilon}dV+\iint\limits_{S^{\sigma}_{k+1}}{}^{k+1}\vec{t}_n\cdot\delta\vec{\upsilon}dS,$$

где V_{k+1} – текущий объем; S^{σ}_{k+1} – часть его поверхности, на которой заданы усилия; $\vec{f}$, $\vec{t}_n$ – векторы массовых и поверхностных сил.

Переходя к приращениям

$$\left({}^{k+1}\Sigma\right)=\left({}^{k}\Sigma\right)+\left(\Delta\,{}^{k}\Sigma\right),$$

получим разрешающее уравнение, решение которого дает вектор перемещений для текущего шага $\Delta^{k}\vec{u}=\Delta^{k}x_i\vec{e}_i$, с помощью которого определяется конфигурация следующего шага: ${}^{k+1}\vec{R}={}^{k}\vec{R}+\Delta\vec{u}$.

Тогда напряженное состояние находится по соотношению: $\left({}^{k+1}\Sigma\right)=\frac{2}{J}\left({}^{k+1}B\right)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial\,{}^{k+1}B}\right)$.

Рассмотрен пример построения физических соотношений для потенциала упругих деформаций Муни – Ривлина:

$$W=U_1(I_{1\hat{B}}-3)+U_2(I_{2\hat{B}}-3)+\frac{K}{2}(J-1)^2,$$

где $W_0(J)=\frac{K}{2}(J-1)^2$, $W'(I_{1\hat{B}},I_{2\hat{B}})=U_1(I_{1\hat{B}}-3)+U_2(I_{2\hat{B}}-3)$, U_1,U_2- постоянные материала.

Тензор напряжений Коши – Эйлера для этого материала имеет вид:

$$(\Sigma)=2U_1J^{-\frac{5}{3}}\left[(B)-\frac{1}{3}I_{1B}(I)\right]+2U_2J^{-\frac{7}{3}}\left[I_{1B}(B)-\frac{1}{3}I_{1B}^2(I)-\frac{2}{3}\left(B^2\right)\right]+K(J-1)(I).$$

Линеаризуя полученное соотношение, получим выражение для скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$(\Delta\Sigma)=(\Lambda_\Sigma)\cdot\cdot(d)+(h)\cdot(\Sigma)+(\Sigma)\cdot(h)^T-(\Sigma)I_{1d},$$

где

$$(\Lambda_\Sigma)=(\Lambda_{\Sigma'})+\left(\Lambda_{\sigma_0}\right),\quad \Lambda_{\Sigma'}=\frac{4}{J}(B)\cdot\left(\frac{\partial^2W'}{\partial B\partial B}\right),\quad \Lambda_{\sigma_0}=\frac{4}{J}(B)\cdot\left(\frac{\partial^2W_0}{\partial B\partial B}\right).$$

Таким образом, получена система уравнений для определения напряженного состояния, которая может быть дискретизирована методом конечных элементов для получения численных решений.

Численный пример

Для проверки работоспособности методики был решен ряд задач. Рассмотрим некоторые из них.

1. Задача о плоской деформации квадратной полосы со сторонами 0.02×0.02 м^2, $U_1=0.36\,MPa$, $U_2=0,22\,MPa$, $K=2000\,\text{MPa}$. По вертикальным краям полосы заданы перемещения. Так как полоса имеет две оси симметрии, то была рассмотрена четверть полосы с заданием соответствующих условий симметрии [20].

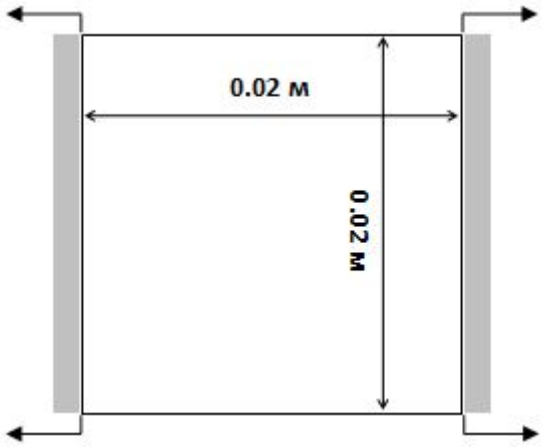


Рисунок 2. Плоское деформирование квадратной полосы

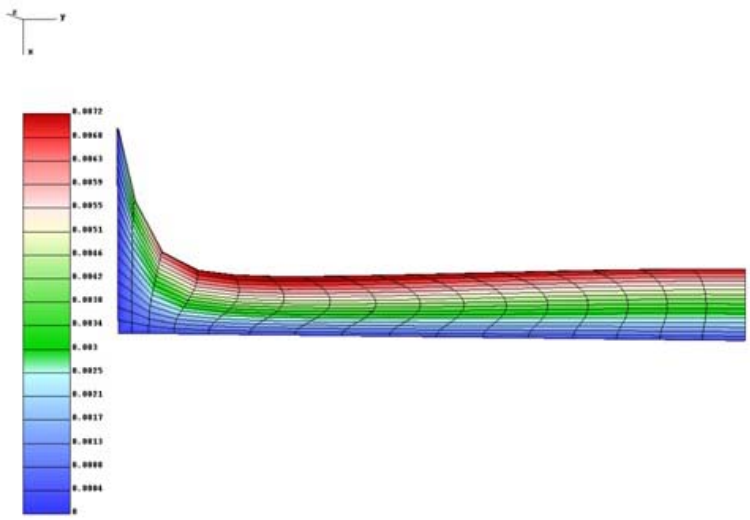


Рисунок 3. Поле вертикальных перемещений полосы

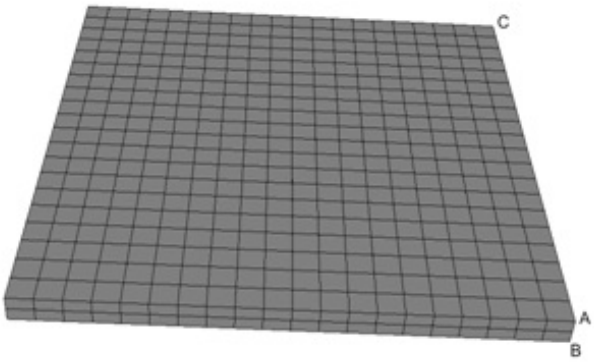


Рисунок 4. Конечно-элементная модель плиты

2. Задача об упругом деформировании плиты под действием равномерного давления $q = 85\,MPa$. Верхнее ребро плиты не имеет вертикального смещения. Плита квадратная со стороной a = 0.02 м и толщиной h = 0.01 м, $K = 2000\ \mathrm{GPa}$. На рисунке 4 изображено недеформированное состояние плиты.

