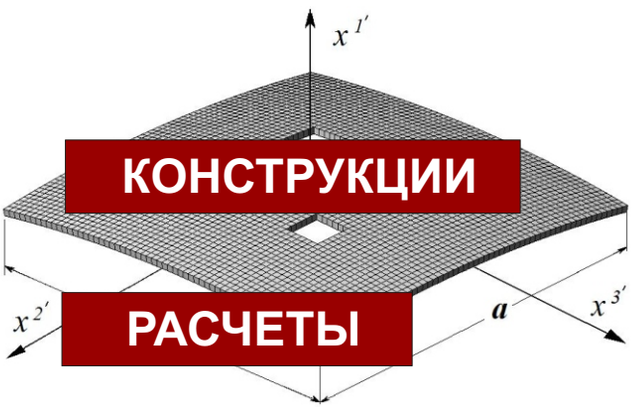
ISSN 2071-4726

Инженерно-строительный журнал

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

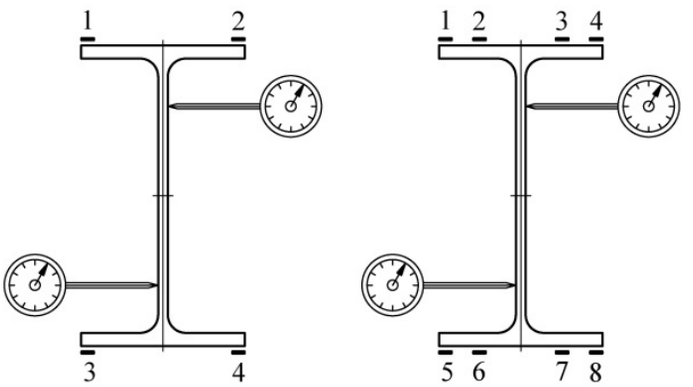
№1(53) январь-февраль 2015



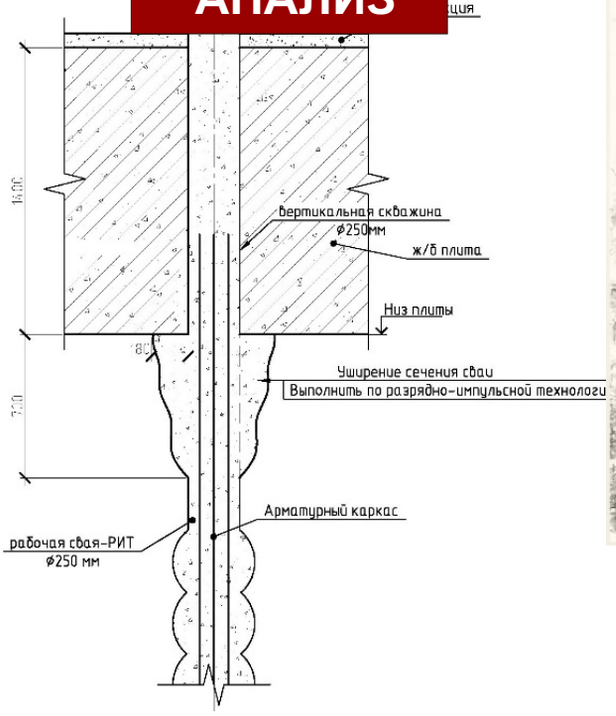
КОНСТРУКЦИИ

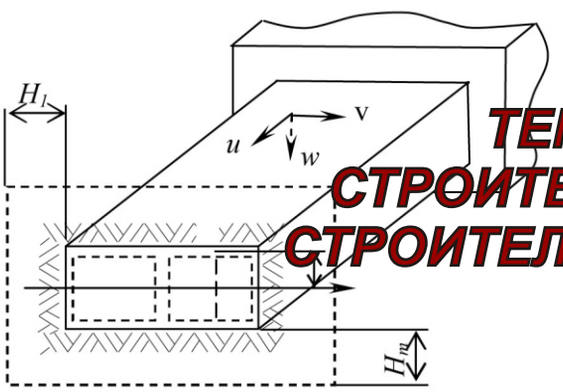
РАСЧЕТЫ

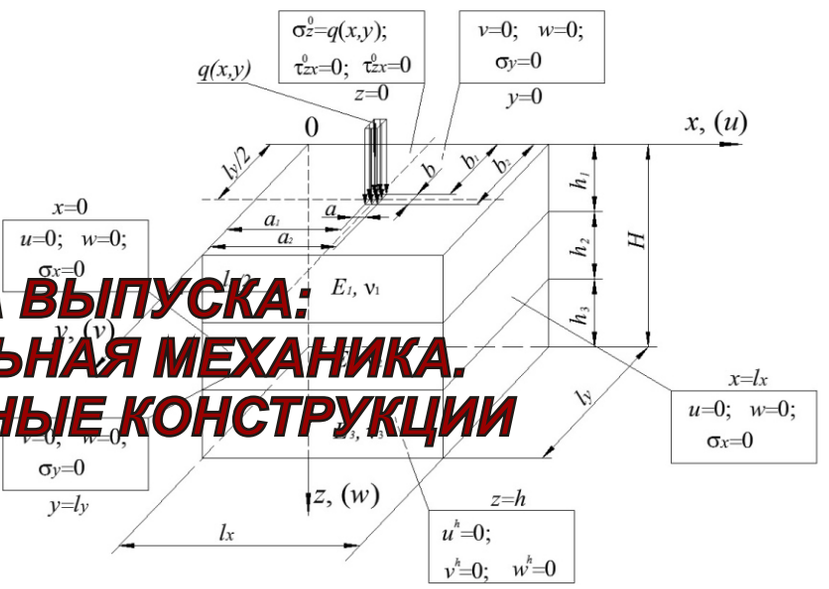
МЕТОДЫ



АНАЛИЗ







ТЕМА ВЫПУСКА:
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.
СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Инженерно-строительный институт
Центр дополнительных профессиональных программ

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
тел/факс: 552-94-60, www.stroikursi.spbstu.ru,
stroikursi@mail.ru

Приглашает специалистов организаций, вступающих в СРО, на курсы повышения квалификации (72 часа)

Код	Наименование программы	Виды работ*
Курсы по строительству		
БС-01-04	«Безопасность и качество выполнения общестроительных работ»	**п.1,2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14**
БС-01	«Безопасность и качество выполнения геодезических, подготовительных и земляных работ, устройства оснований и фундаментов»	**1,2,3,5**
БС-02	«Безопасность и качество возведения бетонных и железобетонных конструкций»	**6,7**
БС-03	«Безопасность и качество возведения металлических, каменных и деревянных конструкций»	**9,10,11**
БС-04	«Безопасность и качество выполнения фасадных работ, устройства кровель, защиты строительных конструкций, трубопроводов и оборудования»	**12,13,14**
БС-05	«Безопасность и качество устройства инженерных сетей и систем»	**15,16,17,18,19**
БС-06	«Безопасность и качество устройства электрических сетей и линий связи»	**20,21**
БС-08	«Безопасность и качество выполнения монтажных и пусконаладочных работ»	**23,24**
БС-12	«Безопасность и качество устройства мостов, эстакад и путепроводов»	**29**
БС-13	«Безопасность и качество выполнения гидротехнических, водолазных работ»	**30**
БС-14	«Безопасность и качество устройства промышленных печей и дымовых труб»	**31**
БС-15	«Осуществление строительного контроля»	**32**
БС-16	«Организация строительства, реконструкции и капитального ремонта. Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика»	**33**
Курсы по проектированию		
БП-01	«Разработка схемы планировочной организации земельного участка, архитектурных решений, мероприятий по обеспечению доступа маломобильных групп населения»	**1,2,11**
БП-02	«Разработка конструктивных и объемно-планировочных решений зданий и сооружений»	**3**
БП-03	«Проектирование внутренних сетей инженерно-технического обеспечения»	**4**
БП-04	«Проектирование наружных сетей инженерно-технического обеспечения»	**5**
БП-05	«Разработка технологических решений при проектировании зданий и сооружений»	**6**
БП-06	«Разработка специальных разделов проектной документации»	**7**
БП-07	«Разработка проектов организации строительства»	**8**
БП-08	«Проектные решения по охране окружающей среды»	**9**
БП-09	«Проектные решения по обеспечению пожарной безопасности»	**10**
БП-10	«Обследование строительных конструкций и грунтов основания зданий и сооружений»	**12**
БП-11	«Организация проектных работ. Выполнение функций генерального проектировщика»	**13**
Э-01	«Проведение энергетических обследований с целью повышения энергетической эффективности и энергосбережения»	
Курсы по инженерным изысканиям		
И-01	«Инженерно-геодезические изыскания в строительстве»	**1**
И-02	«Инженерно-геологические изыскания в строительстве»	**2,5**
И-03	«Инженерно-гидрометеорологические изыскания в строительстве»	**3**
И-04	«Инженерно-экологические изыскания в строительстве»	**4**
И-05	«Организация работ по инженерным изысканиям»	**7**

***(согласно приказам Минрегионразвития РФ N 624 от 30 декабря 2009 г.)**

По окончании курса слушателю выдается удостоверение о краткосрочном повышении квалификации установленного образца (72 ак. часа)

Для регистрации на курс необходимо выслать заявку на участие, и копию диплома об образовании по телефону/факсу: 8(812) 552-94-60, 535-79-92, , e-mail: stroikursi@mail.ru.

Http://www.engstroy.spb.ru – полнотекстовая версия журнала в сети Интернет. Бесплатный доступ, обновление с каждым новым выпуском

Инженерно-строительный журнал
НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

ISSN 2071-4726

Свидетельство о государственной регистрации: ПИ №ФС77-38070, выдано Роскомнадзором

Специализированный научный журнал. Выходит с 09.2008.

Включен в Перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ

Периодичность: 8 раз в год

Учредитель и издатель:

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Адрес редакции:

195251, СПб, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 227А

Главный редактор:
Вера Михайловна Якубсон

Научный редактор:
Николай Иванович Ватин

Литературный редактор:
Елена Викторовна Цветкова

Редакционная коллегия:
д.т.н., проф. Н.В. Арефьев;
д.т.н., проф. В.В. Бабков;
д.т.н., проф. М.И. Бальзанников;
к.т.н., проф. А.И. Боровков;
д.т.н., проф. Н.И. Ватин;
PhD, professor М. Вельжкович;
д.т.н., проф. А.Д. Гиргидов;
д.т.н., проф. Э.К. Завадскас;
д.т.н., проф. В.В. Лалин;
д.т.н., проф. Б.Е. Мельников;
д.т.н., проф. Р.Б. Орлович;
Dr. Sc. Ing., professor
Л. Пакрастиньш;
Dr.-Ing. Habil., professor
Х. Пастернак;
д.т.н., проф. А.В. Перельмутер;
к.т.н. А.Н. Пономарев;
д.ф.-м.н., проф. М.Х. Стрелец;
д.т.н., проф. О.В. Тараканов;
Dr.-Ing., professor Д. Унгерман.

Установочный тираж 1000 экз.

Подписано в печать 18.02.15.
Формат 60x84/8, усл. печ. л. 12.
Заказ №0315.

Отпечатано в типографии СПбПУ.
СПб, ул. Политехническая, д. 29

Содержание

АНАЛИЗ

Перельмутер А.В., Кабанцев О.В. Учет изменения жесткостей элементов в процессе монтажа и эксплуатации 6

Уткин В.С. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию прочности арматуры и бетона 15

КОНСТРУКЦИИ

Туснин А.Р., Прокич М. Экспериментальные исследования работы балок двутаврового сечения при действии изгиба и кручения 24

Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия 32

РАСЧЕТЫ

Лалин В.В., Беляев М.О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко 39

Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А. Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками 56

Иванов О.Г., Шлычков С.В. Расчет призматических оболочек в упругой среде 70

МЕТОДЫ

Усаров М.К. Изгиб ортотропных пластин с учетом бимоментов 80

Ширунов Г.Н. Метод начальных функций в модели упругого многослойного основания под действием нормальной локальной нагрузки 91

© ФГАОУ ВО СПбПУ, 2015

На обложке: иллюстрации авторов к статьям номера

Контакты:
Тел. +7(812)535-52-47 E-mail: engstroy@inbox.ru
Web: http://www.engstroy.spb.ru

11–14 марта 2015 года в выставочном центре «ВертолЭкспо» пройдет выставка строительных технологий и материалов «СТИМэкспо» с тематическими блоками «Строительство. Архитектура» и «Инженерные решения».

Выставка «СТИМэкспо» в 2014 г. объединила 191 компанию на общей площади свыше 7 000 кв. м.

В выставке приняли участие экспоненты из 11 стран мира: Беларуси, Бельгии, Германии, Дании, Италии, Польши, России, Украины, Франции, Швейцарии, Швеции.

За 4 дня работы выставку посетили 7 871 человек, из них 98% – это специалисты отрасли, топ-менеджеры и руководители компаний.

73% экспонентов высоко оценили эффективность участия, получив на выставке крупные заказы и долгосрочные контракты.

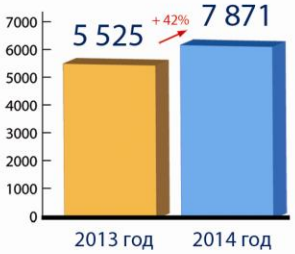
Спешите стать участником выставки!

Информация для посетителей и участников на сайте www.vertolexpo.ru

Среди посетителей выставки:

- крупнейшие проектировщики, архитекторы, дизайнеры;
- строительные организации, девелоперские и торгово-закупочные компании;
- заказчики строительных работ, подрядчики, представители специализированных магазинов и крупных торговых сетей;
- производители и дистрибьюторы материалов и оборудования;
- поставщики сырья и комплектующих;
- члены ассоциаций и представители государственных структур.

Динамика посещения выставки «СТИМэкспо»



Генеральный информационный спонсор: Стройка Группа газет
Генеральный информационный партнер: BLiZKO Ремонт
Почетный информационный спонсор: СтройПром Эксперт
Региональный информационный спонсор: Медиа Юг Издательский дом
ВЕРТОЛ EXPO выставочный центр
ufi Member
Ростов-на-Дону, пр. М. Нагибина, 30, тел. (863) 268-77-68

ИнтерСтройЭкспо

Крупнейшая международная строительная выставка Северо-Запада России

18–21 марта 2015

Место проведения:

Санкт-Петербург
КВЦ «ЭКСПОФОРУМ»

Условия участия на сайте:

www.interstroyexpo.com

В рамках выставки:

IBC МЕЖДУНАРОДНЫЙ КОНГРЕСС ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ

InterStroy Expo

Организаторы:

primexpo ITE GROUP PLC 0+

Тел.: +7 (812) 380 60 14,
e-mail: build@primexpo.ru
www.interstroyexpo.com

MosBuild
Главная строительная
и интерьерная выставка России
Неделя Дизайна и Декора
31 марта – 3 апреля 2015
Москва, ЦВК «Экспоцентр»
Неделя Строительства
и Архитектуры
14 – 17 апреля 2015
Москва, ЦВК «Экспоцентр»
www.mosbuild.com
MosBuild
Архитектура • Строительство • Дизайн • Декор
ITE

doi: 10.5862/MCE.53.1

Учет изменения жесткостей элементов в процессе монтажа и эксплуатации

Д.т.н., главный научный сотрудник А.В. Перельмутер,
ООО НПФ «СКАД Софт»;
К.т.н., профессор О.В. Кабанцев,
Московский государственный строительный университет

Аннотация. В статье рассматривается задача о модификации расчетной схемы сооружения, когда претерпевают изменения жесткостные параметры элементов системы.

Описываются случаи изменения жесткостей элементов несущей системы здания и случаи изменения упругих (деформационных) свойств основания, приводящие к изменениям параметров модели внешних связей. Приводятся сведения из практики проектирования о расчетных ситуациях, возникающих в процессе создания и эксплуатации зданий и сооружений, приводящих к изменению параметров жесткости отдельных элементов конструкции. Для некоторых из них представлено описание физического механизма, управляющего изменением этих параметров. Указывается на существование случаев, когда изменение жесткостей не связано с изменением имеющегося напряженно деформированного состояния и когда такое изменение реализуется.

Описываются соответствующие методы расчета и особенности конечноэлементного моделирования процессов изменения жесткостных параметров расчетной модели.

Ключевые слова: моделирование; несущие конструкции; напряженно-деформированное состояние; расчетный прогноз; расчетная технология; расчетная модель; модель внешних связей; модель воздействия

Введение и постановка задачи

Проблема учета изменений расчетной схемы при анализе работы конструкций изложена в работах [1–8]. На основе анализа возможных ситуаций, определяющих изменение расчетной модели сооружения, в работе [1] предложен и в [2] расширен набор базовых инструментов (операций), позволяющих выполнить учет изменений расчетной схемы. Набор базовых инструментов включает следующие операции:

- ***A.*** нагружение системы известным воздействием;
- ***B.*** установка внешней связи в узле системы, запрещающей изменение определенного перемещения или поворота;
- ***C.*** установка внутренней связи между узлами системы, запрещающей изменение определенного взаимного перемещения или поворота этих узлов (в том числе и задание объединения перемещений);
- ***D.*** снятие внешней связи;
- ***E.*** снятие внутренней связи (отказ от объединения перемещений);
- ***F.*** монтаж элемента любого типа;
- ***G.*** демонтаж элемента (связан не только с изменением расчетной схемы, но и с необходимостью учета изменения НДС);
- ***H.*** изменение модуля упругости элемента для текущей и всех последующих стадий монтажа;
- ***I.*** назначение или изменение коэффициентов постели для текущей и всех последующих стадий монтажа.

Применение разработанных инструментов для расчетного анализа обусловлено необходимостью понимания специфики их действия в расчетных процедурах. Так, операции ***B, C*** определяют действие установленной внешней/внутренней связи на следующих этапах расчета, но никак не влияют на деформирование расчетной схемы на предыдущих этапах. Применение операций ***D, E*** генерирует изменение НДС расчетной модели, так как удаляемая связь является (в общем виде) напряженной. Операция ***G*** определяет не только изменение вида расчетной схемы, но и изменение НДС, так как в удаляемый элемент является (в общем виде) напряженным.

Действие базовых операций ***H*** и ***I*** не является однозначно определенным и требует отдельного анализа.

Элементы расчетной модели строительной конструкции наделены определенными характеристиками жесткости, которые традиционно полагаются неизменными. Но это

не соответствует реальному поведению строительной конструкции, поскольку некоторые из этих характеристик меняют свое значение вследствие внешнего вмешательства или же под влиянием изменения внешней среды.

Так, например, при реконструкции зданий возникает необходимость увеличения нагрузок на существующие конструкции, в которых в течение жизненного цикла сформировалось напряженно-деформированное состояние, соответствующее нагрузкам предшествующего эксплуатационного периода. Для обеспечения нового (более высокого) уровня несущей способности конструкций выполняются мероприятия по их усилению: наращивание сечения колонн, устройство дополнительного (внешнего) армирования ригелей и т.п. Для повышения несущей способности стен из каменной кладки применяются такие методы, как инъецирование цементными растворами по разрядно-импульсной технологии [9], устройство одно- и двухсторонних аппликаций из монолитного железобетона [10] и метод торкретирования [11].

Как правило, методы повышения несущей способности конструкций, включая приведенные выше, приводят к увеличению жесткостей элементов несущей системы. При этом в условиях сформировавшегося НДС существующего сооружения увеличение жесткостей элементов несущей системы не может изменить сложившееся распределение усилий, но должно проявиться в работе при изменении нагрузок на конструкцию либо при изменении модели внешних связей.

При реконструкции зданий, связанной с повышением нагрузок, нередко требуется обеспечить более высокую несущую способность грунтовых оснований. Более распространенными являются случаи, при которых необходимо обеспечить отсутствие или минимизацию дополнительных осадок фундаментов при увеличении нагрузок. Для реализации указанных требований применяют различные методы: цементация массива грунта под сооружением, устройство свай, работающих совместно с существующими фундаментами и т. п.

В отдельных случаях существующие сооружения (как правило, это массивные защитные комплексы гражданской обороны) могут быть использованы в качестве основания для строительства новых зданий. Например, строительство двухсекционного 17-этажного жилого дома в Москве (см. рис. 1) осуществлялось с опиранием конструкций жилого дома на конструкции защитного сооружения. Размещение жилого дома выполнено эксцентрично по отношению к плану защитного сооружения. Для обеспечения соблюдения требований норм по предельно допустимым деформациям оснований применен метод усиления фундаментов защитного сооружения с устройством буроинъекционных свай, выполняемых по разрядно-импульсной технологии. Буроинъекционные сваи выполнялись с устройством скважин через существующие конструкции фундаментов. Сваи усиления соединялись с конструкциями фундаментной плиты по специально разработанным узлам (рис. 2).

Рисунок 1. Двухсекционный 17-этажный жилой дом в Москве, возведенный на существующем сооружении гражданской обороны

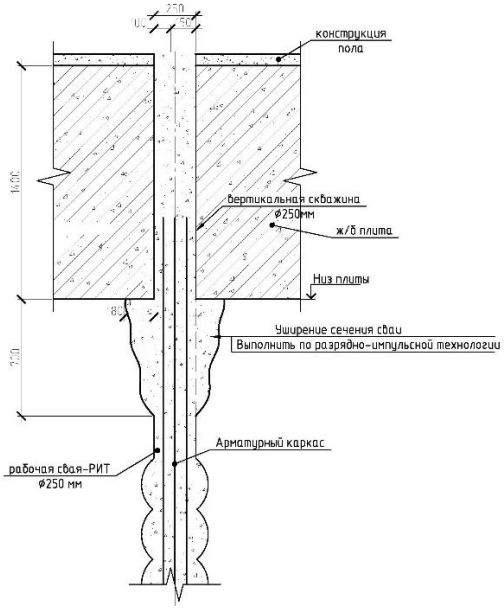


Рисунок 2. Конструктивное решение узла соединения буроинъекционной сваи усиления с фундаментной плитой существующего сооружения

Все известные способы усиления существующих фундаментов и способы повышения жесткости грунтов приводят к тому, что деформационная характеристика основания – коэффициент постели – повышается. При этом такое повышение жесткостных характеристик внешних связей может проявляться в работе существующего сооружения в условиях сформировавшегося НДС только при увеличении нагрузок. Таким образом, увеличение жесткости основания никак не может влиять на предыдущую историю деформирования конструкций.

Влияние деградации элементов

Необходимо отметить, что практика проектирования и строительства демонстрирует также примеры изменения жесткостных параметров расчетной модели несущей системы, соответствующие режиму деградации механических характеристик конструкций или физико-механических параметров основания. Такой особый режим работы конструкции под нагрузкой – деградация конструкции – формируется по различным причинам: вследствие износа конструкции в течение эксплуатационного периода (см., например, работу [12]), вследствие внешнего воздействия (коррозионное поражение элементов конструкции, разрушение от внешнего воздействия и т. п.), вследствие исчерпания несущей способности локального участка конструкции при возрастающей нагрузке. В последнем случае причиной пониженного уровня несущей способности на локальном участке может быть, например, дефект бетона или нарушение конструкции армирования.

Все приведенные примеры изменения жесткостей элементов расчетной схемы или упругих характеристик модели внешних связей с основанием порождаются различными физическими процессами или внешними воздействиями. Детально основные аспекты, приводящие к необходимости моделирования процесса изменения жесткостей, могут быть проиллюстрированы на примере деградации конструкции под возрастающей нагрузкой.

Деградация не проявляется одномоментно в пределах всей конструкции. Процесс деградации заключается в формировании микроразрушений в теле конструкции, росте объема микроразрушений с переходом к макроразрушению фрагмента конструкции, после чего (при дальнейшем росте нагрузки либо повреждающего фактора) процесс выходит на уровень общего разрушения конструкции. Таким образом, деградация конструкции является многоэтапным процессом, при котором происходит изменение исходной расчетной модели. Теоретические обоснования многоэтапной механики разрушения приведены в работах [13, 14, 15].