На рисунках 5, 6 изображено поле вертикальных перемещений и поле касательных напряжений.

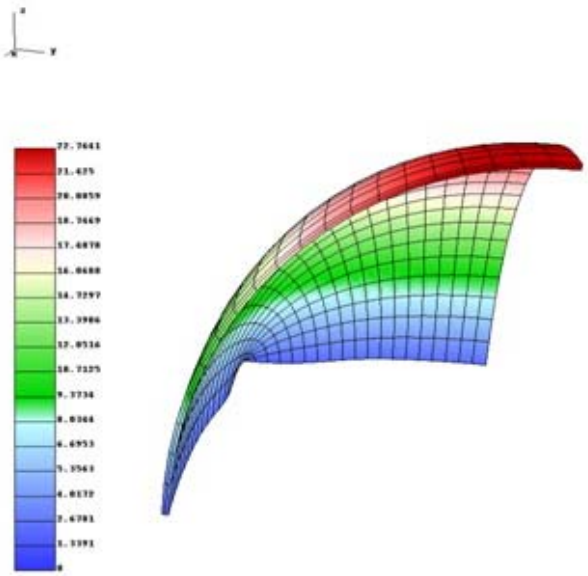


Рисунок 5. Поле вертикальных перемещений плиты

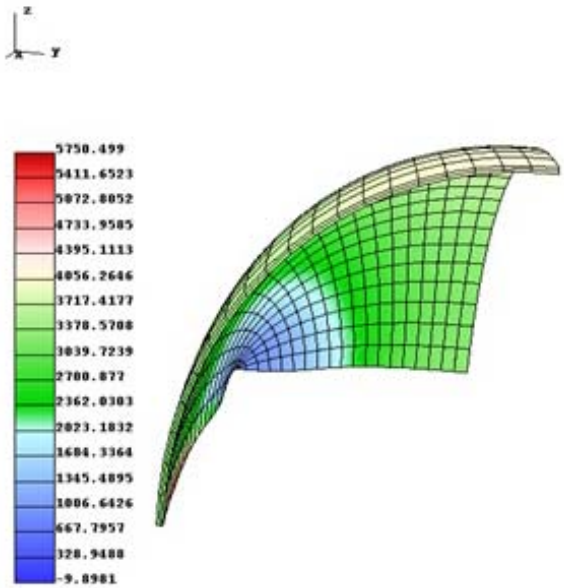


Рисунок 6. Поле касательных напряжений плиты

Заключение

Таким образом, была построена методика численного исследования гиперупругих слабосжимаемых материалов, для которых физические соотношения задаются с помощью

упругого потенциала. Получены линеаризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение для потенциала Муни – Ривлина. Данная методика после конечно-элементной дискретизации может быть использована для определения НДС, что видно из рассмотренных примеров. Решенные задачи демонстрируют эффективность полученной методики.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №12-01-00955, №12-01-97026, №12-01-31212, №13-01-97059, №13-01-97058.

Литература

1. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: КГУ, 2009. 465 с.
2. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
3. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
5. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
6. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
7. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
8. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.
9. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб: СПбГТУ, 1999. 341 с.
10. Конюхов А.В., Коноплев Ю.Г. Модель термогиперупругости и ее применение к исследованию потери устойчивости раздуваемых пластин. I // Известия вузов. Авиационная техника. 2006. №3. С. 12–16.
11. Чернышов А.Д. Простые определяющие уравнения для упругой среды при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. №1. С. 75–81.
12. Simo J.S., Pister K.S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1984. Vol. 46. Issue 2. Pp. 201–215.
13. Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis lased on the use of hyperelastic constitutive equations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1985. Vol. 49. Issue 2. Pp. 221–245.
14. Панов А.Д. Теория определяющих соотношений при деформировании изотропного твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №6. С. 27–44.
15. Vujosevic L., Lubarda V.A. Finite strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theoretical and applied mechanics. 2002. Vol. 28–29. Pp. 379–399.
16. Liu C.H., Wong J.Y., Mang H.A. Large strain finite element analysis of sand: model, algorithm and application to numerical simulation of tire-sand interaction // Computers & Structures. 2000. Vol. 74. Issue 3. Pp. 253–265.
17. Maniatty A.M., Liu Y., Klaas O., Shephard M. Higher order stabilized finite element method for hyperelastic finite deformation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2002. Vol. 191. Issues 13–14. Pp. 1491–1503.
18. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Султанов Л.У. Численное моделирование больших деформаций неупругих трехмерных тел // Наукоемкие технологии. 2004. №4(5). С. 52–60.
19. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. 2005. №6(41). С. 36–43.
20. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. New York: Cambridge University Press, 1997. 283 p.

Ленар Усманович Султанов, г. Казань, Россия
Тел. раб.: +7(843)233-71-85; эл. почта: ls561@mail.ru

Ленар Рустамович Фахрутдинов, г. Казань, Россия
Тел. раб.: +7(843)231-51-85; эл. почта: bishchumbek@gmail.com

Моделирование деформационных процессов ориентированных полимеров на основе описания кинетики надмолекулярных структур, разделенных энергетическими барьерами

К.т.н., доцент А.С. Горшков,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»;
д.т.н., проректор по научной работе А.Г. Макаров,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна»;
к.т.н., доцент А.А. Романова,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики»;
к.ф.-м.н., профессор П.П. Рымкевич,
ГОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского»

Аннотация. В ориентированном состоянии находятся полимеры, состоящие из длинных цепных макромолекул, имеющих преимущественное расположение своих осей вдоль некоторых направлений. Для ориентированных полимеров характерны высокая прочность при растяжении и способность обратимо растягиваться в направлении оси ориентации. Благодаря этим свойствам ориентированные полимеры находят широкое применение в строительной отрасли в виде различных изделий: покрытий, канатов, пленок, синтетических нитей в составе композитных материалов.