На основе предложенных в [13, 14] принципов моделирования деградации конструкции как механизма формирования и накопления микроповреждений в материале представляется возможным исследовать, например, процесс упругопластического деформирования такой двухкомпонентной композитной среды, как каменная кладка в режиме двухосного напряженного состояния при главных напряжениях разных знаков.

Каменная кладка – это сложный композит, состоящий из разнородных материалов (кирпич/камень и раствор). Процесс деформирования каменной кладки под нагрузкой зависит от механических характеристик основных материалов композита, а также от параметров элементов, определяющих взаимосвязь кирпича и раствора – интерфейсных элементов. Сложный состав композита определяет необходимость применения метода структурного моделирования с детализацией механических свойств каждого элемента, включая интерфейсные элементы, а также систему критериев прочности, соответствующих каждому из элементов композита.

Использование совокупности (системы) критериев прочности предоставляет возможность учесть различные механизмы разрушения при исследовании упругопластического деформирования каменной кладки. Концепция оценки критического состояния материала на основе совокупности критериев прочности изложена в работах А.А. Ильюшина [15, 16] и Я.Б. Фридмана [17].

На основе результатов исследований А.А. Ильюшина в работе [14] предложен общий подход к формированию совокупности критериев прочности, суть которого состоит в следующем: пусть меры тензора поврежденности $M_n(\Omega)$, являющиеся функциями компонент Ω, могут быть использованы для формулирования критериев разрушения, соответствующих различным механизмам разрушения. Определим, что существуют константы критической поврежденности материала Ω^{cr}_n такие, что если для любого n

$$M_n(\Omega) < \Omega_n^{cr}, \tag{1}$$

то состояние частицы (элемента) прочно, а если для некоторого ***n = k***

$$M_k(\Omega) \geq \Omega_k^{cr}, \tag{2}$$

то происходит разрушение типа ***k***.

Для изотропных материалов инвариантными мерами тензора ***Ω*** являются функции ***k*** и ***q***, которые, в свою очередь, выражают изменение деформационных свойств, определяющих поведение материалов (элементов) при гидростатическом давлении и чистом сдвиге соответственно.

Возможно, что разрушение частицы/элемента по одному из критериев, принятых в рамках системы критериев, определит невозможность сопротивления воздействию только определенного вида, тогда как для иных видов воздействий частица может работать в составе общего ансамбля частиц композита. Как показано в [14], формально это может быть выражено в скачкообразном увеличении до единицы некоторых компонент тензора поврежденности ***Mn(Ω)***. Анализ работы частиц композита (элементов расчетной модели) на основе совокупности (системы) критериев прочности позволяет различать механизмы разрушения модели, соответствующей экспериментальному образцу.

Так, например, при разрушении частицы или элемента по критерию сдвига указанная частица может оказаться в двух вариантах состояния: в случае существования в зоне частицы напряжений сжатия частица будет воспринимать такие напряжения и участвовать в работе ансамбля частиц по критерию сдвига в рамках механизма трения; в случае существования в зоне частицы напряжений растяжения такая частица выбывает из состава ансамбля частиц исследуемого тела.

На основании изложенного подхода и в соответствии с экспериментально установленными критериями прочности каменной кладки [19] представляется возможным выполнить моделирование многовариантного режима работы важнейших элементов кладки – интерфейсных элементов, которые обеспечивают связь и совместную работу основных элементов композита.

Механизм работы и разрушения интерфейсного элемента может быть представлен в следующих вариантах (см. рис. 3).

1. При действии напряжений сжатия (**−σ**) и непревышении прочности интерфейсного элемента по критериям прочности на сжатие и среза такой элемент работает в упругой стадии.
2. При действии напряжений сжатия (**−σ**) и в условиях превышения прочности интерфейсного элемента по критерию среза такой элемент продолжает участвовать в работе ансамбля элементов модели только по механизму передачи напряжений сжатия. По механизму сдвига происходит скачкообразное изменение свойств, и интерфейсный элемент обеспечивает передачу сдвиговых напряжений только в соответствии с величиной напряжений сжатия и коэффициентом трения (***F = f*** (**−σ**)) между основными элементами композита.
3. При действии напряжений растяжения, не превышающих предела прочности на растяжение по неперевязанному шву, и при непревышении прочности интерфейсного элемента по критерию среза такой элемент работает в упругой стадии.
4. При действии напряжений растяжения, превышающих предел прочности на растяжение по неперевязанному шву, такой интерфейсный элемент считается разрушенным, что приводит к его выбыванию из ансамбля элементов расчетной модели.

Рисунок 3. Схема работы элементов каменной кладки при различных напряженных состояниях: слева – при наличии в разрушенном шве напряжений сжатия (механизм B); справа – при наличии в разрушенном шве напряжений растяжения (механизм D)

Работа интерфейсных элементов по вариантам **1** и **3** может моделироваться соответствующими линейно работающими конечными элементами. Работа и разрушение интерфейсных элементов по варианту **2** требует скачкообразного изменения (снижения) параметра жесткости конечного элемента только по критерию сдвига без изменения параметра жесткости по критерию сжатия – растяжения.

Моделирование механизмов разрушения интерфейсного элемента типов **2** и **4** приведут к перераспределению напряжений в ансамбле конечных элементов, моделирующих композитную среду.

Корректное моделирование процесса деградации конструкции под возрастающей нагрузкой может быть выполнено в рамках многоэтапного расчета, на любом из этапов которого может быть учтен эффект локального исчерпания прочности элемента модели методом введения пониженной жесткости для такого элемента, т. е. путем применения базовой операции ***H*** (изменение модуля упругости элемента). Однако снижение модуля упругости неизбежно приведет к изменению перераспределения усилий/напряжений в расчетной модели, так как корректируемый элемент находится в напряженном состоянии. Таким образом, при понижении жесткости элемента расчетной схемы на одном из этапов расчета необходимо выполнить корректировку НДС, сформировавшегося к этапу с изменением жесткости.

Деградация физико-механических параметров грунтов основания может определяться различными причинами: замачивание просадочных грунтов, обводнение грунтового массива, лежащего в основании здания и т. п. Снижение механических характеристик грунтов приводит к изменениям модели внешних связей – снижению коэффициента постели, которым моделируются упругие (упругопластические) свойства основания. Очевидно, что причины, лежащие в основе снижения деформационных свойств основания, не могут быть отнесены к обычным условиям эксплуатационного периода. Такие явления как просадка или обводнение грунтового массива относятся к особому режиму эксплуатационного периода сооружения. Следовательно, расчетное обоснование должно быть выполнено с учетом нескольких режимов работы сооружения, обеспечивая при этом поэтапное наследование НДС несущей системы.

В качестве примера можно привести проект гостиницы медиадеревни, возведенной в рамках проведения Олимпийских игр в г. Сочи в 2014 г. (см. рис. 4). Указанный случай детально описан в [19].

Рисунок 4. Отель олимпийской медиадеревни на площадке с абсолютной отметкой +960. Слева – проектное решение. Выделены зоны формирования оползневых процессов при обводнении грунтового массива и при сейсмических воздействиях. Справа – общий вид возведенного здания

Площадка строительства гостиницы сложена грунтами, формирующими при сложившихся инженерно-геологических условиях стабильный грунтовый массив основания. Однако гидрометеорологическим прогнозом предусматривается вариант обводнения грунтового массива при обильных ливневых осадках либо в период снеготаяния. При обводнении грунты основания существенно снижают механические характеристики, что приводит не только к снижению деформационных свойств модели грунта, но и к формированию оползневых явлений в теле грунтового массива с соответствующими нагрузочными эффектами. Указанные особенности площадки строительства объекта приводят к тому, что модель внешних связей не может быть корректно описана в рамках одного набора характеристик, принятых для всех прогнозируемых

этапов работы конструкции. Таким образом, при моделировании сложных условий работы сооружения при изменяющихся в течение жизненного цикла механических характеристиках грунтового массива необходимо применение многоэтапных расчетов с корректировкой параметров жесткости элементов модели и отслеживанием НДС несущей системы при различных моделях внешних связей.

Особенности конечноэлементного моделирования

Описанные выше изменения необходимо учитывать при анализе поведения конструкции под нагрузкой, и удобнее всего сделать это в режиме с условным наименованием «Монтаж» расчетного комплекса СКАД [20] или аналогичных режимах других расчетных комплексов[1], поскольку именно такой режим ориентирован на анализ последовательного изменения расчетной модели объекта. И если жесткостные параметры элементов системы (модуль упругости или коэффициент постели упругого основания) меняются, то это нетрудно учесть при задании схемы модификации конструкции.

Следует заметить, что в настоящей работе рассматриваются модификации расчетной схемы, связанные с реальным видоизменением параметров конструкции. Они, вообще говоря, отличаются как от тех «расчетных модификаций», которые сопровождаются поиском оптимальной конструкции [21, 22], так и от изменений, вызванных физически нелинейным характером работы материала, хотя используемый расчетный механизм решения таких задач в некоторых чертах может оказаться одинаковым.

При анализе проблемы следует различать два варианта поведения конструкции:

- элемент приобрел новую жесткостную характеристику (например, увеличилась жесткость обжатого упругого основания), но при этом напряженно-деформированное состояние системы не изменилось, а новая характеристика жесткости может проявиться лишь при изменении нагрузки;
- элемент поменял свою жесткостную характеристику, оставаясь нагруженным (например, упал модуль упругости сильно разогретого стального элемента), т. е. то внутреннее усилие, которое в нем было до модификации передается обновленному элементу и происходит перераспределение усилий в системе без изменения нагрузки.

Различие двух указанных расчетных ситуаций нетрудно понять, используя рассуждение в стиле известного «метода параллельного элемента» [21, 23], когда увеличение или уменьшение жесткости моделируется добавлением в расчетную схему или изъятием из нее элемента, параллельного модифицируемому.

Поскольку при добавлении элемента в систему полагается, что к ней присоединяется ненапряженный элемент, то при неизменной нагрузке напряженно-деформируемое состояние системы не меняется. Во втором случае из системы удаляется напряженный элемент, что приводит к перераспределению усилий, поскольку реакция удаляемого элемента должна быть воспринята остающимися элементами системы.

Второй случай можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть жесткость элемента изменилась и, например, вместо EA стала равной $EA_{new1} < EA$. Выполним модификацию системы в два этапа: на первом в параллель с существующим элементом введем новый с жесткостью EA_{new1}, а на втором этапе удалим старый элемент с жесткостью EA (рис. 5).

Первая операция является подготовительной, добавление элемента не изменит картину напряжений в системе. А удаление элемента заставит передать ранее действовавшие в нем внутренние усилия на новую систему с изменившейся жесткостью. Заимствованный из книги [23] и приведенный ниже простой пример (см. рис. 6) иллюстрирует сказанное.

[1] Нужно помнить, что такой режим может иметь другое название. Например, в системе ANSYS он именуется «схема размножения и гибели элементов»

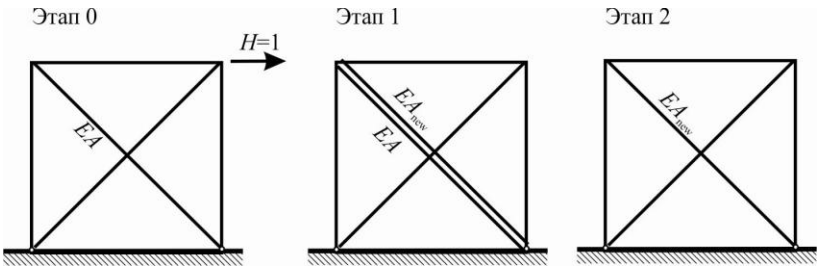


Рисунок 5. Моделирование уменьшения жесткости

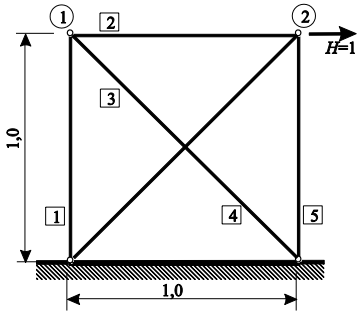


Рисунок 6. Схема к примеру из [23]

Пусть первоначальная жесткость всех элементов *EA* = 1,0. Тогда матрица жесткости системы равна

$$K = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

а вызванные силой H перемещения и усилия представлены во втором столбце таблицы 1.

Если жесткость третьего элемента уменьшилась до величины $EA_3 = 1/\sqrt{2}$, то, следуя сказанному, введем в систему параллельный третьему новый элемент с жесткостью EA_{new}. Матрица жесткости системы станет равной

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2}/2+1/2 & \sqrt{2}/2+1/2 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2+1/2 & 1+\sqrt{2}/2+1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

но поскольку присоединен ненапряженный элемент, перемещения и усилия не меняются (нулевые приращения, показанные в столбце 4 таблицы 1).

Теперь удалим из системы старый элемент 3, матрица жесткости изменится и станет равной

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1+1/2 & 1+1/2 & -1 & 0 \\ 1+1/2 & 1+1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

а под действием нагрузки, которая должна погасить реакцию удаленного элемента, система получит приращения перемещений и усилий, показанные в столбце 6 таблицы. Окончательное напряженно-деформированное состояние зафиксировано в седьмом столбце таблицы.

В программных комплексах, где реализована технология учета изменения расчетной модели, в ситуациях, требующих учета изменения НДС системы при изменении жесткостей отдельных элементов, возникает необходимость прямого моделирования такого процесса с использованием представленной выше схемы параллельного элемента.

Таблица. Результаты расчета примера из [23]

Состояние		Этап 0		Этап 1		Этап 2		
		Накоплено	Приращение	Накоплено	Приращение	Накоплено	Приращение	Суммарно
		1	2	3	4	5	6	7
Перемещения	u_1	0,0	1,690	1,690	0,0	1,690	0,260	*1,950*
	v_1	0,0	0,441	0,441	0,0	0,441	-0,052	*0.389*
	u_2	0,0	2,135	2,135	0,0	2,135	0,204	*2,341*
	v_2	0,0	–0,556	–0,556	0,0	–0,556	-0,054	*–0,610*
Усилия	S_1	0,0	0,441	0,441	0,0	0,441	-0,053	*0,388*
	S_2	0,0	0,445	0,445	0,0	0,445	-0,053	*0,392*
	S_3	0,0	–0,625	–0,625	0,0	–0,625	1,176	*0,551*
	S_4	0,0	0,790	0,790	0,0	0,790	0,074	*0,864*
	S_5	0,0	–0,556	–0,556	0,0	–0,556	-0,052	*–0,608*

Выводы

1. Многие задачи расчетного анализа строительных конструкций связаны с необходимостью учета возможного изменения параметров жесткости элементов расчетной схемы.

2. Если изменения параметров жесткости учитываются не путем замены элемента, а изменением параметра жесткости (модуля упругости, коэффициента постели), то следует различать случаи пересчета или отсутствия пересчета напряженно-деформированного состояния конструкции и использовать методы, обеспечивающие корректное моделирование расчетной ситуации.

Статья подготовлена в рамках Гранта государственной поддержки научных исследований, проводимых ведущими научными школами Российской Федерации, № НШ-6545.2014.8.

Литература

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: СКАД СОФТ и др., 2011. 709 с.
2. Кабанцев О.В., Тамразян А.Г. Учет изменений расчетной схемы при анализе работы конструкции // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5. С. 15–26.
3. Kim H.S., Shin A.K. Column Shortening Analysis with Lumped Construction Sequences //Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. Pp. 1791–1798.
4. Jayasinghe M.T.R., Jayasena W.M.V.P.K. Effects of Axial Shortening of Columns on Design and Construction of Tall Reinforced Concrete Buildings // Practice Periodical on Structural Design and Construction, ASCE. 2004. Vol. 9. No. 2. Pp. 70–78.
5. Барабаш М.С. Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. Vol. 8. Issue 3. Pp. 58–67.
6. Кабанцев О.В. Расчет несущих конструкций зданий с учетом истории возведения и поэтапного изменения основных параметров расчетной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №7. С. 33–35.
7. Кабанцев О.В. Расчет конструкций многоэтажных и высотных железобетонных зданий с учетом изменения основных параметров расчетной модели в режимах возведения и эксплуатации // Научные труды III Всероссийской (II Международной) конференция по бетону и железобетону (Москва, 12-16 мая 2014 г.), том 1 «Теория железобетона. Железобетонные конструкции. Расчет и конструирование. С. 282–292.
8. Кабанцев О.В., Карлин А.В. Расчет несущих конструкций с учетом истории возведения и поэтапного изменения основных параметров расчетной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №7. С. 33–35.

9. Кабанцев О.В., Тонких Г.П., Еремин В.Я., Тихонов М.В. Экспериментальные исследования несущей способности каменной кладки с трещинами при их инъецировании цементным раствором по разрядно-импульсной технологии // Вестник МГСУ. 2011. Т. 1. №2. С. 127–135.

10. Кабанцев О.В. Методы расчета сейсмоусиления конструкций из каменной кладки односторонними монолитными железобетонными аппликациями // Вестник МГСУ. 2011. №2 (т. 1). С. 51–57.

11. Кабанцев О.В., Тонких Г.П., Симаков О.А., Симаков А.Б., Баев С.М. Повышение сейсмостойкости каменных конструкций односторонними аппликациями из торкрет-бетона // Аэропорты. Прогрессивные технологии. 2011. №2. С. 26–32.

12. Перельмутер А.В. Износ и надежность стальных конструкций // Автоматическая сварка. 2000. №9–10 (570–571). С. 107–112.

13. Бураго Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т.1. №4. С. 5–20.

14. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / Под ред. Ю.В. Соколкина. М.: Наука. Физматлит. 1997. 228 с.

15. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1967. №3. С. 21–35.

16. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.

17. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. Ч. 1. Деформация и разрушение. М.: Машиностроение. 1974. 472 с.

18. Кабанцев О.В., Частные критерии прочности каменной кладки для анализа упруго-пластического деформирования // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. №3. С. 36–41.

19. Kabantsev O., Perelmuter A. Modeling Transition in Design Model when Analyzing Specific Behaviors of Structures // Procedia Engineering. 2013. Vol. 57. Pp. 479–488.

20. Кабанцев О.В., Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В. Технология расчетного прогноза напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом истории возведения, нагружения и деформирования // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2011. Vol. 7. Issue 3. Pp. 110–117.

21. Grzedzielski A.L.M. Nota of Some Application of the Matrix Force Method of Structural Analysis // Journal Royal Aeronautics Society. 1960. Vol. 64. No. 594.

22. Сергеев Н.Д. Расчет статически неопределимых систем при их многократной последовательной модификации // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. №6. С. 11–16.

23. Мажид К.И. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Высшая школа, 1979 –237 с.

Анатолий Викторович Перельмутер, г. Киев, Украина

Тел. раб.: +3(8050)382-16-25; эл. почта: avp@scadsoft.com

Олег Васильевич Кабанцев, Москва, Россия

Тел. +7(916)695-77-30; эл. почта: ovk531@gmail.com

© Перельмутер А.В., Кабанцев О.В., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.2

Определение остаточной несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию прочности арматуры и бетона

Д.т.н., профеесор В.С. Уткин,
Вологодский государственный университет

Аннотация. Экспериментально рассмотрен теоретический метод оценки остаточной несущей способности индивидуальной железобетонной балки на стадии эксплуатации по критериям прочности рабочей арматуры и прочности бетона сжатой зоны балки. Использованы интегральные методы испытаний балки и вероятностные методы описания случайных величин.

В качестве меры несущей способности принята предельная нагрузка в интервальном виде на стадии эксплуатации, приведен анализ выбора ее значения из полученных границ интервала. Рассмотрен переход от экспериментально полученного значения предельной нагрузки к предельной эксплуатационной нагрузке.

Приведены примеры расчетных схем балок с эксплуатационной нагрузкой и указания по определению их предельных значений.

Ключевые слова: несущая способность; железобетонная балка; прочность арматуры; прочность бетона; предельная нагрузка; расчетная схема

Введение

Железобетонные балки (и балочные плиты) входят в состав большинства зданий и сооружений. Одной из мер их качества и конструкционной (механической) безопасности эксплуатации служит остаточная несущая способность по различным критериям: прочности арматуры и бетона, жесткости, трещинообразованию, ширине раскрытия трещин. Под несущей способностью элементов конструкций понимается их способность выдерживать наибольшие нагрузки, обеспечивая безопасное функционирование конструкции на стадии эксплуатации. По стандарту ГОСТ Р 54257-2010 «Надежность строительных конструкций и оснований» под несущей способностью понимается «максимальный эффект воздействия, реализуемый в строительном объекте без превышения предельных состояний». Мерой несущей способности является значение наибольшей нагрузки (воздействия), которую способна выдержать конструкция по критериям работоспособности, не доходя до состояния отказа. По межгосударственному стандарту ГОСТ 31937-2011 «Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния», вступившего в силу с 01.01.2014 г., мерой несущей способности конструкции является наибольшая нагрузка, при которой отсутствует недопустимый риск разрушения.

Из приведенной информации следует, что основной задачей при оценке несущей способности конструкций является определение значения наибольшей, предельной нагрузки или воздействия. В процессе эксплуатации конструкций несущая способность несущих элементов понижается [1] вследствие старения (деградации) материалов, образования неисправностей и повреждений и т. д. Соответственно, уменьшается значение предельной нагрузки на нее по условиям безопасности эксплуатации. Это приводит к снижению надежности, сокращению остаточного временного ресурса и других показателей, характеризующих безопасность зданий и сооружений, что свидетельствует об актуальности обсуждаемой проблемы – оценки остаточной (оперативной) несущей способности железобетонных конструкций, в частности балок, на стадии их эксплуатации.

Постановка задачи

Для определения несущей способности железобетонной балки необходимо выявить наименьшую предельную нагрузку по всем критериям ее работоспособности (по всем видам предельных состояний). Критериями для железобетонных балок по действующим нормативным документам являются прочность арматуры и бетона, жесткость балки, трещинообразование в растянутой зоне и сжатых областях бетона и ширина раскрытия трещин. В настоящей статье предлагается рассмотреть проблему определения остаточной несущей способности только по критерию прочности арматуры и бетона.

Обзор источников по проблеме

В СП 13-102-2003 «Правила обследования несущих строительных конструкций зданий и сооружений», а также в стандартах ГОСТ 31337-2011 и JSO 13882:2010 (E) при оценке несущей способности конструкций по тому или иному критерию работоспособности предписывается проводить теоретические поверочные расчеты по результатам неразрушающих испытаний механических и физических характеристик материалов конструкций на стадии эксплуатации. В ГОСТ 31937-2011 приведена информация о видах дефектов и повреждений в железобетонных конструкциях и о возможном снижении их несущих способностей. В работе [2] приведен теоретический анализ несущей способности железобетонных балок после их частичного разрушения по критерию прочности бетона, а также приведена методика экспериментальных исследований балок. В работе [3] исследуется несущая способность железобетонных балок при изгибе по трещинообразованию с использованием теории механики разрушения.

Расчетам несущей способности эксплуатируемых железобетонных конструкций с дефектами и повреждениями посвящена работа А.Н. Бедова и В.Ф. Сапрыкина [4], где также приводятся методики испытаний бетона и арматуры в условиях эксплуатации железобетонных конструкций и статистической обработки результатов измерений. В [5] рассматриваются методы испытаний железобетонных конструкций. В работе [6] предложен способ неразрушающего определения несущей способности металлических конструкций, а в [7] – железобетонных конструкций. В качестве контролируемых параметров в [7] используются деформации арматуры ε_s и бетона ε_b. Однако в качестве предельных значений деформаций приняты средние значения без учета изменчивости этих случайных величин. Так, принято $\varepsilon_{b,пред} = 0{,}002$ и $\varepsilon_{s,пр} = R_s / E_s$, где R_s – расчетное сопротивление арматуры, E_s – среднее значение модуля упругости стали арматуры. Кроме этого, зависимости нагрузки от деформаций для арматуры приняты линейными, в то время как они криволинейные для арматуры при ее совместной работе с бетоном.

Полезная информация о повреждениях и дефектах в железобетонных конструкциях и об их влиянии на несущую способность приведена в работе [8], однако в ней отсутствует информация о методах оценки несущей способности железобетонных элементов.

Наиболее эффективным методом определения остаточной несущей способности железобетонных балок является метод интегральных испытаний конструкций с измерением контролируемых параметров в совокупности с измерением механических и физических характеристик стали арматуры и бетона балки. Методика проведения интегральных испытаний конструкций рассмотрена в общем виде в работах [5] и др. В работе [9] приводятся методы определения несущей способности металлических и железобетонных конструкций при различных видах деформирования при ограниченных (малых) объемах информации о контролируемых параметрах с помощью методов теории возможностей [10]. При ограниченной информации описание неопределенностей этими методами оправдано [10, 11]. Однако из-за более осторожного подхода и использования целого класса или множества распределений вероятностей при описании неопределенностей в этом методе не удается выявить возможный резерв несущей способности конструкций, что снижает его экономическую эффективность в случаях, когда такой резерв имеется.

Описание исследования

Предлагается новый метод определения остаточной несущей способности железобетонной балки и балочных плит по критериям прочности арматуры и бетона на стадии эксплуатации. По этому методу балка нагружается пробной (испытательной) нагрузкой, направленной для безопасности испытаний противоположно эксплуатационной нагрузке, которую удалить по тем или иным причинам невозможно. Нагрузка (разгрузка) с помощью гидравлического домкрата с манометром прикладывается в месте наибольшего изгибающего момента от эксплуатационной нагрузки.

Наибольшее (безопасное) значение пробной нагрузки $F_{\max}$ определяется из равенства $M_F \le M_q$, где M_q – наибольший изгибающий момент от эксплуатационной нагрузки (с учетом собственного веса балки) и M_F – изгибающий момент от нагрузки $F_{\max}$ в том же сечении балки, определяемые методами строительной механики.

Испытание балки нагрузкой $F_i < F_{\max}$ осуществляется многократным (≥ 10) воздействием на балку не менее чем при трех разных значениях F_i для возможности проведения статистического анализа и применения известного «правила трех сигм» [12]. Предварительно на участке приложения пробной нагрузки F удаляется защитный слой бетона на участке длиной 100–200 мм. Для измерения деформаций на крайних стержнях арматуры и в сжатой зоне бетона наклеивают тензорезисторы в соответствии с указаниями [7]. Для стабилизации деформаций железобетонная балка выдерживается под нагрузкой до четырех часов. Деформации по [5] определяются по формуле $\varepsilon = (R_1 - R_0)/kR_0$, где R_0, R_1 – омическое (электрическое) сопротивление тензорезисторов до и после приложения нагрузки и ее выдержки, k – коэффициент тензочувствительности тензорезисторов.

По результатам измерений деформаций ε_s и ε_b от каждого значения нагрузки F_i при числе измерений $m \geq 10$ находят средние значения $\bar{\varepsilon}_j$ и средние квадратические отклонения S_j деформаций на каждом уровне пробной нагрузки F_i. Используя «правило трех сигм» [12, 13 и др.], находят наибольшие возможные значения деформаций $\varepsilon_{j,\max} = \bar{\varepsilon}_j + 3S_\varepsilon$ с вероятностью 0,997 при каждом уровне от нагрузки F_i. По методу наименьших квадратов [13 и др.], используя для описания случайных величин $\tilde{\varepsilon}_s$ и $\tilde{\varepsilon}_b$ по [14] нормальный закон распределения, находят с помощью компьютерных программ функции $F^в = f_1(\bar{\varepsilon})$ и $F^н = f_2(\bar{\varepsilon} + 3S_\varepsilon)$.

На рисунке 1 условно показаны эти функции в виде кривых, например, для арматуры балки. Также на рисунке 1 условно изображены графики функций плотностей распределения вероятностей $p_i(\varepsilon_i)$ и доверительные интервалы $(3S_\varepsilon)$.

Зависимость между нагрузкой и деформациями в арматуре представлена на рисунке 1 криволинейной, т. к. при совместной работе арматуры с бетоном в растянутой зоне балки нарушается линейная зависимость между σ и ε, наблюдаемая при испытаниях арматуры. Также учтено возрастание среднеквадратического отклонения S_ε с ростом среднего значения измеряемой величины [15].

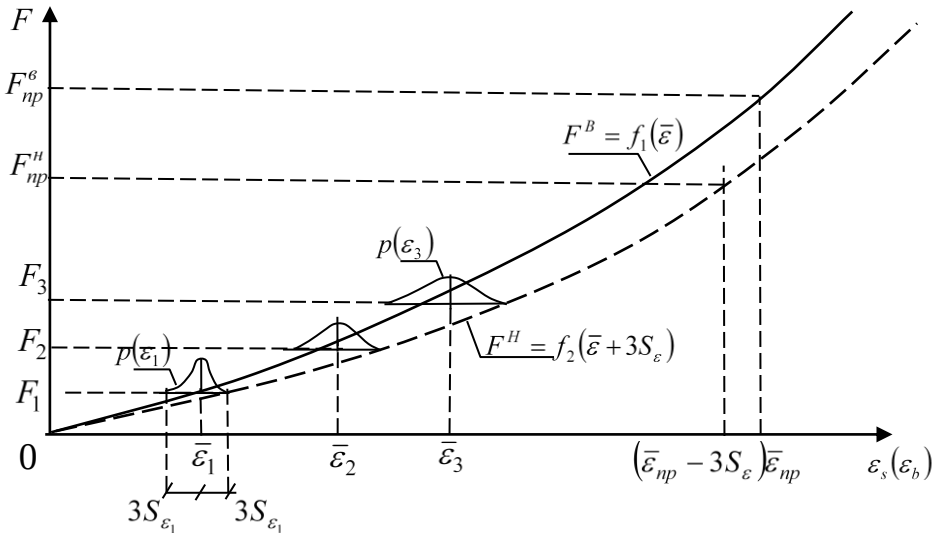


Рисунок 1. Графики функциональной зависимости нагрузки F от деформаций в арматуре $F_1^в(\bar{\varepsilon}_s)$, $F_2^н(\bar{\varepsilon}_s + 3S_\varepsilon)$ и условные функции плотностей вероятностей $p(\varepsilon_i)$

Значения предельных деформаций $\varepsilon_{s,пр}, \varepsilon_{b,пр}$ по условиям прочности стали арматуры и бетона находят по априорной информации. Так, по СП 52-101-2003 при двухлинейной диаграмме $\sigma - \varepsilon_s$ для стальной арматуры недопустимо превышение среднего значения деформации,

равного $\bar{\varepsilon}_{s,np} = 0{,}025$. Этому значению деформации будет соответствовать верхнее значение предельной нагрузки $F_{np}^{в}$ как меры несущей способности балки по критерию прочности арматуры. Значение ее находят из уравнения $F_{np}^{в} = f_1(\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_{s,np})$.

Так как предельная деформация по СП 52-101-2003 определяется по результатам испытаний серии образцов арматуры, то ее приходится оценивать по средним значениям и доверительному интервалу, равному $6S_\varepsilon$, если использовать «правило трех сигм». Значение наименьшей предельной деформации (худший вариант) определяется как $(\bar{\varepsilon}_{np} - 3S_{\varepsilon_{np}})$. В этом случае предельная нагрузка (нижнее значение) определяется из уравнения $F_{np}^{н} = f_2(\bar{\varepsilon}_{s,np} - 3S_{\varepsilon_{np}})$, как показано на рисунке 1, т. е. по пессимистическому (наихудшему) варианту.

Известно [14], что коэффициент вариации ν_σ для предела текучести стали арматуры для одного и того же профиля с одного и того же завода равен $\nu_\sigma = 0{,}01 \div 0{,}04$. Примем $\nu_\sigma = 0{,}025$. Среднее квадратическое отклонение прочности арматуры находим из $S_\sigma = \nu_\sigma \cdot \bar{\sigma}_T$ или, при отсутствии информации о значениях предела текучести σ_T для арматуры по условию $S_\sigma = \nu_\sigma R_{s,n}$, где $R_{s,n}$ – нормативное значение прочности стали арматуры, которое принимается по СП 52-101-2003 или определяется испытаниями арматуры балки по [4]. Коэффициент вариации модуля упругости стали арматуры E_s по [14] колеблется от 0,02 до 0,06. По СП 52-1-1-2003 принято значение $\bar{E}_s = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Примем для модуля упругости стали арматуры E_s коэффициент вариации по [16] равным 0,04. Тогда $S_E = \bar{E}_s \nu = 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04 = 8 \cdot 10^3$ МПа. При линейной зависимости между ε_s и σ_s имеем $\varepsilon_s = \sigma_s / E_s$. Используя метод линеаризации [14], найдем $S_{\varepsilon S} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{E}_s}\right)^2 S_\sigma^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{E}_s^2}\right) S_E^2}$.

Например, при $\bar{\sigma}_S = R_{s,n} = 400$ МПа имеем $S_\sigma = \nu_\sigma \sigma_s = 0{,}025 \cdot 400 = 10$ МПа и $S_{\varepsilon S} = \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 10^5}\right)^2 \cdot 10^2 + \left[\frac{400}{(2 \cdot 10^5)^2}\right]^2 (8 \cdot 10^3)^2} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, $3S_{\varepsilon_s} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$. Тогда имеем $\bar{\varepsilon}_{np} - 3S_\varepsilon = 0{,}025 - 0{,}0015 = 0{,}0235$, и эта деформация будет соответствовать нижнему значению предельной нагрузки $F_{np}^{н}$, значение которой находится графически по рисунку 1 или аналитически из функции $F_{np}^{н} = f_2(\bar{\varepsilon}_s - 3S_\varepsilon)$. Верхнее значение предельной нагрузки $F_{np}^{в}$ находят также графически по рисунку 1 или аналитически из функции $F_{np}^{в} = f_1(\bar{\varepsilon}_s)$.

Косвенным образом в рассмотренном методе определения остаточной несущей способности железобетонной балки учитывается работа растягиваемого бетона балки (в отличие от СНиП 52-01-2003, введенного с 2013 г., где несущая способность балки рассчитывается без учета работы растянутого бетона). Тем самым достигается реализация существующего резерва несущей способности балок на стадии эксплуатации.

В ответственных случаях для определения параметров необходимо использовать апостериорную информацию, для чего проводят испытания арматуры балки по рекомендациям [4]. В результате мера несущей способности балки по критерию прочности арматуры характеризуется интервалом значений [17, 18] предельной нагрузки $[F_{np}^{н}, F_{np}^{в}]$. При более осторожном подходе принимают $F_{np} = F_{np}^{н}$.

Если рассматривать $F_{пр}$ в интервале $F_{пр}^{н} \le F_{пр} \le F_{пр}^{в}$ как случайную величину $\tilde{F}_{пр}$, то для ее вероятностного описания можно использовать равномерное распределение [12] с функцией плотности вероятности (при обозначении $\tilde{F} = X$):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & если\, x \le F_{пр}^{н} \\ 1/(F_{пр}^{в} - F_{пр}^{н}), & если\, F_{пр}^{н} < x < F_{пр}^{в} \\ 0, & если\, x \ge F_{пр}^{в} \end{cases}.$$

Если считать $F_{пр}^{н}$ и $F_{пр}^{в}$ точными крайними значениями для $\tilde{F}_{пр}$ и средние значения принять как $\bar{F}_{пр} = 0{,}5(F_{пр}^{н} + F_{пр}^{в})$, то для вероятностного описания $\tilde{F}_{пр}$ можно использовать усеченное интервальное распределение [11, 19] в виде границ нижних и верхних функций множества возможных распределений вероятностей отказа балки по прочности арматуры, представленных условно на рисунке 2 и имеющих следующие аналитические выражения:

$$\underline{P}(x) = \begin{cases} 0, & если\, x \le m_x \\ \dfrac{x - m_x}{x - a}, & если\ m_x < x < b; \\ 1, & если\, x \ge b \end{cases}$$

$$\bar{P}(x) = \begin{cases} 0, & если\, x \le a \\ \dfrac{b - m_x}{b - x}, & если\ a < x < m_x, \\ 1, & если\, x \ge m_x \end{cases} \qquad (1)$$

где a и b – нижняя и верхняя границы случайной величины X; m_x – среднее значение X.

Значение предельной нагрузки $F_{пр}$, принятое из интервала $[a, b]$, или для нашей задачи $[F_{пр}^{н}, F_{пр}^{в}]$, можно характеризовать значением границ вероятностей отказа из интервала вероятностей $[\underline{P}, \bar{P}]$.

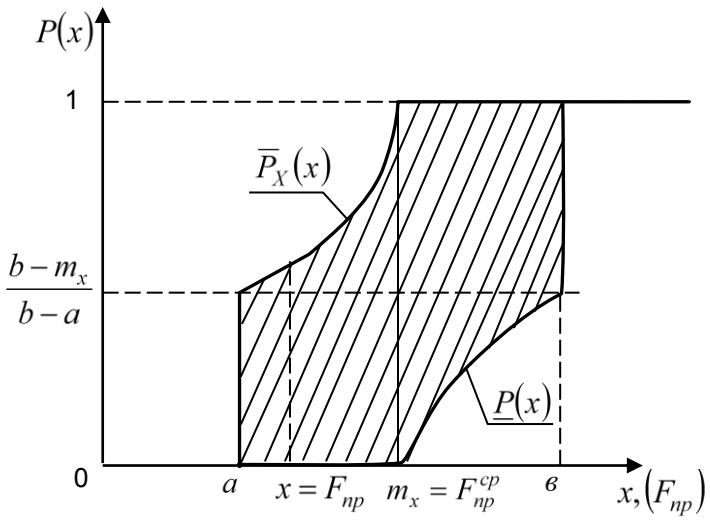


Рисунок 2. Границы множества распределений вероятностей $\underline{P}(x), \bar{P}(x)$ случайной величины X, усеченного интервального распределения $a = F_{пр}^{H}$, $b = F_{пр}^{B}$

По такой же методике устанавливается значение предельной нагрузки на железобетонную балку по критерию прочности бетона балки. Для этого одновременно с измерением деформаций в арматуре измеряются деформации в сжатой зоне бетона с учетом требований в [7]. По результатам испытаний балки методом наименьших квадратов [13] (по компьютерной программе) находят функции $F_1 = f_1(\varepsilon_b)$ и $F_2 = f_2(\varepsilon_b + 3S_{\varepsilon_b})$, графический вид которых аналогичен функциям на рисунке 1. Значения предельных деформаций бетона устанавливаются по априорной информации. Известно, что по СП 52-101-2003 значение предельной деформации бетона при сжатии и непродолжительном действии нагрузки составляет $\varepsilon_{b0} = 0{,}002$. По [20] коэффициент вариации прочности бетона при сжатии можно принять равным 0,04. Немецкие исследователи Х. Рюш и др. нашли, что прочность бетона на сжатие хорошо описывается нормальным распределением. Модуль упругости бетона при сжатии по СП 52-101-2003 зависит от класса бетона. Так, например, при классе бетона В30 имеем $E_b = 34{,}5 \cdot 10^3$ МПа.

Методика определения класса бетона в изделии на стадии эксплуатации хорошо описана в [4]. Там же описана оценка средней прочности $R_m = \sum_{i=1}^{n} R_i / n$ и среднеквадратического отклонения прочности бетона по известной [13] формуле $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R_i - R_m)^2 / (n-1)}$ или по размаху [13] в зависимости от объема информации. Перспективным является определение модуля упругости бетона методом динамического индектирования [21] применительно к эксплуатируемым железобетонным конструкциям. Использование эмпирической формулы для определения модуля упругости бетона в этом методе позволяет определить среднее значение модуля упругости и его среднее квадратическое отклонение S_E для статистического анализа. Таким образом, имеем среднее значение предельной деформации бетона $\bar{\varepsilon}_{b,np} = \bar{R}_m / \bar{E}_b$ и, применяя метод линеаризации, его среднеквадратическое отклонение:

$$S_{\varepsilon_{np}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{E}_b}\right)^2 S_R^2 + \left(\frac{\bar{R}_m}{\bar{E}_b^2}\right)^2 S_E^2}\ .$$

Из двух значений предельной нагрузки по критериям прочности арматуры и бетона в интервальной форме для оценки несущей способности балки на практике используется наименьшая предельная нагрузка $F_{np\min} = F_{np}^{н}$ (при осторожном подходе). Однако действительная предельная нагрузка находится в интервале и остается неизвестной. В ряде обоснованных случаев, как было описано выше, возможно идти на некоторый риск [22, 23] и принимать $F_{np} > F_{np}^{н}$.

Для повышения точности определения предельной нагрузки (несущей способности) для железобетонной балки необходимо провести несколько независимых испытаний балки и получить некоторое множество интервалов значений $\left[F_{npi}^{H}, F_{npi}^{B}\right]$. Обрабатывая это множество с использованием теории свидетельств Демпстера – Шейфера [24, 25], можно получить интервал предельной нагрузки и оценить его функцией доверия $Bel(F_{np})$ и функцией правдоподобия $Pl(F_{np})$ [26]. Если при этом будут известны в интервальном виде и эксплуатационные нагрузки, то можно рассчитать надежность (вероятность безотказной работы) балки и любой другой конструкции, используя методику из [26]. Эти замечания показывают перспективность приведенного метода определения предельной нагрузки (несущей способности) несущих элементов любых конструкций.

Полученное значение предельной нагрузки F_{np} не будет иметь практического значения, если нельзя выразить через нее эксплуатационную нагрузку на балку в стадии эксплуатации.

ГОСТ 31937-2011 (от 01.01.2014 г.) предписывает на стадии эксплуатации в результате обследования выявлять «реальную расчетную схему здания или сооружения и его отдельных конструкций для проверочных расчетов несущей способности».

Таким образом, возникает проблема в выявлении уточненной расчетной схемы балки на стадии эксплуатации и перехода от $F_{пр}$ к предельной эксплуатационной нагрузке, например, равномерно распределенной $q_{пр}$ и с учетом собственного веса самой конструкции. Рассмотрим этот вопрос на примерах.

Пример 1. Балка свободно (шарнирно) оперта и загружена равномерно распределенной нагрузкой, показанной на рисунке 3.

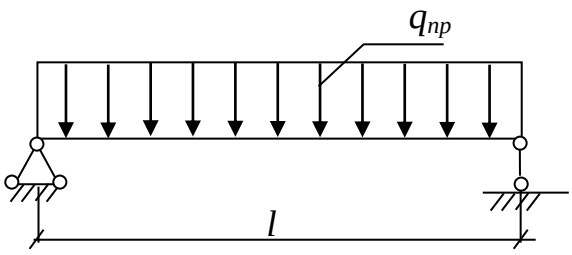


Рисунок 3. Расчетная схема балки

Предельную нагрузку $q_{пр}$ найдем из равенства $M_{q_{пр}} = M_{F_{пр}}$, где $M_{F_{пр}}$ – наибольший изгибающий момент от предельной нагрузки $F_{пр}$, полученной по вышеописанному методу; $M_{q_{пр}}$ – изгибающий момент от нагрузки $q_{пр} + q_{с.в.}$ ($q_{с.в.}$ – собственный вес балки). В качестве $q_{пр}$ принимается $q_{пр}^{н}$ (нижнее значение, определяемое по нижнему значению $F_{пр}^{н}$) или большее значение, но с некоторым риском.

Из расчетной схемы по рисунку 3 имеем $M_{q_{пр}} = (q_{пр} + q_{с.в.}) l^2/8$ и $M_{F_{пр}} = \frac{F_{пр} l}{4}$. Отсюда $q_{пр}^{н} + q_{с.в.} = \frac{2F_{пр}^{н}}{l}$ и $q_{пр}^{н} = \frac{2F_{пр}^{н}}{l} - q_{с.в.}$.

Верхнее значение предельной нагрузки $q_{пр}^{в} = \frac{2F_{пр}^{в}}{l} - q_{с.в.}$. Несущая способность балки характеризуется интервалом нагрузки $[q_{пр}^{н}, q_{пр}^{в}]$. Действующая нагрузка на балку должна отвечать условию $q \le q_{пр}^{н}$ при осторожном (пессимистическом) варианте несущей способности.

Если $q_{пр}$ в интервале ее значений принять как случайную величину $\tilde{q}_{пр}$, то при среднем значении $q_{пр} = 0{,}5(q_{пр}^{н} + q_{пр}^{в})$ ее можно описывать усеченным интервальным распределением по рисунку 2.

Пример 2. На рисунке 4 показана уточненная расчетная схема балки с учетом упругой податливости опор при наличии угловой жесткости опорных закреплений.

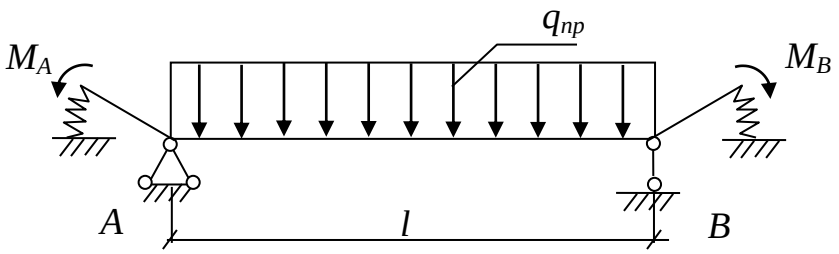


Рисунок 4. Уточненная расчетная схема балки

В такой схеме место с наибольшим изгибающим моментом неизвестно. Поэтому предварительно перед испытаниями балки нагрузкой F приходится выявлять угловую жесткость опорных закреплений и только после этого решать статически неопределимую задачу и находить в балке $M_{\max}$ и его место. В этом месте и прикладывается испытательная (пробная) нагрузка. Описание метода выявления угловой жесткости опор А и В и дальнейший расчет балки по рисунку 4 можно найти в работе [9].

Заключение

1. Предложен новый метод определения несущей способности железобетонных балок и балочных плит по критериям прочности арматуры и бетона балки на стадии эксплуатации.

2. Способ в исполнении отличается безопасностью, т. к. вместо нагружения балки при интегральных испытаниях используется ее разгружение.

3. В качестве меры несущей способности использована предельная нагрузка в интервальной форме, которую выдерживает балка с определенным уровнем вероятности.

4. Предложенный метод может быть использован для других видов предельных состояний железобетонной балки, для других конструктивных форм и различных видов воздействий.

Литература

1. Рибицки Р. Повреждения и дефекты в строительных конструкциях. Пер. с нем. М.: Стройиздат, 1982. 432 с.
2. Байда Д.Н. Остаточная несущая способность железобетонных балок после их частичного разрушения: Автореф. дисс…. канд. техн. наук. Киев, 2005. 21 с.
3. Лотыш В.В. Определение несущей способности железобетонных балок при изгибе с учетом трещинообразования. Анализ развития трещин: Автореф. дисс…. канд. техн. наук. Львов, 2001. 17 с.
4. Бедов А.И., Сапрыкин В.Ф. Обследование и реконструкция железобетонных и каменных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений. М.: Изд-во АСВ. 1995. 192 с.
5. Землянский А.А. Обследование и испытание зданий и сооружений. М.: Изд-во АСВ, 2001. 240 с.
6. Патент на изобретение № 2460057. Способ неразрушающего определения несущей способности строительных конструкций / Уткин В.С., Редькин А.Н. М., 2012, бюл. № 24.
7. Патент на изобретение № 2275613. Способ неразрушающего контроля несущей способности железобетонных конструкций / Уткин В.С., Кошелева Ж.В. М., 2006, бюл. №12.
8. Mohebimoghaddan B., Dianat S.H. Evolution of the corrosion and strength of concrete exposed to sulfate solution // International Journal of Civil Engineering and Technology. 2012. Vol. 3. Issue 2. Pp. 158–206.
9. Уткин В.С., Уткин Л.В. Несущая способность и надежность строительных конструкций. Вологда: ВоГУ, 2000. 152 с.
10. Utkin L.V., Kozine I. On new cautious structural reliability models in the framework of imprecise probabilities // Structural Satefy. 2010. Vol. 32. Issue 6. Pp. 411–416.
11. Utkin V.S. Safety analysis of the soil beds of foundations based on bearing-capacity criterion // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2014. Vol. 51, No. 1 (Russian Original No.1, January-February, 2014). Pp. 9–16.