При механическом воздействии большинство ориентированных полимеров проявляют нелинейные свойства. В настоящей работе определяющее уравнение нелинейной вязкоупругости ориентированных полимеров получено на основе представлений о существовании у групп макромолекул различных конформационных состояний, разделенных энергетическим барьером. Для описания поведения ориентированных полимеров в рамках представленного подхода введено понятие кванта деформации и рассмотрена кинетика переходов структурных групп макромолекул через потенциальный барьер.

Ключевые слова: полимеры; ориентированное состояние полимеров; принцип наследственности Больцмана; нелинейные реологические свойства полимеров; энергетический барьер; квант деформации; теории нелинейной вязкоупругости; определяющее уравнение

Введение

Ориентированные полимеры применяются в строительстве как для производства специальных изделий и покрытий, например, ветрозащитных фасадных мембран и геотекстильных полотен, так и в качестве матрицы в композитных материалах. Обзор области применения ориентированных полимеров в строительной отрасли и перспектив расширения направлений их использования представлен в работе [1]. Анализ свойств композиционных материалов, в составе которых есть ориентированные полимеры, представлен в работах [2–10]. Свойства композитных материалов зависят от свойств матрицы или полимерного наполнителя, в качестве которых могут выступать ориентированные полимеры.

Следует отметить, что большинство ориентированных полимеров при наличии механических воздействий проявляют нелинейные реологические свойства [11–17]. Для описания механизмов их поведения разработан ряд теорий нелинейной вязкоупругости [18–25], основанных на известном принципе наследственности Л. Больцмана.

Переход от линейной теории вязкоупругости в сторону нелинейной объясняется тем, что в настоящее время теоретической основой построения разнообразных методов расчетного прогнозирования напряженно-деформированных состояний синтетических материалов в области неразрушающих нагрузок считается кинетическая природа процессов деформирования. При этом механические воздействия являются активирующими, то есть ускоряют эндохронные (внутренние) реакции микромеханизмов протекающих процессов, уменьшая времена запаздывания и времена релаксации.

Большинство теорий нелинейной вязкоупругости отличаются видом ядра релаксации $R(\varepsilon, t, \tau)$ и обосновываются либо анализом большого числа экспериментальных данных, либо некоторыми общими физическими аналогиями [26–31]. Использование «гладких» ядер в уравнении (1) имеет ряд чисто математических удобств, что позволяет вполне удовлетворительно описывать полимерные материалы широкого класса.

В литературе часто встречается нелинейное уравнение [27], построенное на основе принципа суперпозиции Больцмана и на отказе от учета линейной связи между напряжениями и деформациями, которое в случае простой ползучести имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t D'_\sigma(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(t)$ – деформация;

$\sigma(t)$ – напряжение;

E – модуль упругости;

t – время;

$D_\sigma(t-\tau)$ – функция запаздывания;

$D'_\sigma(t-\tau) = \dfrac{\partial D_\sigma(t-\tau)}{\partial t}$ – производная функции запаздывания.

Для двумерного режима деформирования уравнение (1) обобщено И.И. Бугаковым [23] и имеет вид:

$$\varepsilon_{ij}(t) = D_{ijkl}\,\sigma_{kl}(t) + \int_0^t D'_{ij}(t-\tau)\,\sigma_{kl}(\tau)\,d\tau\,. \tag{2}$$

Здесь обозначения те же, что и в уравнении (1): *i*, *j*, *k*, *l* – ковариантные индексы тензоров; $\sigma_{kl}(t)$ и $\varepsilon_{ij}(t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения и деформации.

Удобство ядер, введенных в рассмотрение И.И. Бугаковым, состоит в их одинаковой форме как для уравнения релаксации, так и для уравнения ползучести.

Еще одним уравнением нелинейной теории является уравнение В.В. Москвитина, объединившее идеи Ю.Н. Работнова и Персо. Данное уравнение учитывает накопление повреждений, используя линейное уравнение Вольтерра с модифицированным по накопленным повреждениям временем:

$$\varphi(\varepsilon_u)\,K = f(\sigma_u, \sigma)\,\sigma + \int_0^t U(t-\tau)\,f(\sigma_u, \sigma)\,\sigma(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где $\varphi(\varepsilon_u)$ – искомая функция от деформации;

K – коэффициент, задающий размерность функции $\varphi(\varepsilon_u)$;

$f(\sigma_u, \sigma)$ – функция накоплений повреждений;

$U(t-\tau)$ – интегрально-временное ядро;

$\sigma(\tau)$ – напряжение как функция времени.

Таким образом, рассмотрение нелинейных уравнений (Персо, Москвитина, Бугакова), содержащих нелинейность в виде функции от деформации или напряжения, существенно усложняет задачу по сравнению с линейным вариантом вязкоупругих свойств.

Основным следствием из анализа поведения синтетических полимерных материалов в различных режимах деформирования нужно признать существование уравнения напряженно-деформированного состояния в виде:

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}) = 0. \quad (4)$$

Уравнение состояния в форме (4) однозначно определяет особенности поведения полимерных материалов.

Решения уравнения (4) для разных режимов деформирования (задача Коши) представляют собой интегральные кривые и в некоторых случаях могут быть представлены в форме уравнений (1)–(3). Отметим, что большинство классических механических моделей, например, Кельвина – Фойгта, Максвелла и т. д., имеют вид уравнения (4) в линейном случае.

В рамках данного исследования поставим задачу определения явного вида определяющего уравнения (4).

Моделирование процессов деформирования

Сложную и многообразную надмолекулярную структуру ориентированных полимерных материалов будем рассматривать как множество различных групп макромолекул, которые будем называть кластерами или, в соответствии с терминологией, принятой в работе [32], активными конформационными элементами (АКЭ). Каждый кластер может находиться в различных энергетических состояниях, разделенных энергетическим барьером. Можно считать, что любой кластер соответствующего типа имеет два устойчивых энергетических состояния.

Энергетическая диаграмма АКЭ представлена на рисунке 1.