12. Шишкин Н.Ф. Основы метрологии, стандартизации и контроля качества: Учеб. пособие. М.: Изд-во стандартов, 1987. 320 с.

13. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 510 с.

14. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций. Пер. с нем. М.: Стройиздат, 1994. 288 с.

15. Ермолаев Н.Н., Михеев В.В. Надежность оснований сооружений. Л.: Стройиздат, 1976. 152 с.

16. Аугусти Г., Баратта А., Кашмати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании. Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1988. 580 с.

17. Yan Wang. Imprecise probabilities based on generalized intervals for system reliability assessment // International Journal of Reliability and Safety. 2010. Vol. 4. No. 4. Pp. 319–342.

18. Ning-Cong Xiao, Hong-Zhong Huang, Yan-Feng Li, Zhonglai Wang, Xiao-Ling Zhang. Non-probabilistic reliability sensitivity analysis of the model of structural systems with s interval variables whose state of dependence is determined by constrains // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability. 2013. Vol. 227. Issue 5. Pp. 491–498.

19. Ярыгина О.В. Методы расчета надежности железобетонных конструкций в составе зданий и сооружений при ограниченной статистической информации: Автореф. дисс…. канд.техн. наук. Санкт-Петербург, 2013. 23 с.

20. Rüsch H., Sell R., Rackwity R. Statistische Analyse der Betonfestigkeit. Berlin: Dentschee Ausschup fü Stanleton, 1969. 206 p.

21. Мацулевич О.В., Рудницкий В.А., Литвиновский Д.А. Определение модуля упругости бетона методом динамического индектирования // Неразрушающий контроль и диагностика. 2012. №4. С. 46–56.

22. Aven T. Interpretations of alternative uncertainty representations in a reliability and risk analysis context // Reliability Engineering & System Safety. 2011.Vol. 96. Issue 3. Pp. 353–360.

23. Aven T., Zio E. Some considerations on the treatment of uncertainties in risk assessment for practical decision making // Reliability Engineering & System Safety. 2011. Vol. 96. Issue 1. Pp. 64–74.

24. Dempster A.P. Upper and lower probabilities induced by a multivalved mapping // Annals of Mathematical Statistics. 1967. Vol. 38. No.2. Pp. 325–339.

25. Shafer G.A. Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976. 297 p.

26. Zhang Z., Jiang C., Han X., Dean Hu, Yu S. A response surface approach for Structure reliability analysis using evidence theory // Advanced in Engineering Software. 2014. Pp. 37–45.

Владимир Сергеевич Уткин, г. Вологда, Россия

Тел. раб.: +7(8172)518396; эл. почта: UtkinVoGTU@mail.ru

© Уткин В.С., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.3

Экспериментальные исследования работы балок двутаврового сечения при действии изгиба и кручения

Д.т.н., заведующий кафедрой А.Р. Туснин;
аспирант М. Прокич,
Московский государственный строительный университет

Аннотация. В статье представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований работы двутавровой балки при кручении с изгибом. Рассмотрены симметричные двутавровые балки прокатные или сварные при размерах стенки и полки, исключающих потерю местной устойчивости. Параметры испытываемых конструкций и величины прикладываемых нагрузок обоснованы предварительным численным расчетом, который выполнен с учетом физической и геометрической нелинейности.

Проведены испытания при действии изгиба и кручения нескольких балок вплоть до полной потери несущей способности. Выполнен сравнительный анализ экспериментальных, теоретических и численных результатов.

Установлено соответствие теоретических и экспериментальных данных (отличие, как правило, не более 15 %), подтверждена достоверность примененных численных методик для расчета конструкций, испытывающих изгиб и кручение, с учетом развития пластических деформаций, что позволяет использовать их для разработки инженерной методики расчета.

Ключевые слова: двутавровая балка; стесненное кручение; изгиб; эксперимент; численный расчет; несущая способность

Введение

Тонкостенные стальные стержни в строительных конструкциях могут работать в условиях изгиба с кручением. Для обоснованного выбора параметров конструкции в этом случае необходимо подробное изучение ее поведения при загружении и точное определение ее несущей способности [1–6]. Поведение симметричных двутавров в условиях изгиба изучено хорошо, вплоть до образования пластического шарнира и потери несущей способности элемента. В тонкостенных стержнях открытого профиля при стесненном кручении возникают дополнительные секториальные напряжения, которые могут вносить значительный вклад в суммарные нормальные напряжения и приводят к раннему достижению предела текучести [7]. Учет пластических деформаций позволяет увеличить несущую способность профиля [8–9].

В российских нормах отсутствуют рекомендации по учету пластических деформаций при расчете балок, испытывающих одновременно изгиб и кручение. Проектирование с учетом развития пластических деформаций позволяет уменьшить расход металла по сравнению с расчетом в упругой стадии. Выявление всех резервов несущей способности конструкции является актуальной задачей.

Экспериментальные исследования несущей способности тонкостенных стержней открытого профиля, в частности, испытания балок при кручении показали, что при упругопластическом кручении предельные моменты были значительно выше, чем предсказывалось теорией [10–16]. Ранее выполненные исследования показали, что несущая способность двутаврового сечения из-за развития пластических деформаций при действии бимомента увеличивается в 1,5 раза [17]. Последующие численные расчеты показали, что если к действию бимомента прибавить изгибающий момент, то резервы несущей способности за счет пластических деформаций при стесненном кручении уменьшаются. Коэффициент, учитывающий пластические деформации стали, уменьшается в зависимости от доли изгибающего момента в нормальных напряжениях [18]. Для выявления действительной работы тонкостенных стержней открытого профиля при действии изгиба и кручения в пластической стадии работы необходимо проведение экспериментальных исследований. В данной статье приводятся результаты испытаний симметричных двутавров при одновременном изгибе и кручении. Экспериментальные результаты получены для профилей, местная устойчивость стенки и полок которых обеспечена.

Описание исследования

Цель экспериментально-теоретического исследования – изучение напряженно-деформированного состояния двутавровой балки при совместном действии изгиба и стесненного кручения с учетом развития пластических деформаций. Параметры экспериментальной модели определены предварительными численными расчетами балок с учетом физической и геометрической нелинейности [19–20]. При выборе профилей для эксперимента, высоты сечения и расчетных пролетов учитывались характеристики применяемого оборудования для испытаний и особенности исследуемого напряженного состояния. Размеры полки и стенки испытываемого профиля подобраны так, чтобы исключить потерю местной устойчивости до полного исчерпания прочности сечения.

Расчетная схема испытываемой конструкции показана на рисунке 1. Рассмотрена шарнирно опертая балка, на опорах которой исключен поворот сечений, но допускается свободная депланация сечений. В середине пролета балка нагружена силой, действующей в вертикальной плоскости с эксцентриситетом относительно продольной оси, что создает одновременно крутящий и изгибающий моменты в балке.

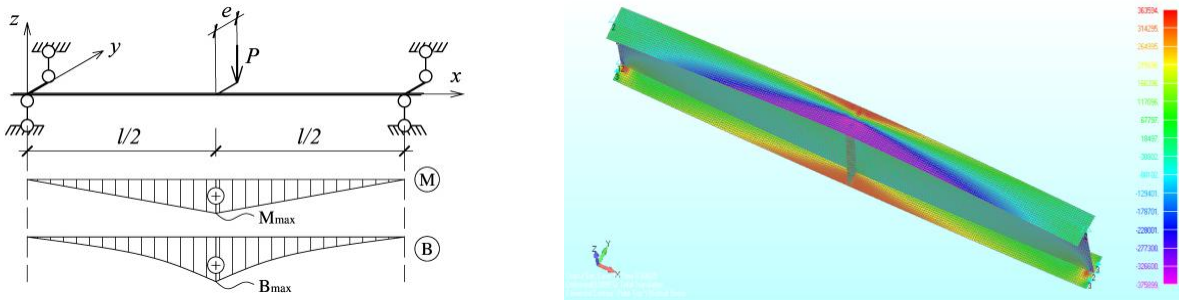


Рисунок 1. Расчетная схема экспериментальной модели и распределение нормальных напряжений, полученное в программном комплексе

Работу тонкостенного стержня открытого профиля при кручении характеризует безразмерный параметр (безразмерное характеристическое число [22]), равный произведению изгибно-крутильной характеристики стержня на его пролет:

$$kl = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}}\, l \quad . \tag{1}$$

Исходя из доступного оборудования в лаборатории (испытательная машина Instron 3382) сделан выбор профиля балки и подобраны пролеты таким образом, чтобы охватить диапазон параметра kl, близкий к практическому. С учетом этого была выбрана балка из прокатного профиля 12Б1 по СТО АСЧМ 20-93 пролетами в диапазоне 600...1200 мм. В качестве материала балок была принята сталь класса С345, что позволило проводить испытания в среднем диапазоне нагрузки, создаваемой прессом, и уменьшило погрешность прикладываемой нагрузки.

Предварительные расчеты проведены с использованием известных теоретических зависимостей, полученных для данной расчетной схемы [21].

$$B_{\omega(l/2)} = \frac{M_t}{2k} \cdot \frac{sh\,(kl/2)}{ch\,(kl/2)} \quad ; \tag{2}$$

$$M_{y(l/2)} = \frac{P \cdot l}{4} \quad ; \tag{3}$$

$$\theta_{(l/2)} = \frac{M_t}{2k^3 EI_\omega} \cdot \left(\frac{kl}{2} - \frac{sh\,(kl/2)}{ch\,(kl/2)} \right) , \tag{4}$$

где $B_{\omega(l/2)}$ – бимомент; M_t – крутящий момент; $M_{y(l/2)}$ – изгибающий момент; $\theta_{(l/2)}$ – угол поворота сечения.

По приведенным формулам вычислены значения нормальных напряжений от стесненного кручения и изгиба, которые использовались при определении суммарных нормальных напряжений и перемещений. Для выбранных пролетов проведены расчеты, позволившие определить

эксцентриситеты приложения нагрузки. Соотношение секториальных и изгибных нормальных напряжений σ_B / σ_M находится в диапазоне (1,9…1,5).

Проведены испытания плоских образцов на растяжение для определения предела текучести, модуля упругости и диаграммы работы материала испытуемых образцов.

По усредненным данным испытаний определены искомые параметры и получен график работы стали. Результаты испытаний материала представлены в таблице 1 и на графике (рис. 2).

Таблица 1. Результаты испытаний материала

Ширина образца, мм	Толщина образца, мм	Площадь сечения, мм^2	Расчет-ная длина, мм	Длина после разрыва, мм	Относи-тельное удлине-ние, (%)	Модуль упругости при растяжении, МПа	Предел текучести, МПа	Временное сопро-тивление, МПа
9.4	3.8	35.72	60	80	33.33	253978	329.46	482.93

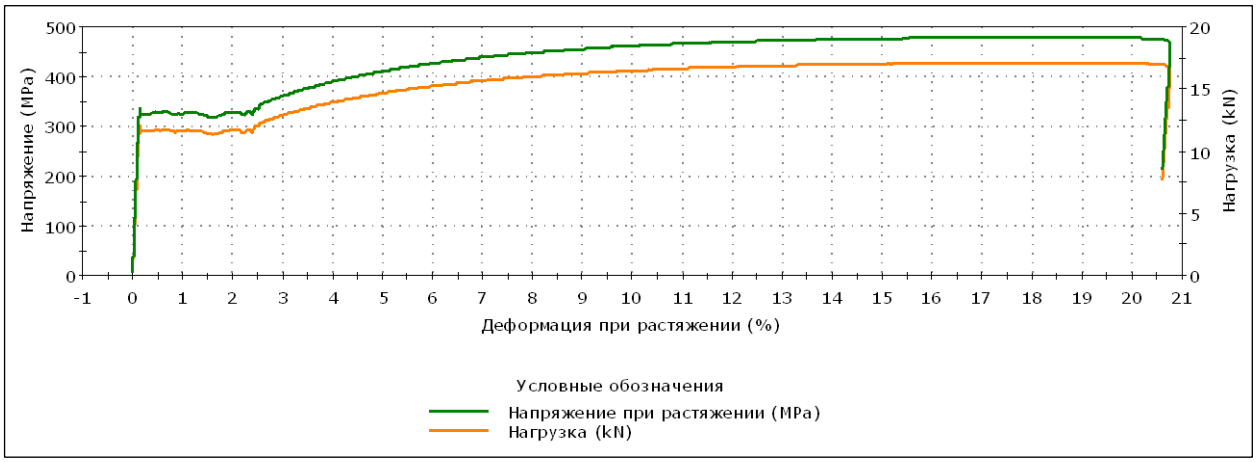


Рисунок 2. Диаграмма работы материала испытуемых образцов

Численный расчет балок выполнен с использованием вычислительного комплекса Nastran с учетом геометрической и физической нелинейности. В расчетах использована фактическая диаграмма работы материала. Стержень моделировался конечными элементами оболочки типа «plate». Сетка разбиения и способ задания диаграммы работы стали обоснованы ранее выполненными исследованиями [23]. На основании проведенного расчета определены параметры испытываемых конструкций. В таблице 2 представлены основные параметры рассчитываемых балок и величины предельных нагрузок, при которых происходит потеря несущей способности.

Таблица 2. Параметры испытуемых образцов

Тип сечения	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1
h, см	11.76	11.76	11.76	11.76	11.76	11.76
b_f, см	6.40	6.40	6.40	6.40	6.40	6.40
$G \cdot I_t$, кН·м^2	0.745	0.745	0.745	0.745	0.745	0.745
$E \cdot I_w$, кН·м^4	0.179	0.179	0.179	0.179	0.179	0.179
l, м	***0.6***	***0.7***	***0.8***	***0.9***	***1.0***	***1.2***
kl	***1.224***	***1.428***	***1.632***	***1.836***	***2.040***	***2.447***
Предельная нагрузка [Nastran], кН	***52.94***	***44.84***	***38.91***	***34.06***	***30.31***	***24.53***
Эксцентриситет, см	***2.00***	***2.00***	***2.00***	***2.00***	***2.00***	***2.00***
Изгибающий момент My, кН·см	794.10	784.70	778.20	766.35	757.81	731.25
Крутящий момент, кН·см	105.88	89.68	77.82	68.12	60.62	48.76
Бимомент B, кН·см^2	1415.8	1347.9	1283.5	1210.5	1144.1	1004.8
Соотношение напряжений σ(B)/σ(M)	***1.90***	***1.83***	***1.76***	***1.69***	***1.54***	***1.47***

Расчетами установлена величина предельной нагрузки, при которой происходит потеря несущей способности профиля, она находится в диапазоне 2,5....5,3 т и соответствует мощности доступного в лаборатории пресса Instron 3382 (10 т). При этом эксцентриситет приложения нагрузки принят постоянным и равным 2 см, поскольку соотношение изгибных и секториальных напряжений будет варьироваться с изменением пролета испытуемых балок. Также расчетами определена требуемая толщина ребра жесткости (3 мм), устанавливаемого в середине пролета балки, в месте приложения нагрузки. Его задача – обеспечить неизменяемость контура поперечного сечения согласно положениям теории В.З. Власова [22].

После определения основных параметров расчетной схемы, величин нагрузки и эксцентриситетов были разработаны опорные узлы, способ передачи нагрузки и выбраны точки для установки тензорезисторов. На рисунке 3 представлена соответствующая экспериментальная установка, а также деформированная балка в момент потери несущей способности.

Рисунок 3. Испытания двутавровой балки на изгиб со стесненным кручением

Экспериментальная установка состоит из траверсы, установленной на прессе. Опорами балок служили цилиндрические шарниры, обеспечивающие свободу угла поворота в вертикальной плоскости. Пролет балок варьировался от 600 до 1200 мм. На опорах полки балок фиксировались вертикальными пластинами в горизонтальном направлении, что исключало поворот опорных сечений относительно продольной оси и обеспечивало свободу депланации сечений. Нагрузка передавалась на верхнюю полку балки цилиндром через пластину, фиксирующую ее заданный эксцентриситет, с возможностью перемещения в горизонтальной плоскости.

В процессе испытаний нагрузка прикладывалась шагами, величина нагрузки контролировалась датчиком перемещений испытательной машины. Для измерения деформаций образцов применялись тензорезисторы японской компании «Tokyo Sokki Kenkyujo», типа FLA-5-11 с базой длиной 5 мм и шириной 1,5 мм. Рабочая температура данных датчиков находится в диапазоне от −20 до +80 °С. На каждом образце было установлено как минимум 4 тензометрических датчика. Тензорезисторы были установлены на расстоянии 2,5 см от середины пролета балки на краях полок, поскольку там ожидались близкие к максимальным нормальные напряжения в сечении. На образце длиной 90 см они были продублированы симметрично относительно середины балки, а на образцах длиной 60 и 90 см установлено еще 4 дополнительных датчика на полках поперечного сечения. При обработке показаний датчиков для получения напряжений, соответствующих деформациям, была использована диаграмма работы стали, полученная в ходе предварительных испытаний материала. Кроме деформаций, в процессе нагружения измерялись угол поворота сечения с помощью двух электронных индикаторов (рис. 4, а) и прогиб балки по измерениям испытательной машины.

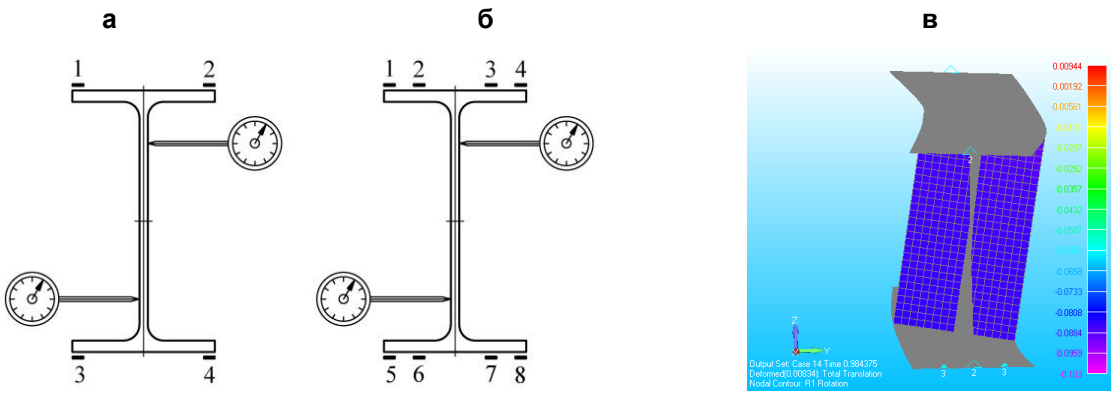


Рисунок 4: а, б – схемы устанавливаемых тензорезисторов и индикаторов на образцах длиной 70, 80, 100, 120 см и образцах длиной 60, 90 см соответственно; в – угол поворота при потере несущей способности в Nastran

Сравнение результатов

Зависимости угла поворота от нагрузки для шести образцов, полученные численным расчетом (сплошная линия) и экспериментально (штриховая линия), представлены на рисунке 5.

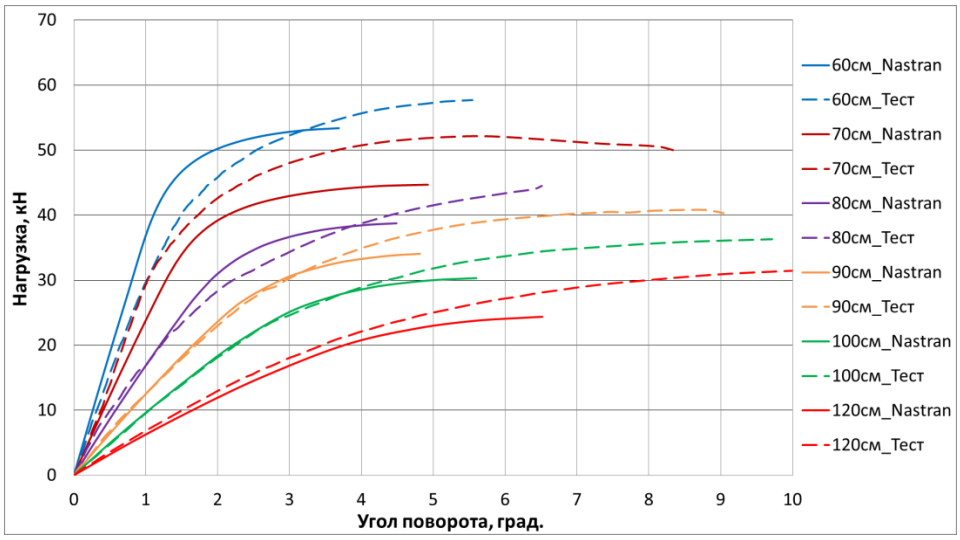


Рисунок 5. Зависимости угла поворота от нагрузки

На рисунках 6 и 7 представлены графики изменения напряжений с ростом нагрузки, полученные экспериментально (штриховая линия) и численным расчетом (сплошная линия). Зависимости, полученные расчетом, приведены для точек сечения, совпадающих с местами установки тензорезисторов.

По результатам испытаний следует отметить, что картины деформирования, полученные расчетом и экспериментальным путем, качественно совпадают. Суммарные нормальные напряжения достигают предела текучести раньше всего в датчиках 1, 3 (1, 5), где напряжения от изгибающего момента и бимомента имеют одинаковые знаки. Пластические деформации дальше распространятся по сечению, при этом углы поворота незначительно отклоняются от упругих значений. После того как на другом конце полки в датчиках 2 (4) появляется текучесть, углы поворота начинают резко увеличиваться, и образование пластического шарнира в полке приводит к потере несущей способности элемента. Следовательно, появление текучести в крайнем волокне вовсе не означает потерю несущей способности балки при стесненном кручении, и имеющиеся резервы следует учесть при разработке соответствующей инженерной методики расчета.

Сравнение численных и экспериментальных результатов представлено в таблице 3. Внутренние усилия, изгибающий момент *My* и бимомент *B* определены теоретически (согласно положениям теории В.З. Власова), численно и по показаниям четырех датчиков обратным путем в соответствии с распределением напряжений в упругой стадии работы.

а б

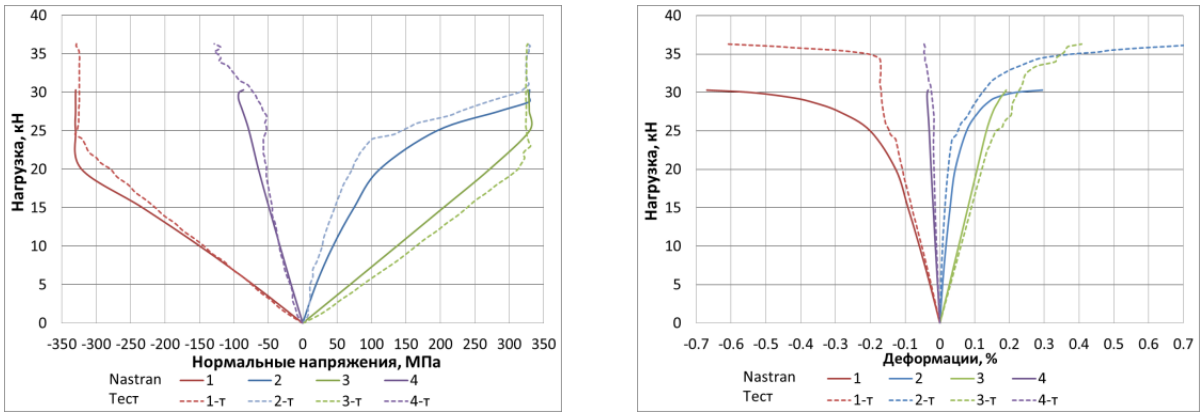


Рисунок 6. Диаграммы для датчиков образца длиной 100 см: а) нагрузка – напряжения; б) нагрузка – деформации

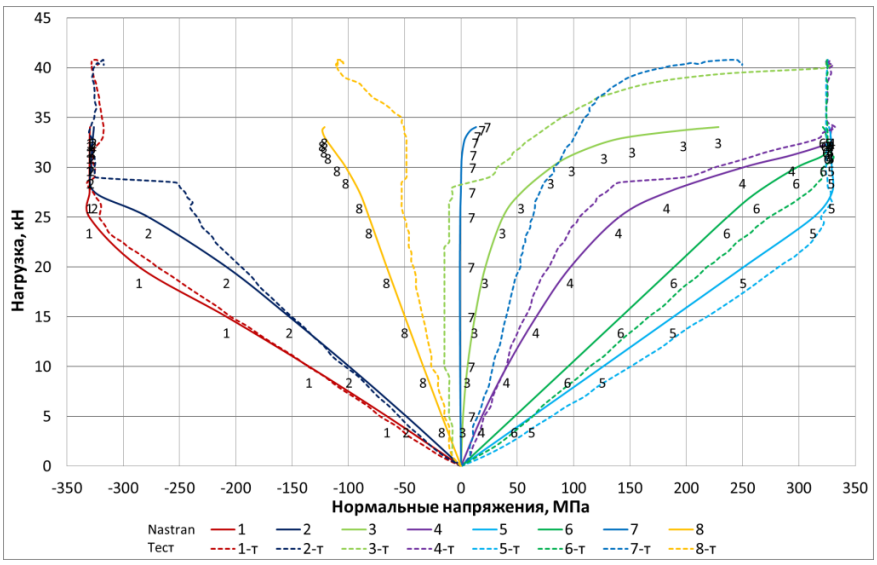


Рисунок 7. Диаграмма нагрузка – напряжения для образца длиной 90 см

Таблица 3. Сравнение результатов исследований

Тип сечения		12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1
l, м		*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*	*1.0*	*1.2*
Предельная нагрузка, Nastran Ncr[n], кН		52.94	44.84	38.91	34.06	30.31	24.53
Предельная нагрузка, Тест Ncr[t], кН		57.70	52.08	44.50	40.50	36.30	31.00
Ncr[t] / Ncr[n] , %		*108.99*	*116.15*	*114.37*	*118.91*	*119.75*	*126.37*
Угол поворота, Nastran φ[n], град		3.69	5.45	4.49	4.81	4.99	6.52
Угол поворота, Тест φ[t], град		3.32	4.92	4.00	3.77	4.35	4.79
φ[n] / φ[t] , %		*111.14*	*110.66*	*112.08*	*127.59*	*114.64*	*136.00*
Nastran	My, кН·см	395.76	431.93	427.89	390.17	435.15	425.08
	B, кН·см²	754.04	828.30	783.21	685.10	752.46	842.82
Тест	My, кН·см	342.31	526.54	478.62	450.73	487.79	559.87
	B, кН·см²	732.24	736.72	622.61	657.57	700.72	717.08
Теория	My, кН·см	472.50	525.00	500.00	450.00	500.00	600.00
	B, кН·см²	842.41	901.79	824.68	710.80	754.85	824.46
Nastran / Тест, %	My	*115.62*	*82.03*	*89.40*	*86.56*	*89.21*	*75.92*
	B	*102.98*	*112.43*	*125.80*	*104.19*	*107.38*	*117.54*
Теория / Тест, %	My	*138.03*	*99.71*	*104.47*	*99.84*	*102.50*	*107.17*
	B	*115.05*	*122.41*	*132.46*	*108.09*	*107.73*	*114.97*

Заключение

1. Выполнены экспериментальные и численные исследования работы балок двутаврового профиля при совместном действии изгиба и кручения вплоть до потери несущей способности элемента. Анализ поведения экспериментальных образцов подтвердил, что балки при изгибе и кручении имеют значительные резервы несущей способности по сравнению с упругой стадией работы стали. Текучесть в крайнем волокне элемента не означает потерю несущей способности балки. Специфика распределения секториальных напряжений от стесненного кручения обусловливает характер полной потери несущей способности, происходящей вследствие образования пластического шарнира в полке. Углы поворота начинают резко увеличиваться только после появления текучести на обоих краях одной полки. До того момента они незначительно отклоняются от малых значений, рассматриваемых в классической теории упругого кручения.

2. Сравнение экспериментальных и численных результатов показало, что в большинстве случаев их отличие не превышает 15 %, в одном случае максимальное отличие составило 36 %. При этом следует учитывать, что это обусловлено более ранним исчерпанием несущей способности, полученным в численном расчете, по сравнению с испытуемой конструкцией. Для всех образцов предельная нагрузка, при которой происходит потеря несущей способности, определенная экспериментально, превышает расчетное значение на 9–26 %.

3. Экспериментально установлены значительные резервы несущей способности симметричных двутавровых балок при развитии пластических деформаций и отсутствии потери местной устойчивости стенки и полок, что обосновывает необходимость более точного определения величины этих резервов. Подтверждена достоверность численных методов расчета, что дает возможность их использования, при более широком спектре параметров и соотношений действующих усилий, для разработки инженерной методики расчета балок при действии изгиба и кручения и включения этой методики в нормы по проектированию стальных конструкций.

Литература

1. Boulton N.S. Plastic twisting and bending of an I-section in which warp is restricted //International Journal of Mechanical Sciences. 1962. Vol. 4, Pp. 491–502.
2. Айрумян Э.Л. Особенности расчета конструкций из тонкостенных гнутых профилей // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2008. №3. С. 2–7.
3. Айрумян Э.Л., Белый Г.И. Исследование работы стальной фермы из холодногнутых профилей с учетом их местной и общей устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №5. С. 41–44.
4. Рыбаков В.А., Гамаюнова О.С. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. №7(12) С. 79–123.
5. Vatin N.I., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A., Orlova A., Salamakhin S. Thin-walled cross-sections and their joints: tests and FEM-modelling // Advanced Materials Research. 2014,Vol. 945–949. Pp. 1211–1215.
6. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Strength and Durability of Thin-Walled Cross-Sections // Design, Fabrication and Economy of Metal Structures: International Conference Proceedings. 2013. Pp. 165–170.
7. Pi Y., Bradford M., Trahair N. Inelastic Analysis and Behavior of Steel I-Beams Curved in Plan // Journal of Structural Engineering (ASCE). 2000. Vol. 126(7). Pp. 772–779.
8. Dinno K.S., Gill S.S. The plastic torsion of I-sections with warping restraint // International Journal of Mechanical Sciences. 1964. Vol. 6. Pp. 27–43.
9. Dinno K.S., Merchant W. A procedure for calculating the plastic collapse of I-sections under bending and torsion // The Structural Engineer. 1965. Vol. 43(7). Pp. 219–221.
10. Aalberg A. An experimental study of beam-columns subjected to combined torsion, bending, and axial actions. Dr.ing. thesis. Trondheim, 1995.
11. Becque J., Rasmussen K.J.R. Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns // Journal of Constructional Steel Research. 2009. Vol. 65. Issues 8–9. Pp. 1677–1684.

12. Недвига П.Н., Рыбаков В.А. Эмпирические методы оценки несущей способности стальных тонкостенных просечно-перфорированных балок и балок со сплошной стенкой // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8(10). С. 27–30.

13. Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5. С. 44–51.

14. Данилов А.И., Туснина О.А. Экспериментально-теоретические исследования напряженно-деформированного состояния прогона покрытия из сэндвич-панелей // Вестник МГСУ. 2014. №11. С. 26–36.

15. Синельников А.С., Орлова А.В. Прочность просечно-растяжного профиля: испытания и математическое моделирование // Вестник МГСУ. 2013. №12. С. 41–54.

16. Ungermann, D., Lübke, S. and Brune, B. Tests and design approach for plain channels in local and coupled local-flexural buckling based on eurocode 3 // Thin-Walled Structures. 2013. Vol. 81. Pp. 108–120.

17. Туснин А.Р., Прокич М. Прочность двутавровых профилей при стесненном кручении с учетом развития пластических деформаций // Вестник МГСУ. 2014. №1. С. 75–82.

18. Туснин А.Р., Прокич М. Работа симметричных двутавровых сечений при развитии пластических деформаций и действии изгибающего момента и бимомента // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 44–53.

19. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2011. №1(27). С. 53–73.

20. Li Z., Ádány S. Schafer B.W. Modal identification for shell finite element models of thin-walled members in nonlinear collapse analysis // Thin-Walled Structures. 2013. Vol. 67. Pp. 15–24.

21. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 475 с.

22. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.

23. Прокич М. Учет пластической работы материала в численных расчетах стальных двутавровых балок на кручение // Научное обозрение. №7. 2014. С. 201–205.

Александр Романович Туснин, Москва, Россия
Тел. раб.: +7(495)2874914; эл. почта: valeksol@mail.ru

Милан Прокич, Москва, Россия
Тел. моб.: +7(925)1751964; эл. почта: prokic@mail.ru

© Туснин А.Р., Прокич М., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.4

Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия

Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов,
Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Аннотация. Рассмотрена упругая пространственная статически определимая ферма регулярного типа, моделирующая прямоугольное в плане покрытие. В плоскости основания ферма имеет две оси симметрии. Четыре опоры конструкции (сферический шарнир, цилиндрический шарнир и два вертикальных стержня) расположены в ее углах.

Решена задача о действии на ферму сосредоточенной силы. Получено аналитическое решение для усилий в стержнях фермы. С помощью формулы Максвелла – Мора найдена зависимость прогиба центра фермы от пяти параметров задачи: трех линейных размеров и чисел шарниров по боковым ее сторонам. Для определения искомой закономерности средствами системы компьютерной математики Maple решалась задача рекурсии по двум параметрам.

Показано, что зависимость прогиба от числа панелей и высоты фермы обнаруживает минимум, позволяющий оптимизировать размеры конструкции.

Ключевые слова: деформации; метод индукции; пространственная ферма; покрытие

Введение

Расчет статически определимых ферм в практике проектирования имеет не только самостоятельное значение, но и является неотъемлемой частью расчета статически неопределимых конструкций и элементов конструкций. Совершенно очевидно, что в реальных проектах фермы не существуют в чистом, статически определимом виде хотя бы потому, что соединяющие шарниры не идеальны. Более того, стальные узлы чаще всего просто завариваются или сразу изготавливаются без шарнира. Кроме того, для увеличения жесткости обычно в изначально статически определимую схему вводятся дополнительные стержни и т. д. Однако это вовсе не уменьшает значение статически определимых схем ферм. Судя по названию работы [1] («охота за схемами статически определимых ферм»), их значение только растет.

Связано это, с одной стороны, с методами расчета ферм и, прежде всего, с методом сил, где в качестве основной системы выбирается статически определимый вариант фермы. С другой стороны, статически определимые фермы сами по себе имеют преимущества, например, при монтаже и изготовлении. При неточном изготовлении элементов (а этого не избежать) в процессе монтажа не требуется усилий для подгонки размеров до нужных величин, так как в статически определимых конструкциях при отсутствии нагрузки элементы не напряжены.

Особую трудность при выборе статически определимых схем ферм вызывают пространственные конструкции [2–11], а среди них те, которые обладают свойством подобия по числу элементов и симметрией. Последние свойства связаны с регулярностью схем. Для таких схем разработан и применяется индуктивный метод получения точных аналитических решений. Аналитические же решения необходимы как тестовые для численных расчетов, а также в тех случаях, когда число стержней фермы превышает вычислительные возможности компьютерных программ, использующих численные методы решения. Неизбежное накопление ошибок округления и существенное увеличение длительности счета часто не позволяют использовать численные методы в тех случаях, когда требуется найти усилие в каком-то конкретном стержне. В некоторых решениях усилие в стержне сложной фермы может отличаться от точного не просто в каком-то разряде, но даже и знаком. Это легко проверить, например, решив в системе Maple [12] задачу о ферме с 40–50 стержнями с искусственно заниженной специально для эксперимента точностью, определяемой в системе Maple оператором **Digits**. При этом интегральные характеристики результатов счета (например, прогиб), как правило, получаются вполне удовлетворительными. Однако и здесь качество решения можно оценить по аналитическому методу, если такое решение существует. Все эти тезисы подводят к известной мысли о важности аналитических решений в виде конечной формулы.

Уже упомянутая система компьютерной математики Maple (и другие аналогичные системы, например, не менее мощная Mathematica или свободно распространяемая Maxima) позволяют получать точные решения в символьной форме. Схема составления уравнений равновесия остается такой же, как и в численных методах, а решение полученной системы линейных

уравнений осуществляется без подстановки в нее численных значений размеров и нагрузок. Таким образом, в решение эти величины входят как некоторые параметры. Однако здесь есть незаметная на первый взгляд трудность, снижающая эффект от применения систем компьютерной математики. Эта трудность – время аналитических преобразований, существенно превышающее время преобразований численных. Если ведется расчет регулярной конструкции, в которой одним из параметров выступает число некоторых периодических элементов системы (например, число панелей в плоской балочной ферме), то с увеличением этого параметра время растет так быстро, что символьный расчет как будто несложной фермы с 20 панелями занимает чрезмерно большое время. Вероятно, единственный выход из этой ситуации – воспользоваться методом индукции по параметру периодичности [13–16]. Но если для плоских и пространственных балочных конструкций такой параметр один, то для рассматриваемого в данной работе прямоугольного в плане покрытия таких параметров два – по одному по каждой из сторон фермы. При этом возникают некоторые математические трудности, преодоление которых описано ниже.

Заметим, что расчет сложной системы с большим числом стержней можно проводить, моделируя ее телом с распределенной по объему жесткостью – заменяя, например, пространственную стержневую плиту сплошной. Расчеты (в том числе в системе Maple) таких объектов известны, обоснованы и получили достаточное практическое и теоретическое подтверждение [17, 18]. Для получения интегральных характеристик исследуемого объекта (прочность, несущая способность, прогиб) этот метод вполне оправдан, удобен и точен. Для нахождения же усилия в конкретном стержне замена стержневой модели на сплошное тело не подходит. В таком случае потребуются дискретные методы.

Всякий расчет, в том числе и предлагаемый, всегда предполагает какую-то практическую цель: возможность оптимизировать конструкцию [19, 20], снизить ее вес, повысить надежность и пр. Помимо точных аналитических решений, в последнее время стали развиваться генетические методы оптимизации [21, 22].

Схема конструкции

Исследуемое покрытие представляет собой пространственную статически определимую ферму, состоящую из двух горизонтально расположенных контуров и пирамидальных куполов над ячейками нижнего контура (рис. 1–3). Нижний контур – прямоугольная решетка с ячейками (панелями) размером $a \times b$. По оси x пояс содержит n ячеек со стороной a, вдоль оси y – m ячеек размером b. Всего в нижнем контуре $N = nm$ ячеек, над каждой из которых надстроена пирамида высотой h из четырех одинаковых стержней. Верхний контур соединяет только вершины пирамид вдоль боковых сторон конструкции. В нижнем контуре $K = (n+1)(m+1)$ шарнирных узлов и $2N + n + m$ стержней, в верхнем – $N = nm$ узлов и $N = 2(m+n-2)$ стержней. Если учесть $4N$ стержней пирамид, то получится, что в ферме $n_s = 6N + 3(n+m) - 4$ стержней и $n_u = N + K$ шарниров. Вместе с 7 опорными стержнями и 7 дополнительными шарнирами, которые соединяют эти стержни с основанием, получится, что число неизвестных усилий в стержнях совпадает с числом возможных уравнений равновесий узлов в проекции на три координатные оси:

$$n_s + 7 = 3(N + K)\,. \tag{1}$$

Система статически определима. Отметим необычную для подобных систем ситуацию – ферма имеет 7 опор, в то время как в статически определимых задачах таких опор 6 (по числу степеней свободы тела в пространстве). Кроме того, в конструкции четыре вертикальные опоры, поддерживающие плоскость нижнего контура. Кажется, что одна из опор лишняя, так как плоскость определяют три точки, однако это не так. Все дело в том, что один опорный стержень взят из самой фермы. Ферма без указанных семи опор твердым (неизменяемым) телом не является. Только совместно с опорными стержнями задача получается корректно поставленной, что подтверждается тождеством (1).

Чтобы задать геометрию фермы, введем систему координат с осями x и y вдоль сторон горизонтального покрытия и вертикальной осью z. Начало координат поместим в сферической опоре. В нижнем контуре расположено $K = (n+1)(m+1)$ узлов с координатами

$$\bar{r}_k = [x_k, y_k, z_k] = [(i-1)a,\ (j-1)b,\ 0], k = i + (j-1)(n+1),\ \ i = 1,...,n+1,\quad j = 1,...,m+1,$$

в верхнем – $N = nm$ узлов:

$$\bar{r}_k = [(i-1/2)a,\ (j-1/2)b,\ 0],\ \ k = i+(j-1)n+K,\ \ i=1,...,n,\ \ j=1,...,m,$$

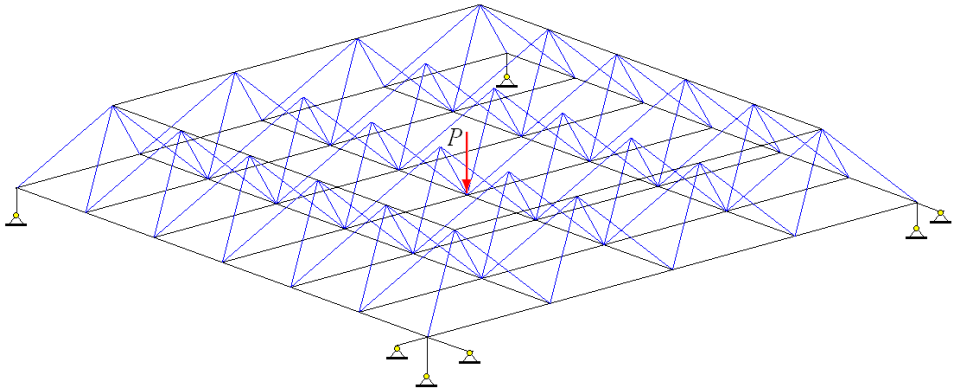


Рисунок 1. $n = 4,\ m = 6$

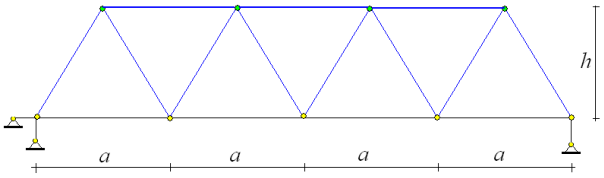


Рисунок 2. Вид сбоку, $n = 4$

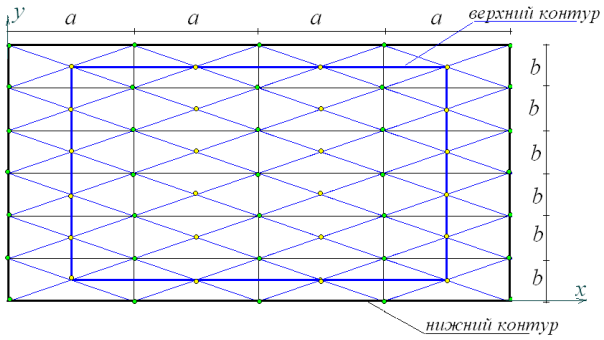


Рисунок 3. Ферма в плане, $n = 4,\ m = 6$

Опора – сферический шарнир – моделируется тремя стержнями, прикрепленными к узлу 1. Координаты концов этих стержней, закрепленных на земле, имеют вид:

$$\bar{r}_{k+1} = [x_1, y_1, z_1 - 1],\ \ \bar{r}_{k+2} = [x_1, y_1 - 1, z_1],\ \ \bar{r}_{k+3} = [x_1 - 1, y_1, z_1],\ k = N + K.$$

Цилиндрический шарнир моделируется двумя жесткими стержнями, закрепленными в узле с номером $n+1$

$$\bar{r}_{k+4} = [x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} - 1],\ \ \bar{r}_{k+5} = [x_{n+1}, y_{n+1} - 1, z_{n+1}],$$

И наконец, два отдельных вертикальных стержня по двум другим углам конструкции (узлы $K-n$ и K) имеют следующие координаты концов:

$$\bar{r}_{k+6} = [x_{K-n}, y_{K-n}, z_{K-n} - 1],\ \ \bar{r}_{k+7} = [x_K, y_K, z_K - 1].$$

Геометрия конструкции задается также порядком соединения стержней и узлов. Для этого каждый из n_s стержней представляется условным вектором $\bar{q}_i$, $i = 1,...,n_s$, координаты которого – номера узлов, к которым он присоединен. Если проводить аналогию с теорией графов из дискретной математики, то такой способ соответствует заданию списка ребер графа. В данном случае для вычисления направляющих косинусов усилий, входящих в уравнения равновесия, этот способ наиболее удобен. Выбранные направления стержней-векторов не влияют на усилия и знаки усилий в стержнях. Вектора стержней куполов, опирающихся на нижний контур, имеют вид

$$\bar{q}_k = [k + j - 1, k + K],\qquad \bar{q}_{k+N} = [k + j, k + K],$$
$$\bar{q}_{k+2N} = [k + j + 1 + n, k + K],\ \ \bar{q}_{k+3N} = [k + j + n, k + K],$$
$$k = i + (j-1)n,\ \ i = 1,...,n,\ \ j = 1,...,m.$$

Продольные стержни решетки нижнего контура:

$$\bar{q}_{k+4N} = [k+j-1, k+j],\ k = i+(j-1)n,\ \ i = 1,...,n,\ j = 1,...,m+1,$$

поперечные стержни:

$$\bar{q}_{k+5N} = [k-n, k+1],\ k = i+(j-1)(n+1)+n,\ i = 1,...,n+1,\ j = 1,...,m.$$

Верхний контур, соединяющий вершины крайних пирамид, соответствует векторам стержней

$$\bar{q}_{k+6N} = [K+i, K+i+1],\ k = i+n+m,$$

$$\bar{q}_{k+6N} = [i+2mn+m+1, i+2mn+m+2],\ k = i+2n+m-1,\ i = 1,...,n-1,$$

и

$$\bar{q}_{k+6N} = [N+in+m+2, K+in+1],\ k = i+3n+m-2,$$

$$\bar{q}_{k+6N} = [in+K, in+K+n],\ k = i+3n+2m-3,\ i = 1,...,m-1.$$

Семь опорных стержней кодируются следующими векторами:

$$\bar{q}_{n_s+i} = [1, K+N+i],\ i = 1,2,3,$$

$$\bar{q}_{n_s+i+3} = [n+1, K+N+i+3],\ i = 1,2,$$

$$\bar{q}_{n_s+6} = [K-n, K+N+6],\ \ \bar{q}_{n_s+7} = [K, K+N+7].$$

Решение

Алгоритм составления системы уравнений метода вырезания узлов основан на вычислении направляющих косинусов усилий, вычисляемых по заданным координатам, и организации их записи в матрицу G [13–16]. Уравнения равновесия сводятся к системе

$$G\bar{S} = \bar{T}, \tag{2}$$

где $\bar{S}$ – вектор усилий в стержнях, $\bar{T}$ – вектор нагрузок.