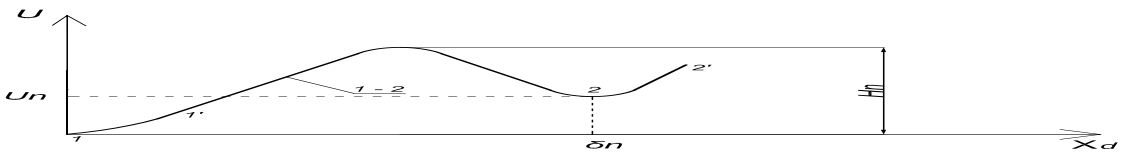


Рисунок 1. Энергетическая диаграмма АКЭ

Обобщенную физическую модель ориентированного полимерного материала можно представить в виде набора кластеров (АКЭ) со следующими характеристиками: H_n, U_n, δ_n, m_{1n}, m_{2n}, где n – номер типа кластера; H_n – высота энергетического барьера, отсчитываемая от уровня минимума энергии в состоянии с наименьшей энергией; U_n – величина энергетического зазора; δ_n – величина кванта деформации, m_{1n} и m_{2n} – числа заполнения состояний, приходящиеся на единицу длины образца. Все энергетические величины, т. е. H_n и U_n, как принято в молекулярной физике, будем измерять в единицах температуры. Если для данного типа кластеров выполняется условие термодинамического равновесия, то числа заполнения m_{1n}^p и m_{2n}^p подчиняются статистике Больцмана, а именно:

$$m_{1n}^p = \frac{m_{0n}}{1 + \exp\left[-U_n^*\right]}; \qquad m_{2n}^p = \frac{m_{0n}}{1 + \exp\left[U_n^*\right]}, \quad (5)$$

где $m_{0n} = m_{1n} + m_{2n}$ – полное число кластеров.

В уравнении (5) и далее верхним индексом * будут обозначаться величины, отнесенные к абсолютной температуре:

$$U_n^* = U/T.$$

Все энергетические барьеры различного типа кластеров можно условно разделить на три группы. Первая группа АКЭ относится к низкоэнергетическим, для которых $H_n << T$. Их состояние всегда можно считать термодинамически равновесным. Для второй группы (рабочие энергетические барьеры) $H_n \approx T$, т. е. те барьеры, которые и отвечают за вязкоупругие свойства полимерных материалов. Третья группа – высокоэнергетические барьеры $H_n >> T$, переход через которые при данной температуре T маловероятен.

Примем, что все переходы статистически независимы, т. е. не будем учитывать «кооперативные» переходы, возможные, например, при резонансе. На основании допущения, согласно которому полимерный материал состоит из молекулярных групп одного вида, примем, что материал обладает для всех его элементов одинаковой жесткостью, т. е. для него существует «истинный» модуль упругости E_0, слабо зависящий от температуры и одинаковый для всех кластеров.

Введя такие допущения, рассмотрим кинетику переходов через потенциальный барьер для одного типа АКЭ. Квант деформации δ высвобождается (рождается) при переходе АКЭ из состояния 1 в состояние 2 (см. рисунок 1) и поглощается при противоположном переходе. Внешняя сила оказывает активирующее действие на АКЭ, понижая потенциальный барьер на величину упругой энергии в направлении прямого перехода, и наоборот, повышает величину барьера (т. к. работа совершается против внешних сил) в противоположном направлении (точки 1` и 2` на рисунке 1).

Значение энергии $E = H_n$ кластера можно рассматривать как некоторое промежуточное метастабильное короткоживущее состояние, аналогом которого является активированный комплекс в химии и компаунд-ядро в ядерной физике. Поскольку упругая энергия есть квадратичная форма от величины механического напряжения σ, то и высоты энергетических барьеров будут являться квадратичными функциями от величины механического напряжения:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{12}^* &= \frac{H_{12}^*}{T} = \frac{1}{T}\left(H - \gamma X^2\right) = H^* - \gamma^* X^2 \\ \widetilde{H}_{21}^* &= \frac{H_{21}^*}{T} = \frac{1}{T}\left(H - U + \gamma X^2\right) = H^* + \gamma^* X^2 , \end{aligned} \qquad (6)$$

где γ – структурно-чувствительный коэффициент, входящий в упругую энергию кластера;

$X = \sigma/E_0$ – «истинно» упругая часть деформации.

Введем величины $\widetilde{W}_{12n}$ и $\widetilde{W}_{21n}$ – вероятности переходов в единицу времени из состояния 1` в состояние 2` и наоборот. Согласно статистике Больцмана, эти величины определяются приведенными высотами энергетического барьера, а именно:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{12n} &= \nu_{0n} \exp\left[-\widetilde{H}_{12}^*\right]; \\ \widetilde{W}_{21n} &= \nu_{0n} \exp\left[-\widetilde{H}_{21}^*\right], \end{aligned} \qquad (7)$$

где ν_{0n} – частота подхода к барьеру для данного типа кластеров.

Пусть в начальный момент времени в недеформированном образце числа заполнения состояний для данного типа АКЭ были m_{1n} и m_{2n} соответственно, причем

$$m_{1n} + m_{2n} = m_{0n} = const, \qquad (8)$$

т. е. полное число кластеров было неизменно.

В произвольный момент времени t эти числа заполнения равны $\widetilde{m}_{1n}$ и $\widetilde{m}_{2n}$. Составим кинетическое уравнение для изменения числа кластеров на единицу длины данного типа с учетом соотношений (7) и (8). Имеем:

$$\begin{aligned} d\,m_{2n} &= -d\,m_{1n} = \left[\widetilde{m}_{1n}\,\widetilde{W}_{12n} - \widetilde{m}_{2n}\,\widetilde{W}_{21n}\right] d\,t = \\ &= \left[m_{0n}\,\widetilde{W}_{12n} - \left(\widetilde{W}_{12n} + \widetilde{W}_{21n}\right)\left(\widetilde{m}_{2n} - m_{2n} + m_{2n}\right)\right] d\,t = \\ &= \left[m_{0n}\,\widetilde{W}_{12n} - m_{2n}\left(\widetilde{W}_{12n} + \widetilde{W}_{21n}\right)\right] d\,t - \left(\widetilde{W}_{12n} + \widetilde{W}_{21n}\right)\left(\widetilde{m}_{2n} - m_{2n}\right) d\,t\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим конформационную часть деформации, вносимую данным типом кластеров, через ε_n:

$$\varepsilon_n = \Delta\,\widetilde{m}_2\,\delta_n = \left(\widetilde{m}_{2n} - m_{2n}\right)\delta_n\,. \tag{10}$$