Рассмотрим случай четного числа узлов по каждой стороне конструкции: $m = 2m_0$, $n = 2n_0$. При этом в ферме существует геометрически центральный узел решетки нижнего контура, к которому можно приложить вертикальную (вдоль оси z) нагрузку P и проверить прогиб этого узла (рис. 1). Это простой тест проверки деформативности конструкции, позволяющий оценить ее свойства. Значение нагрузки присваивается соответствующей компоненте вектора $\bar{T}$. Центральный узел имеет номер $n_p = 2m_0n_0 + m_0 + n_0 + 1$. Компоненты вектора нагрузок с номерами $3i-2$ соответствуют направлениям силы вдоль оси x, с номерами $3i-1$ – вдоль оси y, а с номерами $3i$ – вдоль оси z. Здесь $i = 1,...,n_u$. Следовательно, имеем: $T_{3n_p} = -P$. Остальные компоненты вектора $\bar{T}$ нулевые. Для уравнений равновесия потребуются проекции стержней-векторов на оси координат:

$$l_{x,i} = x_{q_{i,1}} - x_{q_{i,2}},\ l_{y,i} = y_{q_{i,1}} - y_{q_{i,2}}, l_{z,i} = z_{q_{i,1}} - z_{q_{i,2}}.$$

Матрица направляющих косинусов G имеет компоненты:

$$G_{3q_{i,1}-2,i} = l_{x,i}/l_i,\ G_{3q_{i,1}-1,i} = l_{y,i}/l_i,\ \ G_{3q_{i,1},i} = l_{z,i}/l_i,$$

$$G_{3q_{i,2}-2,i} = -l_{x,i}/l_i,\ G_{3q_{i,2}-1,i} = -l_{y,i}/l_i,\ G_{3q_{i,2},i} = -l_{z,i}/l_i,$$

где $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$. Для решения системы линейных уравнений (2) в символьном виде применим операцию вычисления обратной матрицы, имеющую в системе Maple простой вид

$G^{-1} = 1/G$. С помощью этой операции решение системы получается умножением матрицы на вектор нагрузок $\bar{S} = G^{-1}\bar{T}$. Этот простой прием не требует вызова специализированного пакета **LinearAlgebra** и сокращает время преобразований. Кроме того, при пересчете результатов для другой нагрузки нет необходимости повторного обращения матрицы, что сокращает время преобразований.

Результатом работы программы являются аналитические выражения для усилий в стержнях фермы. Для вычисления прогиба узла, к которому приложена нагрузка, воспользуемся формулой Максвелла – Мора:

$$\Delta = P\sum_{j=1}^{n_s} \frac{S_j^{\,2} l_j}{EF}, \tag{3}$$

где E – модуль упругости стержней; F – площадь сечения стержней (одинаковые для всей конструкции); l_j и S_j – длина *j*-го стержня и усилие в нем от действия единичной силы, направленной вдоль P и приложенной к той же точке. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных, которые предполагаются жесткими: $j = 1,...,\mathrm{n}_s$. Введем обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$. Методом индукции получим относительный прогиб верхнего узла фермы:

$$\tilde{\Delta} = \frac{A_n a^3 + B_m b^3 + C_{n,m} c^3}{16h^2}, \tag{4}$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}$, $A_n = n_0(3 - 4n_0(1 - n_0))$, $B_m = m_0(3 - 4m_0(1 - m_0))$, $C_{n,m} = 2m_0 n_0 - m_0 - n_0 + 1$. Коэффициенты A_n и B_m получены в системе Maple обобщением последовательности 3, 22, 81, 415, 738, 1197, 1816… Для получения общего члена последовательности применялась функция **rgf_findrecur** из пакета **genfunc**, возвращающая рекуррентное уравнение

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

Решение этого уравнения было найдено оператором **rsolve.** Значительно более сложная процедура нахождения коэффициента $C_{n,m}$ состояла из последовательного нахождения коэффициентов $C_{n,1}, C_{n,2}$… (рекурсия по n_0 при фиксированном m_0) с решением всякий раз той же задачи определения соответствующего рекуррентного уравнения, как и при нахождении коэффициентов A_n и B_m с последующим обобщением полученных зависимостей. Для обобщения применялись те же функции **rgf_findrecur** и **rsolve.** При этом использовалось очевидное условие симметрии формул по переменным a, b и m_0, n_0.

Для квадратной в плане фермы ($a = b,\ m = n$) заданного размера боковой стороны ($a = L/n$) зависимость (4) относительного числа панелей n_0 обнаруживает минимум (рис. 4). Начиная с некоторого числа панелей, зависимость становится почти линейной, однако предельный анализ (команда **limit** в системе Maple) асимптоту не находит. Зависимость прогиба от высоты *h* также обнаруживает минимум (рис. 5, размеры в метрах). Точное аналитическое значение для минимума прогиба из условия

$$f(h) = d\bar{\Delta} / dh = 0$$

система Maple находит, однако это выражение (один из корней кубического уравнения) получается весьма громоздким и для практического применения непригодно. Приближенное аналитическое выражение получается разложением в ряд функции с помощью оператора **series**. Корень уравнения, соответствующий минимальному прогибу, имеет вид:

$$h = \frac{L}{n_0}\left(4\sqrt{2}\,n_0^3 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right)n_0^2 + \left(3\sqrt{2} - 4\right)n_0 + 4\right) / \left(48(2n_0^2 - 2n_0 + 1)\right)^{1/4}.$$

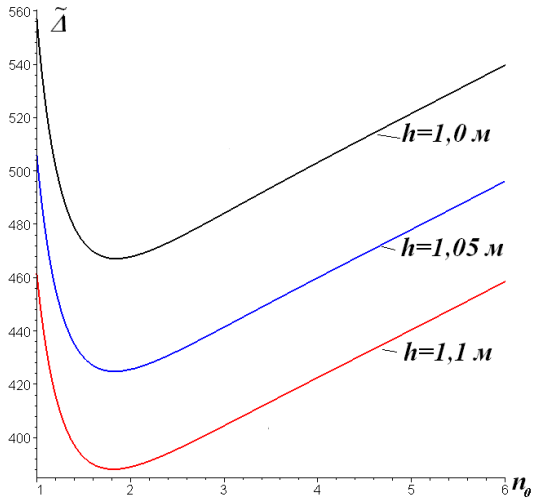


Рисунок 4. $L = 20\,м$

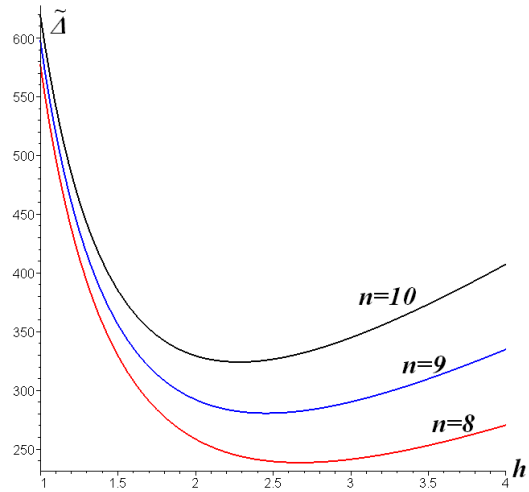


Рисунок 5. $L = 20\,м$

Решение (4) легко обобщается на случай, когда жесткость стержней пирамид (номера этих стержней $i < 4N$) отличается от жесткости стержней верхнего и нижнего контура. В практических задачах, как правило, контуры более жесткие, например, за счет увеличения площади сечений стержней. Пусть для жесткости стержней пирамид имеется следующее выражение: $EF_1 = EF_0 / \mu$, где EF_0 – жесткость стержней основания и $\mu > 1$.

В этом случае из (4) следует:

$$\tilde{\Delta} = \frac{A_n a^3 + B_n b^3 + \mu C_{n,m} c^3}{16h^2}.$$

На рисунке 6 построены кривые зависимости прогиба от числа панелей при фиксированной длине боковой стороны *a = n = L/n*. Как и для случая стержней одинаковой жесткости минимум приходится на те значения параметров фермы, при которых она имеет сравнительно небольшую высоту. В этом случае высота пирамидальных куполов фермы равна 1 м при основании около 5 м. Минимум прогиба линейно зависит от μ, увеличиваясь для менее жестких стержней пирамид. Значение же числа панелей, соответствующее минимуму, почти не растет.

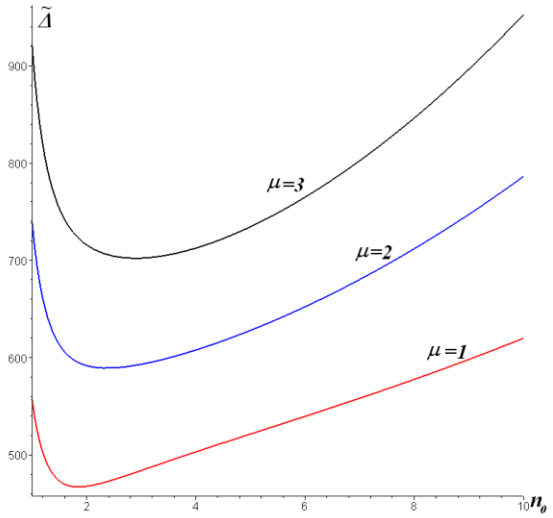


Рисунок 6. $L = 20\,м,\ h = 1\,м$

Выводы

Рассмотрена пространственная конструкция фермы, моделирующая прямоугольное в плане покрытие на четырех опорах. Удалось предложить такую схему фермы, при которой статическая определимость не противоречит четырем вертикальным опорам по углам фермы. Найдено и проанализировано аналитическое решение для усилий в стержнях, а также приведена формула для прогиба при произвольных боковых размерах, числе панелей и высоте фермы. Применялся индуктивный метод, отличающийся от ранее разработанного для плоских и пространственных балочных ферм наличием двух независимых переменных. В качестве необходимого инструмента при решении задачи задействована система компьютерной математики Maple. Аналитические формулы для прогиба проанализированы на минимум, построены соответствующие графики.

Все полученные результаты можно обобщить на другие нагрузки, расположения опор и ориентацию самой фермы. Например, решение не изменится, если нижний плоский контур будет вверху, а купольные надстройки обратятся вниз. Последнее будет иметь применение для устройства крыш зданий и сооружений.

Литература

1. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Micro-architectured cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // Journal of Applied Mathematical and Mechanics. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
2. Ramaswamy G.S., Eekhout M., Suresh G.R. Analysis, Design and Construction of Steel Space Frames. Thomas Telford, 2002. 242 p.
3. Narayanan, S. Space Structures: Principles and Practice. Brentwood, Essex, U.K.: Multi-Science Publishing Company, 2006. 844 p.
4. Chilton J. Space Grid Structures. Woburn, MA, U.S.A. Architectural Press, 2000. 180 p.
5. Gasbarria P., Montia R., Sabatinib M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties // Acta Astronautica. 2014. Vol. 93. Pp. 252–265.
6. Camp C. V., Farshchin M. Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization // Engineering Structures. 2014. Vol. 62–63. Pp. 87–97.
7. Lebee A., Sab K. Homogenization of a space frame as a thick plate: Application of the Bending-Gradient theory to a beam lattice // Computers & Structures. 2013. Vol. 127. Pp. 88–101.
8. Stottrup-Andersen U. Masts and Towers // Proceedings of the IASS Symposium, Valencia Evolution and Trnds in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures 28 September – 2 October 2009, Universidad Politecnica de Valencia, Spain. 1997. Pp. 127–138.
9. Zhang R., Guo X., Liu Y., Leng J. Theoretical analysis and experiments of a space deployable truss structure // Composite Structures. 2014. Vol. 112. Pp. 226–230.
10. Клячин А.З. Металлические решетчатые пространственные конструкции регулярной структуры. Екатеринбург: Диамант, 1994. 276 с.
11. Марутян А.С., Григорьян М.Б., Глухов С.А. Пространственные решетчатые несущие конструкции (модули типа «Пятигорск»-2) // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №1. С. 64–71.
12. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
14. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49–53.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. №5. С. 5–8.
17. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. Composite Structures. 1997. Vol. 39. No. 3-4. Pp. 255–262.
18. Голоскоков Д.П. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. №1. С. 8–14.
19. Алпатов В.Ю., Холопов И.С. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций // Металлические конструкции. 2009. Т. 15. №1. С. 47–57.
20. Kaveh A., Sheikholeslami R., Talatahari S., Keshvari-Ilkhichi M. Chaotic swarming of particles: A new method for size optimization of truss structures // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 67. Pp. 136–147.
21. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60–63.
22. Kociecki M., Adeli H. Two-phase genetic algorithm for topology optimization of free-form steel space-frame roof structures with complex curvatures // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2014. Vol. 32. Pp. 218–227.

Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия
Тел. моб.: +7(916)9055994; эл. почта: mpei2004@yandex.ru

© Кирсанов М.Н., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.5

Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко

Д.т.н., заведующий кафедрой В.В. Лалин;
студент М.О. Беляев,
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Аннотация. Проблема верификации программных комплексов для расчета конструкций в последнее время стала важной составляющей общего комплекса строительной науки. Одной из широко используемых верификационных задач является геометрически нелинейная задача об изгибе консольного стержня силой.

При этом в качестве аналитического решения используется решение, полученное для частного случая стержня Кирхгофа (без учета податливости стержня на растяжение и сдвиг), в то время как в большинстве современных программных комплексов используется стержень Коссера – Тимошенко, в котором учитываются все жесткости: на изгиб, на сдвиг и на растяжение. В связи с этим представляет интерес получение модельного решения для стержня Коссера – Тимошенко, которое можно было бы использовать в процедуре верификации программных комплексов.

В данной работе приведено решение задачи об изгибе геометрически нелинейного консольного стержня по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко с последующим сравнением полученных результатов. Полученные решения могут быть использованы в верификационных тестах различных программных комплексов.

Ключевые слова: теория Коссера – Тимошенко; теория Кирхгофа; геометрически нелинейный стержень; метод продолжения по параметру; верификационный тест

Введение

Проблема верификации программных комплексов для расчета конструкций в последнее время стала важной составляющей общего комплекса строительной науки. Ведущие мировые компании, разрабатывающие промышленные программные комплексы для расчета конструкций, публикуют отчеты, содержащие постановку и решение верификационных задач [1–3].

В 2009 году Научный совет РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре» принял «Положение о верификации программных средств, применяемых при определении напряженно-деформированного состояния, оценке прочности и деформативности конструкций и сооружений». За прошедшие годы несколько программных комплексов прошли процедуру верификации и получили свидетельство РААСН.

В качестве верификационного теста широко используется геометрически нелинейная задача об изгибе консольного стержня силой. В настоящее время существует только аналитическое решение, полученное для частного случая стержня Кирхгофа, когда пренебрегают податливостью стержня на растяжение и сдвиг [5–10]. Однако в современных программных комплексах используется (особенно в геометрически нелинейных задачах) стержень Коссера – Тимошенко, в котором учитываются все жесткости: на изгиб, на сдвиг и на растяжение [10–20]. Это обусловливает необходимость получения модельного решения для стержня Коссера – Тимошенко, которое можно было бы использовать в процедуре верификации программных комплексов.

В цели данного исследования входит сравнение результатов, полученных по двум теориям: Кирхгофа и Коссера – Тимошенко. На основании численных результатов были установлены расхождения в решениях, полученных по разным теориям. Также были получены решения, которые могут быть использованы в верификационных тестах различных программных комплексов.

Постановка задачи

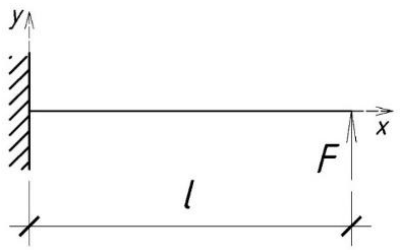


Рисунок 1. Расчетная схема

В работе рассматривается плоская геометрически нелинейная задача деформирования упругих стержней [17, 21] с учетом деформаций растяжения, сдвига и изгиба. Изгиб первоначально прямолинейного стержня, вдоль недеформированной оси которого направлена ось X, проходит в плоскости XY. Консольная балка нагружена «мертвой» силой F, приложенной к свободному концу и направленной вдоль оси Y (рис. 1). Понятие «мертвая сила» означает, что сила сохраняет направление и величину при любых деформациях стержня. Положение каждой точки стержня задается лагранжевой координатой s, стержень в отсчетной конфигурации занимает отрезок $0 \leqslant s \leqslant l$, где l – длина недеформированного стержня.

В теории Коссера – Тимошенко с каждой точкой стержня связан ортогональный триэдр единичных векторов (репер) D_i (i = 1, 2, 3), изображенный на рисунке 2. В плоской задаче вектор $\underline{D}_3$, сонаправленный с осью Z, сохраняет свое положение, а поворот векторов $\underline{D}_1, \underline{D}_2$ определяется углом поворота (φ), который имеет смысл угла поворота сечения стержня. В отсчетной конфигурации векторы $\underline{D}_1, \underline{D}_2$ сонаправлены с осями координат X, Y соответственно. Повернутые вектора $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$ показаны на рисунке 3 векторами $\underline{d}_1, \underline{d}_2$.

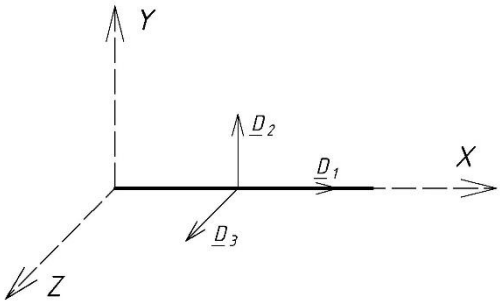


Рисунок 2. Отсчетная ненапряженная конфигурация стержня

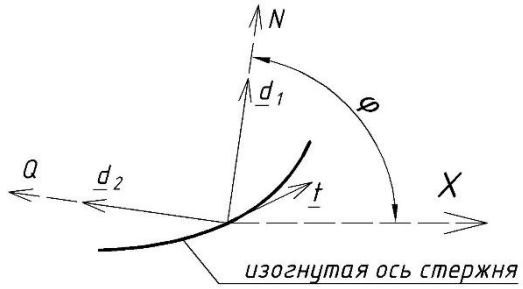


Рисунок 3. Актуальная (деформированная) конфигурация стержня

Положение точек стержня в деформированном положении (актуальная конфигурация) определяется функциями $x(s)$, $y(s)$. Тангенс угла наклона касательной к изогнутой оси стержня равен $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$, $(\ )'$ здесь и далее обозначает производную по s. В теории Коссера – Тимошенко $\frac{y'}{x'} \neq tg\varphi$, что означает учет деформаций сдвига, т. е. угол поворота сечения не совпадает с углом поворота касательной к деформированной оси стержня.

Напряженное состояние стержня определяется функциями: $N(s)$ – продольная сила, $Q(s)$ – перерезывающая сила, $M(s)$ – изгибающий момент. В актуальной конфигурации стержня сила Q направлена вдоль сечения стержня, сила N – перпендикулярно сечению (рис. 3). В теории Коссера – Тимошенко направление силы N не совпадает с направлением касательной к деформированной оси стержня.

Уравнения задачи имеют следующий вид [15]:

а) уравнения равновесия (при отсутствии распределенной силовой и моментной нагрузки):

$$\begin{cases}(N\cdot\cos\varphi - Q\cdot\sin\varphi)' = 0\\ (N\cdot\sin\varphi + Q\cdot\cos\varphi)' = 0\\ M' + x'\cdot(N\cdot\sin\varphi + Q\cdot\cos\varphi) - y'\cdot(N\cdot\cos\varphi - Q\cdot\sin\varphi) = 0\end{cases}; \quad (1)$$

b) выражения деформаций через кинематические неизвестные $x(s), y(s), \varphi(s)$:

$$\begin{cases}\varepsilon = x'\cdot\cos\varphi + y'\cdot\sin\varphi - 1\\ \gamma = -x'\cdot\sin\varphi + y'\cdot\cos\varphi\\ \chi = \varphi'\end{cases}, \quad (2)$$

где ε – деформация растяжения, γ – деформация сдвига, χ – деформация изгиба;

c) физические уравнения (для линейно упругого материала):

$$N = k_1\cdot\varepsilon, \quad Q = k_2\cdot\gamma, \quad M = k_3\cdot\chi, \quad (3)$$

где $k_1 = E\cdot A$ – жесткость при растяжении; $k_2 = \eta\cdot G\cdot A$ – жесткость при сдвиге; $k_3 = E\cdot I$ – жесткость при изгибе; E – модуль Юнга материала стержня; A – площадь поперечного сечения стержня, $G = \frac{E}{2\ \ (1+\nu)}$ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; I – момент инерции поперечного сечения стрежня; η – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня (для круглого и квадратного сечения $\eta = 1$).

В работе [15] доказано, что внутренние усилия N, Q, M и деформации ε, γ, χ являются энергетически сопряженными.

В этой задаче граничные условия имеют следующий вид:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases}(N\cdot\cos\varphi - Q\cdot\sin\varphi)\big|_{s=l} = 0\\ (N\cdot\sin\varphi + Q\cdot\cos\varphi)\big|_{s=l} = F\\ M(l) = 0\end{cases}. \quad (5)$$

Далее сведем задачу (1)–(5) к трем уравнениям относительно трех функций: $x(s)$, $y(s)$, $\varphi(s)$. Интегрируя первое и второе уравнения (1) с учетом первого и второго условий системы (5), получим для всех $s\in[0,l]$:

$$\begin{cases}N(s)\cdot\cos\varphi(s) - Q(s)\cdot\sin\varphi(s) = 0\\ N(s)\cdot\sin\varphi(s) + Q(s)\cdot\cos\varphi(s) = F\end{cases}. \quad (6)$$

Теперь из третьего уравнения системы (1) следует: $M' = -x'\cdot F$. Интегрируя последнее уравнение с учетом третьего условия системы (5), получим:

$$M(s) = (x(l) - x(s))\cdot F. \quad (7)$$

Откуда с учетом (2) и (3) следует:

$$\varphi'(s) = (x(l) - x(s))\cdot\frac{F}{k_3}. \quad (8)$$

Далее из системы (6) выразим N и Q:

$$N = F \cdot \sin\varphi, \qquad Q = F \cdot \cos\varphi. \tag{9}$$

Откуда с учетом (2) и (3) получим:

$$\begin{aligned} x'\cos\varphi + y'\sin\varphi &= 1 + \frac{F}{k_1}\sin\varphi \\ -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi &= \frac{F}{k_2}\cos\varphi \end{aligned}. \tag{10}$$

Выражая из последних двух уравнений x' и y' и добавляя уравнение (8), получим разрешающую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(s) = \left[1 + \frac{F}{k_1}\cdot\sin\varphi(s)\right]\cdot\cos\varphi(s) - \frac{F}{k_2}\cdot\sin\varphi(s)\cdot\cos\varphi(s) \\ y'(s) = \left[1 + \frac{F}{k_1}\cdot\sin\varphi(s)\right]\cdot\sin\varphi(s) + \frac{F}{k_2}\cdot\cos^2\varphi(s) \\ \varphi'(s) = \left[x(l) - x(s)\right]\cdot\frac{F}{k_3} \end{cases}. \tag{11}$$

В теории Кирхгофа, в отличие от теории Коссера – Тимошенко, стержень считается нерастяжимым и деформация сдвига полагается равной нулю. В этом случае из второго уравнения системы (2) при условии $\gamma = 0$ следует: $\frac{y'}{x'} = tg\varphi$, т. е. угол поворота сечения равен углу поворота касательной к деформированной оси стержня и направление продольной силы N совпадает с направлением этой касательной.