Тогда для $\dot{\varepsilon}_n$ можно записать следующее кинетическое уравнение:

$$\dot{\varepsilon}_n + \varepsilon_n\left(\widetilde{W}_{12n} + \widetilde{W}_{21n}\right) = \delta_n\left[m_0\,\widetilde{W}_{12} - m_{2n}^p\left(\widetilde{W}_{12} + \widetilde{W}_{21}\right) - \left(m_2 - m_2^p\right)\left(\widetilde{W}_{12} + \widetilde{W}_{21}\right)\right]. \tag{11}$$

Здесь введены равновесные значения кластеров m_{1n}^p и m_{2n}^p при начальной температуре T_0, определяемые распределением Больцмана (5). При этом

$$\begin{aligned} & m_{0n}\,\widetilde{W}_{12n} - \left(\widetilde{W}_{21n} + \widetilde{W}_{12n}\right) m_{2n}^p = m_{0n}\,\widetilde{W}_{12n} - \frac{\left(\widetilde{W}_{21n} + \widetilde{W}_{12n}\right) m_{0n}\,W_{12}}{\left(W_{12} + W_{21}\right)} = \\ & = m_{0n}\,\frac{\widetilde{W}_{12}\,W_{21} - \widetilde{W}_{21}\,W_{12}}{\left(W_{12} + W_{21}\right)} = m_{0n}\,\frac{\nu_{0n}^2\,\exp\left[-2H^* + U^*\right]\left(\exp\left[\gamma^*\,X^2\right] - \exp\left[-\gamma^*\,X^2\right]\right)}{\left(W_{12} + W_{21}\right)} = \\ & = \frac{2\,m_{0n}\,\nu_{0n}\,\exp\left[-H_n^*\right]}{\exp\left[-U_n^*\right]}\,sh\left(\gamma_n^*\,X^2\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь W_{12n} и W_{21n} – вероятности переходов в единицу времени из состояния 1 в состояние 2 и наоборот, в отсутствии внешней нагрузки σ.

Если ввести начальную (скрытую) деформацию ε_{0n}, равную

$$\varepsilon_{0n} = \delta_n\left(m_{2n} - m_{2n}^p\right), \tag{13}$$

то основное кинематическое уравнение, описывающее эволюцию данного типа кластеров, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \dot{\varepsilon}_n + \nu_{0n}\,\exp\left[-H_n^*\right]\left(\exp\left[\gamma_n\,X^2\right] + \exp\left[U_n^* - \gamma_n^*\,X^2\right]\right)\left(\varepsilon_n + \varepsilon_{0n}\right) = \\ & = \frac{2\,m_0\,\nu_0\,\delta_n\,\exp\left[-H_n^*\right]}{1 + \exp\left[-U_n^*\right]}\,sh\left(\gamma_n\,X^2\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Обратим внимание, что в процессе получения нитей и волокон (обычно при достаточно высоких температурах) кластеры с высокими энергетическими барьерами (в дальнейшем – неупругие АКЭ) всегда будут иметь скрытую деформацию ε_{0n}, определяемую степенью вытяжки. При нагревании числа заполнения будут стремиться к равновесным значениям. Этим, в частности, объясняется значительная усадка полимерных материалов. Если ввести характерное время релаксации кластера

$$\tau_n = \frac{1}{\nu_{0n}}\,\exp\left[H_n^*\right] = \tau_{0n}\,\exp\left[H_n^*\right], \tag{15}$$

то уравнение (14) можно переписать так:

$$\tau_n\ \dot{\varepsilon}_n + \left(\exp\left[\gamma_n^* X^2\right] + A_n\ \exp\left[-\gamma_n^* X^2\right]\right)\left(\varepsilon_n + \varepsilon_0\right) = q_n\ sh\left(\gamma_n X^2\right), \tag{16}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_n = \exp\left[U_n^*\right];$$
$$q_n = \frac{2\,m_{0n}\ \delta_n}{1+\exp\left[-U_n^*\right]} = \frac{2\,m_{0n}\ \delta_n\ A_n}{1+A_n}. \tag{17}$$

Величины A_n и q_n в уравнениях (17) представляют собой характеристики, зависящие от температуры и имеющие ясный физический смысл.

Заметим, что времена релаксации кластеров сильно зависят от высоты барьеров и могут колебаться в пределах десятков порядков.

Рассмотрим самый общий случай. Пусть имеется недеформированный образец с некоторым начальным распределением кластеров по состояниям. В процессе эксплуатации он подвергается изменяющейся со временем нагрузке $X(t) = \sigma(t)/E_0$ в условиях переменной температуры $T(t)$. Решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (14) имеет вид:

$$\varepsilon_n(t) = \int_0^t \left[q_n\ sh\left(\gamma_n X^2\right) - \varepsilon_{0n}\left(\exp\left[\gamma_n X^2\right] + A_n \exp\left[-\gamma_n X^2\right]\right)\right]\frac{1}{\tau}\times$$
$$\times\exp\left[-\int_\Theta^t \left(\exp\left[\gamma_n X^2\right] + A_n \exp\left[-\gamma_n X^2\right]\right)\frac{d\tau}{\tau_n}\right] d\Theta. \tag{18}$$