Разрешающие уравнения теории Кирхгофа можно получить из уравнений (11), устремляя жесткости на растяжение и сдвиг к бесконечности ($k_1 \to \infty, k_2 \to \infty$):

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\varphi(s) \\ y'(s) = \sin\varphi(s) \\ \varphi'(s) = \left[x(l) - x(s)\right]\cdot\frac{F}{k_3} \end{cases}. \tag{12}$$

Система уравнений (12) хорошо известна [3–5]. Так как она является частным случаем системы (11), то метод решения будет излагаться для более общей системы (11).

Система (11) должна решаться с учетом граничных условий (4) Первые два граничных условия системы (5) были уже использованы, третье граничное условие, выраженное через функцию $\varphi(s)$, имеет вид $\varphi'(l) = 0$. Это условие следует автоматически из третьего уравнения системы (8).

В работе представлено решение более общей задачи (11), (4). Решение по теории Кирхгофа может быть получено при обнулении слагаемых, включающих в знаменателе жесткости на растяжение и на сдвиг, т. к. в данной теории они принимаются стремящимися к бесконечности. Задача (11), (4) очень похожа на задачу Коши, но таковой не является, так как правая часть третьего уравнения системы (11) содержит неизвестную величину $x(l)$.

Численное решение

Перейдем к безразмерным величинам. Введем безразмерные величины s_0, x_0, y_0:

$$s_0 = \frac{s}{l}, x_0 = \frac{x}{l}, y_0 = \frac{y}{l}. \tag{13}$$

Введем безразмерный параметр нагрузки:

$$\omega = \frac{F}{k_3}. \tag{14}$$

Из системы уравнений (11) после перехода к безразмерным параметрам получим систему уравнений (15), где $(\ )'$ обозначает производную по безразмерной величине s_0:

$$\begin{cases} x_0'(s_0) = \left[1 + \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \sin\varphi(s_0)\right] \cdot \cos\varphi(s_0) - 2 \cdot (1+\nu) \cdot \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \sin\varphi(s_0) \cdot \cos\varphi(s_0) \\ y_0'(s_0) = \left[1 + \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \sin\varphi(s_0)\right] \cdot \sin\varphi(s_0) + 2 \cdot (1+\nu) \cdot \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \cos^2\varphi(s_0) \\ \varphi'(s_0) = \left[x_0(1) - x_0(s_0)\right] \cdot \omega \end{cases}, \tag{15}$$

где ν – коэффициент Пуассона; λ – гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{l}{r}, \tag{16}$$

где r – радиус инерции сечения стержня.

Решение нелинейной системы уравнений (15) сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения, получаемого путем дифференцирования третьего уравнения системы по s_0, и подстановки первого уравнения в получившееся равенство:

$$\varphi''(s_0) = A_1 \cdot \cos\varphi(s_0) + A_2 \cdot \sin\varphi(s_0) \cdot \cos\varphi(s_0), \tag{17}$$

где $A_1 = -\omega$; $A_2 = (+2 \cdot \nu) \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2}$.

Из граничных условий (4), (5) после перехода к безразмерным параметрам получим граничные условия:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0. \tag{18}$$

Нелинейная краевая задача (17), (18) решается методом продолжения по параметру [23–26]. Введем параметр ξ. Уравнение (17) запишем в виде:

$$\varphi''(s_0) = \xi \cdot \left[A_1 \cdot \cos\varphi(s_0) + A_2 \cdot \sin\varphi(s_0) \cdot \cos\varphi(s_0)\right]. \tag{19}$$

Из уравнения (19) следует, что функция φ становится функцией двух переменных s_0 и ξ:

$$\varphi \equiv \varphi(s_0, \xi). \tag{20}$$

Значение ξ меняется от 0 до 1 ($0 \le \xi \le 1$). При $\xi = 1$ функция (20) очевидно является решением исходного уравнения (17). При $\xi = 0$ решение уравнения (19) легко найти прямым интегрированием:

$$\varphi''(s_0, 0) = 0. \tag{21}$$

После интегрирования уравнения (21) выражение для функции φ принимает вид:

$$\varphi(s_0,0) = C_1 + C_2 \cdot s_0, \tag{22}$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Из граничных условий (18) получаем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \tag{23}$$

При учете (23) выражение (22) принимает вид:

$$\varphi(s_0,0) = 0. \tag{24}$$

Т. е. при $\xi = 0$ решение уравнения (19) тождественно равно 0.

Таким образом, нам нужно исходя из известного нулевого решения при $\xi = 0$ найти решение уравнения (19) при $\xi = 1$. Интервал $0 \le \xi \le 1$ разбивается на некоторое число промежутков с шагом Δ, таких что:

$$\xi_{i+1} - \xi_i = \Delta, \tag{25}$$

где i – номер узла:

$$0 \le i \le M, \tag{26}$$

где M – число разбиений по ξ.

Множество значений ξ_i запишется в виде:

$$\xi_0 \le \xi_i \le \xi_M, \tag{27}$$

при этом:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_M = 1. \tag{28}$$

Для каждого узла i находим функцию $\varphi(s_0, \xi_i)$. Искомое значение функции $\varphi(s_0, \xi)$ соответствует $\xi_M = 1$, т. е. необходимо найти значение $\varphi(s_0,1)$. Для нахождения решений в интервале $0 < \xi_i \le 1$ введем функцию $z(s_0, \xi)$ такую, чтобы

$$\frac{d\varphi(s_0,\xi)}{d\xi} \equiv z(s_0,\xi); \left(\frac{d\varphi(s_0,\xi)}{d\xi}\right)'' = z''(s_0,\xi). \tag{29}$$

Дифференцируя (19) по ξ и учитывая (29), найдем уравнение для $z(s_0, \xi)$:

$$z''_{s_0}(s_0,\xi) = B(s_0) + \xi \cdot z \cdot D(s_0), \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} B(s_0) &= A_1 \cdot \cos\varphi(s_0) + A_2 \cdot \sin\varphi(s_0) \cdot \cos\varphi(s_0) \\ D(s_0) &= -A_1 \cdot \sin\varphi(s_0) + A_2 \cdot \cos^2\varphi(s_0) - A_2 \cdot \sin^2\varphi(s_0) \end{aligned}. \tag{31}$$

Найдем граничные условия для функции $z(s_0, \xi)$ с учетом (18):

$$\begin{cases} \varphi(0,\xi) = 0 \Rightarrow \dfrac{d\varphi(0,\xi)}{d\xi} = 0 \Rightarrow z(0,\xi) = 0 \\ \varphi'_{s_0}(1,\xi) = 0 \Rightarrow \dfrac{d\varphi'_{s_0}(1,\xi)}{d\xi} = 0 \Rightarrow z'(1,\xi) = 0 \end{cases}. \tag{32}$$

Во втором уравнении системы (32) производная $z'(1,\xi)$ берется по s_0.

Краевая задача (30), (32) для каждого значения ξ решается методом конечных разностей [12, 27]. Разбиваем отрезок $0 \le s_0 \le 1$ на некоторое число промежутков с шагом h таким, что

$$s_{0_{j+1}} - s_{0j} = h, \tag{33}$$

где j – номер узла:

$$0 \le j \le N, \tag{34}$$

где N – число разбиений по s_0.

Получим систему уравнений для нахождения значений $z(s_{0j},\xi)$ в каждом j-м узле. Далее будем записывать обозначения функций сокращенно:

$$z(s_{0j},\xi) \equiv z_j, \quad B(s_{0j}) \equiv B_j, \quad D(s_{0j}) \equiv D_j. \tag{35}$$

Используем конечно-разностные выражения для производных [20]:

$$z''_j = \frac{z_{j-1} - 2\cdot z_j + z_{j+1}}{h^2}, \quad z'_j = \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{2\cdot h}. \tag{36}$$

Запишем уравнение (30) с учетом (36):

$$z_{j-1} - (2 + \xi\cdot h^2\cdot D_j)\cdot z_j + z_{j+1} = h^2\cdot B_j. \tag{37}$$

В выражении (37) появляется законтурная точка $j = N+1$, не имеющая физического смысла. Эта точка будет исключена при учете граничных условий. Запишем систему уравнений (37) для произвольного числа разбиений по s_0:

$$\begin{array}{c} j=1 \\ j=2 \\ \dots \\ j=N \end{array} \begin{cases} z_0 - (2+\xi_i\cdot h^2\cdot D_1)\cdot z_1 + z_2 = h^2\cdot B_1 \\ z_1 - (2+\xi_i\cdot h^2\cdot D_1)\cdot z_2 + z_3 = h^2\cdot B_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{N-1} - (2+\xi_i\cdot h^2\cdot D_N)\cdot z_N + z_{N+1} = h^2\cdot B_N \end{cases}. \tag{38}$$

Учитывая граничные условия (32), упростим систему уравнений (38):

$$\begin{gathered} z(0,\xi_i) = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \\ z'(1,\xi_i) = 0 \Rightarrow z'_N = \frac{z_{N+1} - z_{N-1}}{2\cdot h} = 0 \Rightarrow z_{N+1} = z_{N-1} \end{gathered}. \tag{39}$$

Подставляя выражения (39), запишем систему (38) в новом виде:

$$\begin{array}{c} j=1 \\ j=2 \\ \dots \\ j=N \end{array} \begin{cases} -(2+\xi_i\cdot h^2\cdot D_1)\cdot z_1 + z_2 = h^2\cdot B_1 \\ z_1 - (2+\xi_i\cdot h^2\cdot D_1)\cdot z_2 + z_3 = h^2\cdot B_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\cdot z_{N-1} - (2+\xi_i\cdot h^2\cdot D_N)\cdot z_N = h^2\cdot B_N \end{cases}. \tag{40}$$

Решаем систему уравнений (40) для каждого значения ξ_i с учетом (26). По найденным значениям z_i, пользуясь определением (29), находим приближенные значения искомой функции $\varphi(s_0,\xi)$:

$$\varphi(s_{0j},\xi_{i+1}) \cong \varphi(s_{0j},\xi_i) + z(s_{0j},\xi_i)\cdot\Delta. \qquad (41)$$

На первом шаге при $i=0$ известно решение (24) для $\varphi(s_{0j},\xi_0)$. Имея значения функции $\varphi(s_{0j},\xi_0)$, найдем выражения $B(s_{0j})$, $D(s_{0j})$ из формул (31). Зная данные значения и подставив их в систему (40), найдем решения данной системы $z(s_{0j},\xi_0)$. Используя выражение (41), найдем значение функции $\varphi(s_{0j},\xi_1)$. Теперь нам известны значения функции для второго шага при $i=1$: $\varphi(s_{0j},\xi_1)$. Повторяем выше описанные действия для второго шага при $i=1$. Используя полученные значения, находим значения выражений $B(s_{0j})$, $D(s_{0j})$ из формул (31). Подставляем полученные значения в систему (40) и находим ее решения $z(s_{0j},\xi_1)$. Из выражения (41) находим значения функции $\varphi(s_{0j},\xi_2)$. Теперь нам известны значения функции для второго шага при $i=2$: $\varphi(s_{0j},\xi_2)$. Имея данные значения и используя приведенный выше алгоритм, находим значения функции $\varphi(s_{0j},\xi_i)$ для каждого шага i при заданном числе разбиений по ξ (т. е. для $0 \le i \le M$). Искомое решение для угла поворота φ будет найдено при $i=M$:

$$\varphi(s_{0j}) \equiv \varphi(s_{0j},\xi_M). \qquad (42)$$

Координаты точек стержня в деформированном состоянии после перехода к безразмерным величинам $x_0(s_0)$, $y_0(s_0)$ определяются из первых двух дифференциальных уравнений системы (15) по методу Рунге – Кутты [21, 25] по имеющимся значениям угла поворота φ (42):

$$\begin{aligned} x_0(s_{0j+2}) &= x(s_{0j}) + \frac{h}{6}\cdot\left[t_1(s_{0j}) + 2\cdot\left[t_2(s_{0j+1}) + t_3(s_{0j+1})\right] + t_4(s_{0j+2})\right], \\ y_0(s_{0j+2}) &= y(s_{0j}) + \frac{h}{6}\cdot\left[t_1(s_{0j}) + 2\cdot\left[t_2(s_{0j+1}) + t_3(s_{0j+1})\right] + t_4(s_{0j+2})\right] \end{aligned} \qquad (44)$$

где значения параметров $t_1(s_{0j})$, $t_2(s_{0j+1})$, $t_3(s_{0j+1})$, $t_4(s_{0j+2})$ определяются из системы (15) как функции $x_0'(s_0)$, $y_0'(s_0)$ для различных значений s_0. Для функции $x_0(s_0)$ они примут вид:

$$t_1(s_{0j}) = x_0'(s_{0j}), \quad t_2(s_{0j+1}) = t_3(s_{0j+1}) = x_0'(s_{0j+1}), \quad t_4(s_{0j+2}) = x_0'(s_{0j+2}). \qquad (45)$$

Аналогично для функции $y_0(s_0)$:

$$t_1(s_{0j}) = y_0'(s_{0j}), \quad t_2(s_{0j+1}) = t_3(s_{0j+1}) = y_0'(s_{0j+1}), \quad t_4(s_{0j+2}) = y_0'(s_{0j+2}). \qquad (46)$$

Имея значения угла поворота φ в каждой точке s_{0j} (42), можем найти значения параметров t_1, t_2, t_3, t_4 для каждого шага по s_0, используя формулы (45), (46). Далее, подставив полученные значения в уравнения (44), находим искомые значения $x_0(s_{0j})$, $y_0(s_{0j})$. Данный способ позволяет определить $x_0(s_0)$, $y_0(s_0)$ для каждого второго узла, т. е. можно найти $x_0(s_{0j+2})$, $y_0(s_{0j+2})$.

Точность получаемых результатов зависит от выбранного шага Δ, определяющего число разбиений M интервала $0 \le \xi \le 1$, и от выбранного шага h, определяющего число разбиений N интервала $0 \le s_0 \le 1$.

Для достижения достаточной точности задача многократно решалась с уменьшением шагов Δ и h до получения устойчивых результатов вычислений (четыре значащих цифры).

Сначала проводились сгущения шагов по ξ с уменьшением величины Δ. Анализировались полученные значения угла поворота $\varphi(s_0,\xi)$. Число разбиений принималось равным M, когда расхождение полученных значений начиналось с пятой значащей цифры. Затем по приведенному выше алгоритму сгущались шаги по s_0 с уменьшением величины h и анализировались значения угла поворота $\varphi(s_0,\xi)$ и координаты $x_0(s_0)$, $y_0(s_0)$. Число разбиений принималось равным N, когда расхождение полученных значений начиналось с пятой значащей цифры.

В результате проведенных численных экспериментов было установлено, что для обеспечения требуемой точности при максимальном значении параметра нагрузки ω необходимо принять:

$$M = 4500, \quad N = 1000 . \tag{47}$$

В ходе исследования были получены результаты по двум теориям: теории Коссера – Тимошенко и теории Кирхгофа. Для теории Кирхгофа задача решалась так же, как и для теории Коссера – Тимошенко, но без учета слагаемых, включающих жесткости на растяжение и сдвиг.

Результаты

Для сравнения существующих решений по теории Кирхгофа с решениями, полученными в данном исследовании по этой же теории, была решена тестовая задача [7]: длина стержня $l = 10$ м, площадь сечения $A = 0{,}05$ м², момент инерции $I = 5\cdot 10^{-6}$ м⁴, модуль упругости $E = 2\cdot 10^{7}$ Т/м². Нагрузка, приложенная на конце стержня, $F = 4$ Т. Сравнивались значения перемещений концевой точки стержня $y(s)$ и $x(s)$. Значения перемещений и погрешности сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Сравнение результатов решений по теории Кирхгофа

Искомая величина	Существующее решение	Значение, полученное в исследовании	Погрешность, %
$x(L), м$	3,29	3,289	0,0305
$y(L), м$	6,7	6,699	0,01493

Полученные погрешности малы, что говорит о точности метода решения, использованного в исследовании.

Задача об изгибе консольного стержня «мертвой» силой, приложенной к свободному концу стержня, решалась по двум теориям: теории Коссера – Тимошенко и теории Кирхгофа. В задаче рассматривался стальной стержень круглого сечения диаметром $D = 2$ см и длиной $l = 1$ м. Модуль упругости для стали был принят $E = 196{,}2\cdot 10^{9}$ Па, коэффициент Пуассона – $\nu = 0{,}28$. На рисунке 4 представлен вид изогнутой оси стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω.

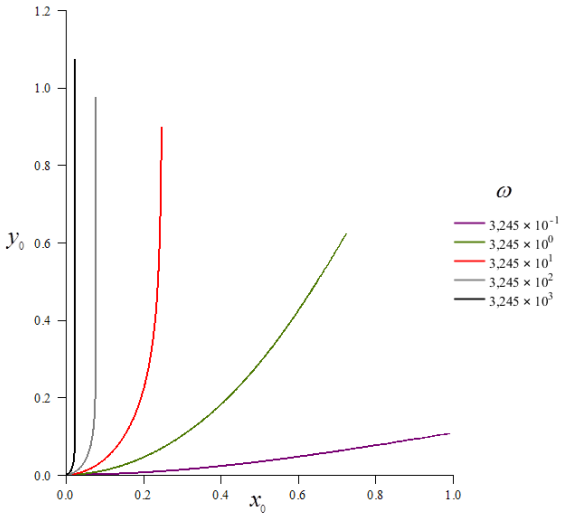


Рисунок 4. Изогнутая ось

На рисунке 5 представлен график изменения углов поворота φ по длине стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω.

На рисунках 6–8 представлены соответственно графики зависимостей деформации растяжения ε, деформации сдвига γ и деформации изгиба χ от s_0 при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω.

При относительно малых значениях ω деформации сдвига и растяжения малы. Для $\omega = 3{,}245 \cdot 10^1$ значение деформации растяжения ε составляет 0,000811, а деформации сдвига γ – 0,002077. При $\omega = 3{,}245 \cdot 10^3$ максимальные значения деформаций составляют $\varepsilon_{\max} = 0{,}08111$, $\gamma_{\max} = 0{,}2077$.

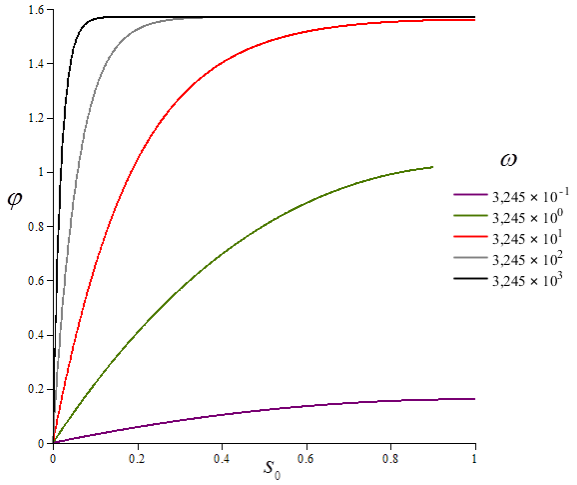


Рисунок 5. Углы поворота сечения φ

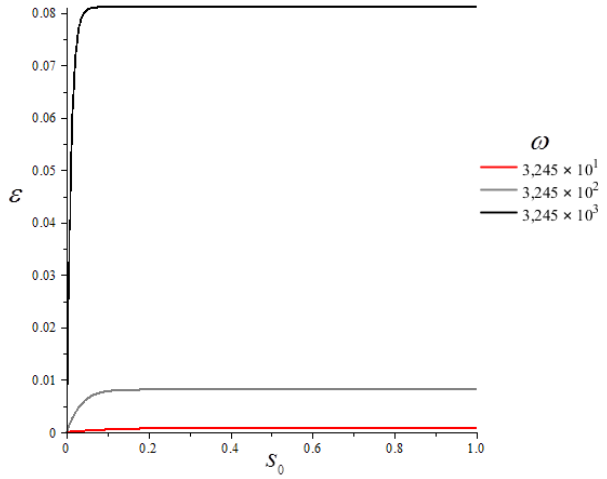


Рисунок 6. Деформация растяжения ε

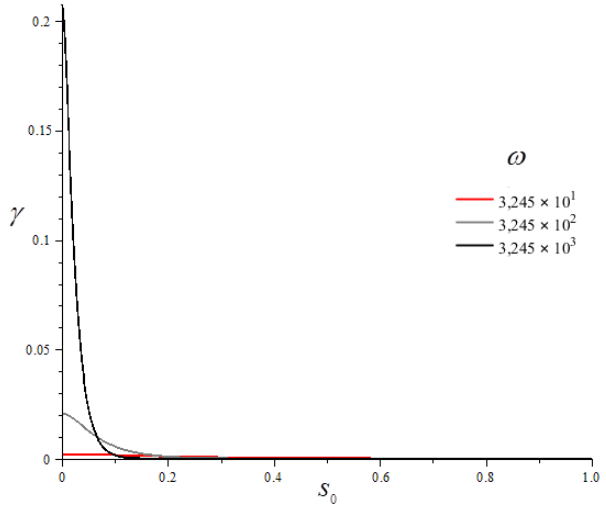


Рисунок 7. Деформация сдвига γ

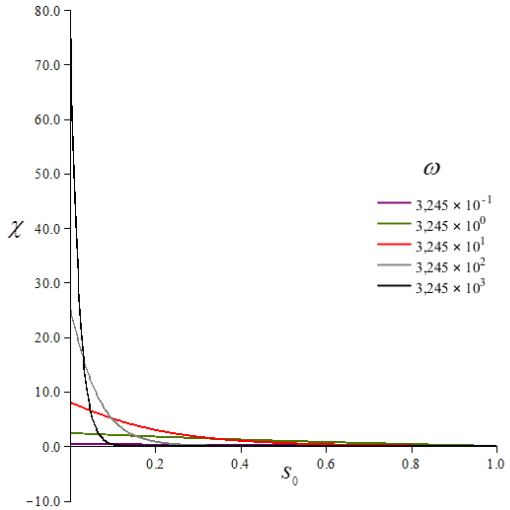


Рисунок 8. Деформация изгиба χ

Приведенные результаты показывают, что резкое изменение НДС происходит на участке стержня вблизи заделки. На участке от $0{,}1l$ до l стержень находится практически в однородном НДС: деформация растяжения постоянна, деформации сдвига и изгиба практически равны нулю.

Было проведено сравнение результатов, полученных для теорий Коссера и Кирхгофа. В качестве характеристики расхождения J было взято процентное отношение между координатами точек $y_0(s_0)$, найденными по теории Коссера $y_{K0}(s_0)$ и теории Кирхгофа $y_{\Pi 0}(s_0)$ (табл. 2):

$$J = \frac{y_{K0}(s_0) - y_{\Pi 0}(s_0)}{y_{K0}(s_0)} \cdot 100\% \quad (48)$$

Аналогично были вычислены расхождения между координатами точек $x_0(s_0)$. Абсолютные значения расхождений B приведены в таблице 3.

$$B = \frac{x_{K0}(s_0) - x_{\Pi 0}(s_0)}{y_{K0}(s_0)} \cdot 100\% \quad (49)$$

Таблица 2. Зависимость J от s_0 и ω

s_0	ω				
	$3{,}245 \cdot 10^{-1}$	$3{,}245 \cdot 10^{0}$	$3{,}245 \cdot 10^{1}$	$3{,}245 \cdot 10^{2}$	$3{,}245 \cdot 10^{3}$
	J, %				
0,001	6,058	8,112	20,54	45,19	73,20
0,01	1,277	1,741	4,964	14,50	36,84
0,1	0,1331	0,1834	0,5588	1,996	10,20
0,2	0,06900	0,09489	0,2958	1,315	8,792
0,4	0,03714	0,05019	0,1716	1,038	8,134
0,6	0,02680	0,03536	0,1362	0,9559	7,921
0,8	0,02191	0,02824	0,1204	0,9165	7,816
1,0	0,01926	0,02429	0,1117	0,8934	7,753

Таблица 3. Зависимость B от s_0 и ω

s_0	ω				
	$3{,}245 \cdot 10^{-1}$	$3{,}245 \cdot 10^{0}$	$3{,}245 \cdot 10^{1}$	$3{,}245 \cdot 10^{2}$	$3{,}245 \cdot 10^{3}$
	B, %				
0,001	$4{,}075 \cdot 10^{-7}$	$2{,}977 \cdot 10^{-5}$	$1{,}016 \cdot 10^{-3}$	0,03186	0,9651
0,01	$2{,}032 \cdot 10^{-6}$	$1{,}483 \cdot 10^{-4}$	$5{,}021 \cdot 10^{-3}$	0,1526	4,167
0,1	$1{,}970 \cdot 10^{-5}$	$1{,}410 \cdot 10^{-3}$	0,04121	0,7517	9,232
0,4	$7{,}048 \cdot 10^{-5}$	$4{,}505 \cdot 10^{-3}$	0,07876	0,8508	9,259
0,8	$1{,}189 \cdot 10^{-4}$	$6{,}605 \cdot 10^{-3}$	0,08396	0,8511	9,256
1,0	$1{,}350 \cdot 10^{-4}$	$7{,}207 \cdot 10^{-3}$	0,08443	0,8510	9,2547

При значениях $\omega \le 3{,}245 \cdot 10^{-1}$ расхождения между вертикальными перемещениями становятся меньше 1 % для сечений, удаленных от заделки более чем на $s = 0{,}056$. Так, для $\omega = 3{,}245 \cdot 10^{-1}$ $J \le 1$ % уже при $s = 0{,}014$. При $\omega = 3{,}245 \cdot 10^{3}$ расхождение превышает 7 % по всей длине стержня.