Будем считать, что общая деформация складывается из трех частей, а именно:

$$\varepsilon = X + \varepsilon_{конф} + \varepsilon_{неупр}. \tag{19}$$

Отметим, что под истинно неупругой деформацией в этой работе понимается только та часть деформации, которая появляется вследствие накопления повреждений и необратима при температурных воздействиях. Учесть и эту часть деформации можно, принимая в кинетическом уравнении (12) $\widetilde{W}_{21} \equiv 0$. В данной работе это слагаемое учитываться не будет, поскольку оно отвечает за разрушение образца. С учетом выражений (18) и (19) в общем случае при наличии набора кластеров получим определяющее уравнение в форме:

$$\varepsilon(t) = X + \sum_{(n)}\int_0^t \left[q_n\ sh\left(\gamma_n X^2\right) - \varepsilon_{0n}\left(\exp\left[\gamma_n^* X^2\right] + A_n \exp\left[-\gamma_n^* X^2\right]\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\int_\Theta^t \left(\exp\left[\gamma_n^* X^2\right] + A_n \exp\left[-\gamma_n^* X^2\right]\right)\frac{d\tau}{\tau_n}\right]\frac{d\Theta}{\tau_n}. \tag{20}$$

Считаем спектр времен релаксации квазинепрерывным, тогда вместо суммирования необходимо произвести интегрирование. В качестве переменной интегрирования целесообразно рассмотреть высоту энергетического барьера *H*. В этом случае состояние системы будет описываться набором функций:

- $m_0(H)\delta(H) = \xi(H)$, где $\xi(H)$ – предельная плотность деформации, которую можно получить при полном деформировании всех кластеров данного типа;
- $U(H)$ – характеристика материала, определяющая энергетический зазор между устойчивыми состояниями для данного типа АКЭ;
- $\nu_0(H)$ – частота подхода к барьеру (предэкспоненциальный множитель);
- $\varepsilon_0(H)$ – технологический фактор, определяемый степенью вытяжки исходного образца.

Тогда определяющее уравнение в общем случае будет выглядеть так:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E_0}+\int_0^{\infty}\int_0^{t}\left\{q(H)sh\left(\gamma^*(H)\frac{\sigma^2}{E_0^2}\right)-\varepsilon_0(H)\left(\exp\left[\gamma^*(H)\frac{\sigma^2}{E_0^2}\right]+A(H)\exp\left[-\gamma^*(H)\frac{\sigma^2}{E_0^2}\right]\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left[-\int_{\Theta}^{t}\left(\exp\left[\gamma^*(H)\frac{\sigma^2(\tau)}{E_0^2}\right]+A(H)\exp\left[-\gamma^*(H)\frac{\sigma^2(\tau)}{E_0^2}\right]\right)\nu_0(H)\exp\left[-\frac{H}{T}\right]d\tau\right]\times \tag{21}$$
$$\times\nu_0(H)\exp\left[-\frac{H}{T}\right]dH\,d\Theta,$$

где введены следующие обозначения:

$\gamma^*(H)$ – структурно-чувствительная функция;

$A(H)=\exp\left[U^*(H)\right]$;

$q(H)=\dfrac{2\xi(H)A(H)}{1+A(H)}$;

$B(H,\sigma)=\exp\left[\gamma^*(H)\dfrac{\sigma^2}{E_0^2}\right]+A(H)\exp\left[-\gamma^*(H)\dfrac{\sigma^2}{E_0^2}\right]$.

Если ввести ядро запаздывания в виде:

$$R(t,\Theta)=\int_0^{\infty}\left\{q(H)sh\left[\gamma^*(H)\frac{\sigma^2(\Theta)}{E_0^2}\right]-\varepsilon_0(H)B(H,\sigma(\Theta))\right\}\times$$
$$\times\exp\left[-\int_{\Theta}^{t}B(H,\sigma(\tau))\nu_0(H)\exp\left[-\frac{H}{T}\right]d\tau\right]\nu_0(H)\exp\left[-\frac{H}{T}\right]dH, \tag{22}$$

то уравнение (21) выражает собой принцип Больцмана в нелинейном случае:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E_0}+\int_0^{t}R(t,\Theta)\,d\Theta. \tag{23}$$

Примеры численных расчетов применительно к конкретным объектам исследования (одноосно-ориентированным поликапроамидным пленочным нитям, комплексным нитям лавсан, нитрон, фенилон, СВМ) будут представлены в последующих публикациях.

Выводы

На основании предложенной физической модели и моделирования деформационных процессов ориентированных полимеров, применяемых в строительной отрасли, сформулированы следующие основные выводы:

- представлена обобщенная физическая модель ориентированного полимерного материала;
- модель полимера рассмотрена в виде суммы кластеров (активных конформационных элементов – АКЭ), находящихся в различных энергетических состояниях и разделенных между собой энергетическим (потенциальным) барьером;
- для данного типа АКЭ рассмотрена кинетика переходов через потенциальный барьер;
- введено понятие кванта деформации, высвобождающегося или поглощающегося при переходе АКЭ из одного энергетического состояния в другое;
- получено основное определяющее уравнение вязкоупругого поведения ориентированных полимеров, выражающее принцип Больцмана в нелинейном случае.

Литература

1. Столяров О.Н., Горшков А.С. Применение высокопрочных текстильных материалов в строительстве // Инженерно-строительный журнал. 2009. №4(6). С. 21–25.
2. Hannant D.J., Zonsveld J.J., Hughes D.C. Polypropylene film in cement based materials // Composites. 1978. Vol. 9. Issue 2. Pp. 83–88.
3. Wang Y., Backer S. An experimental study of synthetic fiber reinforced cementations composites // Journal of Material Science. 1987. Vol. 22. Issue 12. Pp. 4281–4291.
4. Walton P.L., Majumdar A.J. Cement Based Composites with Mixtures of Different Types of Fibres // Composites. 1975. Volume 9. Pp. 209-216.
5. Walton P.L., Majumdar A.J. Creep of Kevlar 49 fiber and a Kevlar 49-cement composite // Journal of Materials Science. 1983. Vol. 18. Issue 10. Pp. 2939–2946.
6. Konczalski P., Piekarski K. Tensile properties of Portland cement reinforced with Kevlar fibers // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 1982. Vol. 1. No.4. Pp. 378–384.
7. Mansur M.A., Aziz M.A. Study of bamboo-mesh reinforced cement Composites // International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete. 1983. No.5. Pp. 165–171.
8. Parton G.M., Shendy-El-Barbary M.E. A finite element analysis for cement composite sandwich // International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete. 1983. No.3. Pp. 181–191.
9. Sounharajan V.M., Ansual Jain, Abhishek Kumar Singh, Thirumurugan S., Sirakumar A. Evaluation of composite polypropylene fiber reinforced concrete // International Journal of Engineering and Technology. 2013. Vol. 5. No.2. Pp. 1817–1828.
10. Li V.S, Wang S. Flexural behavior of glass fiber-reinforced polymer (GFRP) reinforced engineered cementations composite beams // ACI Materials Journal. 2012. Vol. 99. No.1. Pp. 11–21.
11. Stalevich A.M., Ginzburg B.M. Crystal-Like Bundles in Intrafibrillar Amorphous Regions and Non-Linear Viscoelasticity of Oriented Semicrystalline Polymers // Journal of Macromolecular Science, Part B. Physics. 2006. Vol. 45. Issue 2. Pp. 377–394.
12. Romanova A.A., Stalevich A.M. Rymkevich P.P., Gorschkov A.S., Ginzburg B.M. A New Phenomenon – Amplitude-Modulated Free Oscillations (Beatings) in the Loaded Highly Oriented Fibers from Semicrystalline Polymers // Journal of Macromolecular Science, Part B. Physics. 2007. Vol. 46. Issue 3. Pp. 467–474.
13. Romanova A.A., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S., Stalevich A.M. Dynamic relaxation of synthetic fibres // Fiber Chemistry. 2005. Vol. 37. No.4. Pp. 289–292.
14. Романова А.А., Рымкевич П.П., Горшков А.С., Сталевич А.М. Релаксирующий модуль Юнга синтетических нитей // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2007. №4. С. 3–5.
15. Горшков А.С., Романова А.А., Рымкевич П.П., Сталевич А.М. Метод обнаружения различающихся микромеханизмов деформирования ориентированных полимеров в неразрушающей зоне воздействия // Физико-химия полимеров: синтез, свойства и применение. 2003. №9. С. 60–64.
16. Горшков А.С., Романова А.А., Рымкевич П.П., Сталевич А.М. Моделирование динамической релаксации высокоориентированных аморфно-кристаллических полимеров // Физико-химия полимеров: синтез, свойства и применение. 2003. №9. С. 85–89.
17. Горшков А.С., Романова А.А., Рымкевич П.П., Сталевич А.М. Амплитудная модуляция ориентированных полимеров в начальной стадии деформирования // Физико-химия полимеров: синтез, свойства и применение. 2004. №10. С. 111–112.
18. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
19. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М: Наука, 1970. 535 с.
20. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров. М.: ИЛ, 1952. 720 с.
21. Сталевич А.М. Деформирование ориентированных полимеров / СПГУТД. СПб., 2002. 250 с.
22. Макаров А.Г., Демидов А.В. Методы математического моделирования механических свойств полимеров. СПб.: Изд-во СПбГУТД, 2009. 392 с.
23. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 288 с.

24. Ward I.M., Hadley D.W. An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers. Chichester, UK: John Wiley, 1993. 334 p.

25. Alfrey T. Mechanical Behavior of High Polymers. New York, London: Wiley, 1948. 606 p.

26. Екельчик В.С., Рябов В.М. Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Механика композитных материалов. 1981. №3. С. 393–404.

27. Макаров А.Г., Демидов А.В. Оптимизация методов спектрального моделирования деформационных процессов полимеров. СПб.: Изд-во СПбГУТД, 2008. 280 с.

28. Демидов А.В., Макаров А.Г., Сталевич А.М. Вариант моделирования нелинейно-наследственной вязкоупругости полимерных материалов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. №1. С. 155–165.

29. Сталевич А.М., Макаров А.Г. Простейший вариант наследственного ядра релаксации ориентированного аморфно-кристаллического полимера // Физико-химия полимеров. 1999. Вып. 5. С. 58–64.

30. Макаров А.Г., Горшков А.С., Рымкевич П.П., Переборова Н.В. Метод коррекции параметров математической модели релаксации полимеров по точкам экспериментальной диаграммы растяжения // Дизайн. Материалы. Технология. 2012. Т. 1. №21. С. 23–28.

31. Макаров А.Г., Горшков А.С., Рымкевич П.П., Ишмуратова Р.Р. Метод определения спектральных характеристик эластомеров // Дизайн. Материалы. Технология. 2012. Т. 2. №22. С. 38–42.

32. Рымкевич П.П., Романова А.А., Горшков А.С., Макаров А.Г. Физические основы вязкоупругого поведения ориентированных аморфно-кристаллических полимеров // Известия вузов. Технология легкой промышленности. 2012. Т. 16. №2. С. 70–73.

Александр Сергеевич Горшков, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)388-43-15; эл. почта: alsgor@yandex.ru

Авинир Геннадьевич Макаров, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)945-58-05; эл. почта: makvin@mail.ru

Алла Александровна Романова, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)211-34-26; эл. почта: romallaa@yandex.ru

Павел Павлович Рымкевич, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)224-59-13; эл. почта: rymkewitch@yandex.ru

Требования к материалам, представляемым к публикации

Материалы принимаются только через систему электронной редакции журналов СПбГПУ. Авторам необходимо зарегистрироваться в системе (http://journals.spbstu.ru/) и подать статью через нее, предварительно ознакомившись с нижеприведенными требованиями и условиями опубликования. Публикация в журнале бесплатна для авторов.

Этические нормы и авторские права

Подавая статью в журнал, автор соглашается на условия лицензионного договора, в частности, на то, что все статьи без исключения публикуются в открытом доступе на сайте журнала и в Научной электронной библиотеке России. Также автор подтверждает, что статья является оригинальной, ранее не опубликованной, содержит только проверенные и точные данные; любые данные, полученные не автором, имеют соответствующие ссылки на источник.

Тематика статей

В "Инженерно-строительном журнале" публикуются оригинальные, ранее не опубликованные статьи, содержащие полученные авторами новые научные результаты, по тематике «Строительство». Статьи принимаются в тот или иной номер в соответствии с тематикой на текущее полугодие.

№	Дата выхода	Срок подачи материалов	Тема номера
1(45)	14.02.2014	27.12.2013	Строительные конструкции. Строительная механика
2(46)	28.03.2014	17.02.2014	Гидравлика. Теплотехника. Инженерные сети и системы зданий
3(47)	25.04.2014	17.03.2014	Технология и организация строительства. Строительные материалы и изделия
4(48)	27.06.2014	12.05.2014	Основания и фундаменты. Подземные сооружения. Гидротехническое строительство

Структура и содержание статей

Обязательны следующие элементы статьи: введение, включающее обзор иностранной и отечественной литературы и постановку задачи; основная часть (описание исследования); заключение, включающее нумерованные выводы; список литературы; источник финансирования (если есть).

Технические требования к статьям

Статьи подаются в формате docx (MS Word 2007-2010). Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст, без названия, списка литературы, фамилий и данных авторов. Все эти поля заполняются отдельно при подаче через электронную редакцию.

Рекомендуемый объем статей: от 15000 до 30000 знаков с пробелами. Таблицы выполняются средствами Word (не рисунками) и располагаются внутри текста статьи. Иллюстрации должны быть представлены в отдельных графических файлах (один рисунок – один файл). Допустимые форматы: JPEG, TIFF, BMP. В текстовый файл иллюстрации можно вставить для обозначения рекомендуемого места их использования.

Список литературы на русском языке должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Цитируемая литература приводится общим списком в конце статьи в порядке упоминания. Порядковый номер в тексте заключается в квадратные скобки. Текст статьи должен содержать ссылки на все источники из списка литературы. Также к статье прилагается список литературы на латинице, оформленный в соответствии с инструкцией по транслитерации списка литературы, размещенной на сайте издания.

Аннотация к статье

В журнал подается расширенная аннотация на двух языках: русском и английском. Особое внимание следует уделить аннотации на английском языке (если статья на русском). Аннотация должна повторять структуру статьи: актуальность, цель, методика, результаты, выводы. Аннотация должна содержать от 100 до 250 слов.

Подробные требования к статьям см. на сайте журнала:
http://www.engstroy.spb.ru/autors.html

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Инженерно-строительный институт

Магистратура по направлениям «Строительство» и «Природообустройство и водопользование»

Что такое магистратура?

- Фундаментальное профессиональное образование
- Получение специализированных знаний в рамках направления
- Подготовка к научно-исследовательской или педагогической деятельности
- Получение квалификации, признанной во всем мире
- Возможность дальнейшего обучения в аспирантуре и получения ученой степени

Условия поступления и обучения

- ✓ На обучение принимаются лица, имеющие высшее образование (квалификация «бакалавр», «специалист» или «магистр»)
- ✓ Документы принимаются в период работы приемной комиссии ФГБОУ ВПО «СПбГПУ»
- ✓ Зачисление проходит на конкурсной основе по результатам междисциплинарного экзамена в объеме требований ФГОС ВПО по направлению подготовки
- ✓ Обучение проходит в течение 2 лет
- ✓ Обучение проходит на бюджетной или контрактной основе
- ✓ Обучение проходит по очной или заочной форме

Особенности обучения на инженерно-строительном факультете:

- фундаментальность образования Политехнического университета
- научная школа, проверенная временем – в 2007 г. факультету исполнилось 100 лет
- широкий выбор самых актуальных специальностей
- индивидуальная работа с каждым студентом, включающая активную научно-исследовательскую работу и опыт педагогической деятельности;
- регулярное участие магистров в семинарах, конференциях, научных форумах;
- ориентация учебного процесса на применение современных компьютерных технологий;
- постоянное общение с представителями ведущих строительных и проектных организаций.

Магистерская программа	Кафедра
Теория и практика организационно-технологических и экономических решений в строительстве	СУЗИС
Морские гидротехнические сооружения и сооружения водных путей	ВИГС
Речное и гидротехническое строительство	ВИГС
Проектирование, строительство, управление и экспертиза объектов недвижимости в энергетике и водном хозяйстве	ВИГС
Теория и проектирование зданий и сооружений	СМИСК
Организация и управление инвестиционно-строительными проектами	СУЗИС
Теория и методы компьютерного моделирования в расчетах сооружений	СМИСК
Строительство объектов ландшафтной архитектуры	ВИГС
Техническая эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений	СМИСК
Автоматизированное проектирование зданий и сооружений	СУЗИС
Инженерные системы зданий и сооружений	СУЗИС
Ландшафтное обустройство территории	ВИГС
New! Civil engineering (на англ. яз.)	СУЗИС

Контакты

195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2
552-79-03, 535-25-09
dekanat@cef.spbstu.ru; www.cef.spbstu.ru

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Инженерно-строительный институт
Курсы повышения квалификации и профессиональной переподготовки
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
тел/факс: 552-94-60, www.stroikursi.spbstu.ru,
stroikursi@mail.ru

Приглашает специалистов проектных и строительных организаций,
не имеющих базового профильного высшего образования
на курсы профессиональной переподготовки (от 500 часов)
по направлению «Строительство» по программам:

П-01 «Промышленное и гражданское строительство»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Основы проектирования зданий и сооружений***
- ***Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD***
- ***Автоматизация сметного дела в строительстве***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций технического заказчика***

П-02 «Экономика и управление в строительстве»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Экономика и ценообразование в строительстве***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Организация, управление и планирование в строительстве***
- ***Автоматизация сметного дела в строительстве***

П-03 «Инженерные системы зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы механики жидкости и газа***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем вентиляции и кондиционирования***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем отопления и теплоснабжения***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем водоснабжения и водоотведения***
- ***Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD***
- ***Электроснабжение и электрооборудование объектов***

П-04 «Проектирование и конструирование зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы сопротивления материалов и механики стержневых систем***
- ***Проектирование и расчет оснований и фундаментов зданий и сооружений***
- ***Проектирование и расчет железобетонных конструкций***
- ***Проектирование и расчет металлических конструкций***
- ***Проектирование зданий и сооружений с использованием AutoCAD***
- ***Расчет строительных конструкций с использованием SCAD Office***

П-05 «Контроль качества строительства»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Проектирование и расчет железобетонных конструкций***
- ***Проектирование и расчет металлических конструкций***
- ***Обследование строительных конструкций зданий и сооружений***
- ***Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика***

По окончании курса слушателю выдается диплом о профессиональной переподготовке установленного образца, дающий право на ведение профессиональной деятельности