Расхождения между горизонтальными перемещениями малы и не превышают 1 % при $\omega \le 3{,}245 \cdot 10^{2}$ по всей длине стержня.

Также задача решалась для стержня длиной $l = 1$ м при заданных значениях жесткостей на растяжение k_1, на сдвиг k_2 и на изгиб k_3:

$$k_1 = 1.25 \cdot 10^5 (H), \quad k_2 = 4.3 \cdot 10^4 (H), \quad k_3 = 1.25 \cdot 10^3 (H \cdot м^2) \quad (50)$$

На рисунке 9 представлены виды изогнутых осей при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω. Сплошной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Коссера – Тимошенко. Пунктирной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Кирхгофа.

На рисунке 10 представлен график изменения углов поворота φ и угла наклона касательной $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ по длине стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω. Углы поворота сечения φ изображены сплошной линией, углы наклона касательной – пунктирной.

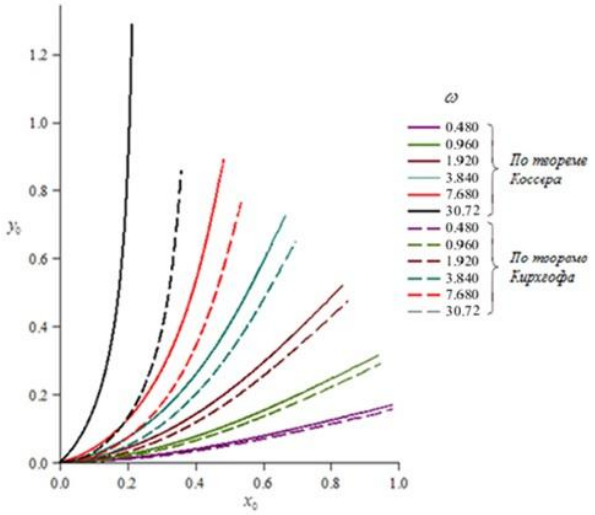


Рисунок 9. Изогнутая ось балки

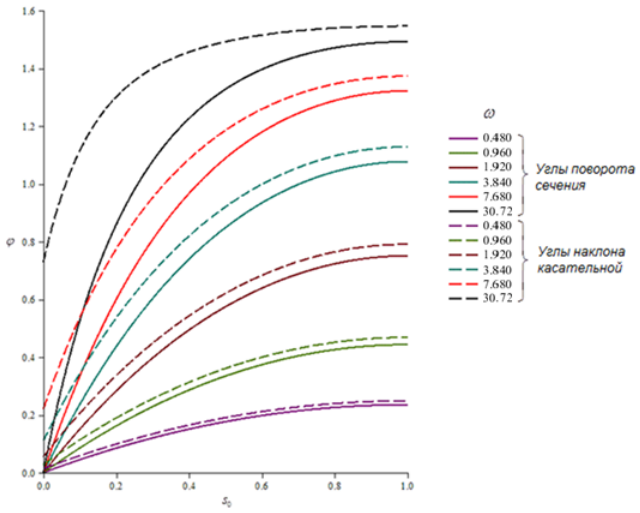


Рисунок 10. Углы поворота сечения φ и углы наклона касательной

При данных жесткостях результаты, полученные по точной теории, значительно отличаются от результатов, полученных по теории Кирхгофа. Значения расхождений J между координатами точек $y_0(s_0)$, полученными по двум теориям, представлены в таблице 4. Значения расхождений B между координатами точек $x_0(s_0)$ представлены в таблице 5.

Таблица 4. Зависимость J от s_0 и ω

s_0	ω					
	0,0048	0,0096	0,0192	0,0384	0,0768	0,3072
	J, %					
0,002	96,73	96,86	97,20	97,76	98,36	99,27
0,02	74,84	75,64	77,77	81,50	85,88	93,31
0,1	37,94	38,97	41,88	47,68	55,89	75,15
0,2	24,22	25,01	27,33	32,21	39,82	61,88
0,4	14,60	15,09	16,58	19,90	25,68	47,25
0,6	10,95	11,28	12,32	14,79	19,54	40,03
0,8	9,113	9,346	10,10	12,09	16,29	36,01
1,0	8,079	8,245	8,826	10,51	14,37	33,51

Таблица 5. Зависимость B от s_0 и ω

s_0	ω					
	0,0048	0,0096	0,0192	0,0384	0,0768	0,3072
	B, %					
0,002	$4{,}320\cdot10^{-4}$	$1{,}656\cdot10^{-3}$	$5{,}883\cdot10^{-3}$	0,01872	0,05442	0,3860
0,02	$4{,}293\cdot10^{-3}$	0,01646	0,05843	0,1857	-0,5396	3,875
0,2	0,04027	0,1536	0,5378	1,663	4,655	34,09
0,4	0,07453	0,2817	0,9624	2,838	7,472	52,50
0,6	0,1028	0,3851	1,282	3,613	9,018	60,96
0,8	0,1253	0,4658	1,520	4,132	9,911	65,07
1,0	0,1421	0,5259	1,694	4,501	10,51	67,57

Из результатов сравнения видно, что разница между вертикальными перемещениями, найденными по разным теориям, превышает 8 % по всей длине стержня.

Различия между горизонтальными перемещениями малы при небольших значениях ω. Для $\omega \le 0{,}0384$ они составляют меньше 5 % по всей длине стержня.

Для выявления зависимости расхождений от размеров поперечного сечения стержня задача решалась для стального стержня длиной $l = 1$ м и круглого сечения диаметром $D = 10$ см. Модуль упругости был принят $E = 196{,}2\cdot10^9$ Па, коэффициент Пуассона – $\nu = 0{,}28$.

На рисунке 11 представлены виды изогнутых осей при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω. Сплошной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Коссера – Тимошенко. Пунктирной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Кирхгофа.

На рисунке 12 представлен график изменения углов поворота φ и угла наклона касательной $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ по длине стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω. Углы поворота сечения φ изображены сплошной линией, углы наклона касательной – пунктирной.

В таблицах 6 и 7 приведены значения расхождений между вертикальными перемещениями J и горизонтальными перемещениями B соответственно.

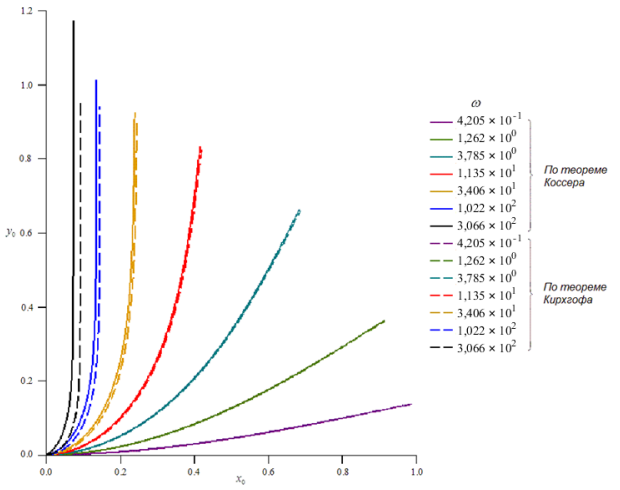


Рисунок 11. Изогнутая ось балки

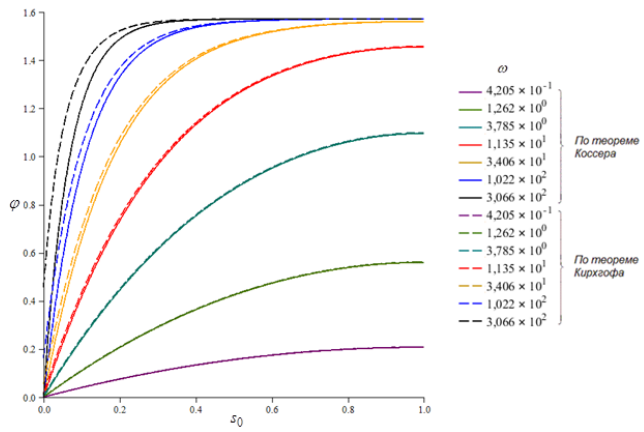


Рисунок 12. Углы поворота сечения φ и углы наклона касательной

Таблица 6. Зависимость J от s_0 и ω

s_0	ω						
	$4{,}205\cdot10^{-1}$	$1{,}262\cdot10^{0}$	$3{,}785\cdot10^{0}$	$1{,}135\cdot10^{1}$	$3{,}406\cdot10^{1}$	$1{,}022\cdot10^{2}$	$3{,}066\cdot10^{2}$
	J, %						
0,002	61,83	63,57	70,05	79,35	86,97	92,18	95,59
0,02	14,01	14,95	19,08	28,02	40,57	55,01	69,72
0,1	3,241	3,490	4,649	7,534	12,70	21,13	35,01
0,2	1,705	1,837	2,458	4,056	7,145	13,11	25,33
0,4	0,9244	0,9910	1,313	2,213	4,283	9,187	20,51
0,6	0,6683	0,7104	0,9282	1,622	3,435	8,034	18,99
0,8	0,5465	0,5755	0,7426	3,054	2,541	7,494	18,24
1,0	0,4805	0,5015	0,6396	1,201	2,840	7,181	17,80

Таблица 7. Зависимость B от s_0 и ω

s_0	ω						
	$4{,}205\cdot10^{-1}$	$1{,}262\cdot10^{0}$	$3{,}785\cdot10^{0}$	$1{,}135\cdot10^{1}$	$3{,}406\cdot10^{1}$	$1{,}022\cdot10^{2}$	$3{,}066\cdot10^{2}$
	B, %						
0,002	$1{,}703\cdot10^{-5}$	$1{,}422\cdot10^{-4}$	$9{,}555\cdot10^{-4}$	$5{,}234\cdot10^{-3}$	0,0271	0,1383	0,6809
0,02	$1{,}693\cdot10^{-4}$	$1{,}412\cdot10^{-3}$	$9{,}468\cdot10^{-3}$	0,05155	0,2639	1,324	6,467
0,1	$8{,}233\cdot10^{-4}$	$6{,}842\cdot10^{-3}$	0,04508	0,2350	1,105	4,822	20,43
0,4	$2{,}941\cdot10^{-3}$	0,02382	0,1411	0,5951	2,115	7,045	25,24
0,6	$4{,}060\cdot10^{-3}$	0,03224	0,1790	0,6766	2,222	7,128	25,28
0,8	$4{,}950\cdot10^{-3}$	0,03873	0,2022	0,7154	2,254	7,140	25,29
1,0	$5{,}616\cdot10^{-3}$	0,0435	0,2192	0,7387	2,267	7,142	25,29

Значительные расхождения между вертикальными перемещениями, превышающие 5 %, для $\omega = 4{,}205\cdot10^{-1}$ сохраняются при $s_0 \le 0{,}064$, а для $\omega = 3{,}406\cdot10^{1}$ сохраняются при $s_0 \le 0{,}32$. При значении безразмерного параметра нагрузки $\omega \ge 1{,}022\cdot10^{2}$ расхождения превышают 7 % по всей длине стержня.

Значительные различия между вертикальными перемещениями вблизи заделки объясняются тем, что значение угла поворота φ мало и значение $\cos\varphi(s)$ во втором уравнении системы (11) близко к 1. Вследствие этого вклад слагаемого, включающего жесткость на сдвиг, оказывается значительным по сравнению с малым значением координаты $y(s)$. При увеличении s значение координаты $y(s)$ резко возрастает и вклад слагаемого с жесткостью k_2 становится незначительным.

На нагруженном конце балки отличия значений координаты $y(s)$, найденных по двум теориям, объясняются в основном влиянием деформации растяжения, которая не учитывается в теории Кирхгофа; причем это отличие появляется только при больших значениях нагрузки.

Расхождения между горизонтальными перемещениями малы и превышают 5 % только при значительных нагрузках $\omega \ge 1{,}022\cdot10^{2}$.

На основании сравнения решений двух задач для стальных стержней $D = 2$ см (табл. 2, 3) и $D = 10$ см (табл. 6, 7) можно сделать вывод о том, что при близких значениях вертикальных перемещений различия межу решениями, найденными по теории Кирхгофа и теории Коссера, возрастают при увеличении поперечного сечения стержня.

Для сравнения результатов, полученных в ходе исследования, с результатами расчетов существующих программных комплексов было проведено решение верификационной задачи, представленной в [15, 16]: круглая труба, внешний диаметр $D = 0{,}2$ м, толщина стенки $t = 0{,}01$ м, длина $l = 10$ м, модуль упругости $E = 100$ МПа. Вертикальная нагрузка, приложенная на конце стержня, $F = 269{,}35$ Н. Сравнение проводилось с тремя программными комплексами конечно-элементного анализа: ANSYS, Abaqus, SOFiSTiK. Значения полученных перемещений, а также величины расхождений представлены в таблице 8.

Таблица 8. Сравнение результатов

	$x(l)$, м			Относительная разница, %	$y(l)$, м			Относительная разница, %
	МКЭ	Точное решение			МКЭ	Точное решение		
		Теория Кирхгофа	Теория Коссера			Теория Кирхгофа	Теория Коссера	
ANSYS	4,449	4,457	4,455	0,1349	8,114	8,103	8,109	0,06162
Abaqus	4,448			0,1574	8,114			0,06162
SOFiSTiK	4,446			0,2024	8,113			0,04930

Полученные результаты подтверждают, что программные комплексы в геометрически нелинейных задачах не реализуют стержень теории Кирхгофа. В рамках теории Коссера – Тимошенко протестированные программные комплексы дают достаточно точные результаты с допустимой при решении инженерных задач погрешностью.

Для проверки результатов и определения точности расчетов различных программных комплексов были составлены таблицы с результатами решений, найденными по теории Кирхгофа и теории Коссера, для двух задач при различных значениях нагрузки. В таблицах приведены значения горизонтальных перемещений $x(l)$, вертикальных перемещений $y(l)$, углов поворота $\varphi(l)$ и растягивающей силы $N(l)$ в концевой точке стержня. Также приведены значения изгибающего момента $M(0)$ и перерезывающей силы $Q(0)$ в заделке.

В двух задачах были заданы следующие параметры: а) $D = 2$ см, $E = 196{,}2 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0{,}28$, $l = 1$ м; б) $D = 10$ см, $E = 196{,}2 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0{,}28$, $l = 1$ м.

В таблицах 9–12 приведены значения, полученные по теории Кирхгофа и Коссера – Тимошенко для двух различных задач.

Таблица 9. Задача а): результаты расчетов по теории Кирхгофа

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
5×10^2	0,9931	0,1069	0,1607	496,6	500,0	80,01
5×10^3	0,7257	0,6225	1,024	3628	5000	4271
5×10^4	0,07889	0,9673	1,571	$12{,}42\cdot10^3$	$5\cdot10^4$	$5\cdot10^4$
5×10^6	0,02622	0,9892	1,571	$1{,}311\cdot10^5$	$5\cdot10^6$	$5\cdot10^6$

Таблица 10. Задача а): результаты расчетов по теории Коссера

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
5×10^2	0,9931	0,1069	0,1607	496,6	500,0	80,01
5×10^3	0,7256	0,6227	1,024	3628	5000	4271
5×10^4	0,07823	0,9760	1,571	$12{,}41\cdot10^3$	$5\cdot10^4$	$5\cdot10^4$
5×10^6	0,02400	1,072	1,571	$1{,}2\cdot10^5$	$5\cdot10^6$	$5\cdot10^6$

Таблица 11. Задача б): результаты расчетов по теории Кирхгофа

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
$4{,}05\times1^5$	0,9886	0,1374	0,2070	$4{,}004\cdot10^5$	$4{,}05\cdot10^5$	$8{,}322\cdot10^4$
$1{,}093\times10^7$	0,4202	0,8226	1,455	$4{,}595\cdot10^6$	$1{,}094\cdot10^7$	$1{,}086\cdot10^7$
$3{,}281\times10^7$	0,2457	0,8984	1,560	$8{,}061\cdot10^6$	$3{,}280\cdot10^7$	$3{,}280\cdot10^7$
$2{,}953\times10^8$	0,09331	0,9621	1,571	$2{,}755\cdot10^5$	$2{,}952\cdot10^8$	$2{,}952\cdot10^8$

Таблица 12. Задача б): результаты расчетов по теории Коссера

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
$4{,}05\times1^5$	0,9885	0,1381	0,2070	$4{,}004\cdot10^5$	$4{,}050\cdot10^5$	$8{,}322\cdot10^4$
$1{,}093\times10^7$	0,4171	0,8326	1,455	$4{,}561\cdot10^6$	$1{,}094\cdot10^7$	$1{,}086\cdot10^7$
$3{,}281\times10^7$	0,2403	0,9246	1,560	$7{,}882\cdot10^6$	$3{,}280\cdot10^7$	$3{,}280\cdot10^7$
$2{,}953\times10^8$	0,07448	1,170	1,571	$2{,}199\cdot10^5$	$2{,}952\cdot10^8$	$2{,}952\cdot10^8$

В приведенных таблицах вертикальные и горизонтальные перемещения, найденные по теориям Коссера – Тимошенко и Кирхгофа, отличаются, тогда как угол поворота φ одинаков для двух теорий. При этом для оценки результатов необходимо помнить, что в теории Кирхгофа угол φ – это угол поворота касательной к оси балки, а в теории Коссера – Тимошенко это угол поворота сечения, отличающийся от угла поворота касательной к оси балки на величину деформации сдвига.

Выводы

В ходе анализа результатов было установлено, что значительные расхождения между вертикальными перемещениями, найденными по теории Коссера и теории Кирхгофа, наблюдаются вблизи заделки и уменьшаются при удалении от нее.

Для всех решаемых задач различия между вертикальными перемещениями, найденными по двум теориям, в точках вблизи заделки значительны и превышают 5 %.

Расхождения между горизонтальными перемещениями имеют обратную тенденцию. Максимальные значения наблюдаются на конце стержня и уменьшаются по мере приближения к заделке.

Расхождения результатов решений, найденных по теории Коссера и теории Кирхгофа, зависят от размера поперечного сечения стержня. При увеличении поперечного сечения происходит возрастание расхождений, что подтверждает применимость теории Кирхгофа только для тонких стержней. Также расхождения зависят от величины нагрузки. При возрастании нагрузки расхождения увеличиваются.

Величина расхождения практически не зависит от материала стержня.

Приведенные в таблицах 9–12 результаты решения двух задач могут быть использованы в качестве тестовых задач при верификации программных комплексов.

Литература

1. Verification Manual. SOFiSTiK AG. Oberschleissheim, 2014. 344 p.
2. Abaqus Benchmarks Manual 6.12. Dassault Systmes Simulia Corp. Providence, 2012. 1738 p.
3. Verification Manual for the Mechanical APDL Application. ANSYS, Inc. Canonsburg, 2009. 1924 p.
4. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
5. Frisch-Fay R. Flexible bars. Butterworth & Co. Sussex, 1962. 220 p.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
7. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. М.: АСВ, 2009. 394 с.

8. Zienkiewicz O.C., Fox D., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics: Seventh Edition. Butterworth–Heinemann: Oxford, 2014. 672 p.
9. Jung P., Leyendecker S., Linn J., Ortiz M. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory – Part 1: static equilibria // International journal for numerical methods in engineering. 2010. Vol. 85. No. 1. Pp. 31–60.
10. Bisshopp K.E., Drucker D.C. Large Deflection of Cantilever Beams // Quarterly of Applied Mathematics. 1945. No. 3. Pp. 272–275.
11. Jung P., Leyendecker S., Linn J., Ortiz M. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory – Part 1: static equilibria // International journal for numerical methods in engineering. 2010. Vol. 85. No. 1. Pp. 31–60.
12. Nayfeh A.H., Pai P.F. Linear and nonlinear structural mechanics. John Wiley & Sons Inc. Mörlenbach, 2004. 754 p.
13. Levy R., Spillers W.R. Analysis of Geometrically nonlinear structures: Second Edition. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2003. 272 p.
14. Pai P.F. Geometrically exact beam theory without Euler angles // International Journal of Solids and Structures. 2011. No. 48. Pp. 3075–3090.
15. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Труды СПбГПУ. 2004. №489. С. 121–128.
16. Лалин В.В, Яваров А.В. Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера // Жилищное строительство. 2013. №5. С. 51–54.
17. Pai P.F. Problems in geometrically exact modeling of highly flexible beams // Thin-walled structures. 2014. Vol. 76. Pp. 66–76.
18. Borse K.N., Dubey S. Geometric Linear And Nonlinear Analysis Of Beam // International Journal of Engineering Research & Technology. 2013. No. 2(7). Pp. 415–423.
19. Auricchio F., Carotenuto P., Reali A. On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2008. No. 45. Pp. 4766–4781.
20. Pai P.F., Chapman R.D., Feng Z. Geometrically exact displacement-based shell theory // Thin-walled structures. 2013. No. 70. Pp. 1–18.
21. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations: Third Edition. New York: Academic Press, 1997. 801 p.
22. Ардентов А. А. Интерфейс для моделирования эластик Эйлера в программной среде Mathematica // Программные системы: теория и приложения. 2012. № 1(10). С. 31–50.
23. Na T.Y. Computational methods in engineering boundary value problems. New York: Academic press, 1979. 320 p.
24. Fung Y.C., Tong P. Classical and Computational solid mechanics. Singapore: World Scientific Pub Co Inc., 2001. 930 p.
25. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. Problems of Nonlinear Deformation: The Continuation Method Applied to Nonlinear Problems in Solid Mechanics. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991. 262 p.
26. Temam R., Miranville A. Mathematical Modeling in Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 356 p.
27. Randall J. LeVeque Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: SIAM, 2007. 357 p.

Владимир Владимирович Лалин, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)3199878; эл. почта: vllalin@yandex.ru

Михаил Олегович Беляев, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)7338709; эл. почта: belyaev-m-o@yandex.ru

© Лалин В.В., Беляев М.О., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.6

Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками

Д.т.н., профессор Н.А. Соловей;
к.т.н., докторант О.П. Кривенко;
ассистент О.А. Малыгина,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Аннотация. Метод решения статических задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких упругих неоднородных оболочек основан на геометрически нелинейных соотношениях трехмерной теории термоупругости и использовании моментной схемы конечных элементов (МСКЭ).

На базе универсального пространственного конечного элемента с дополнительными переменными параметрами разработана единая расчетная модель, учитывающая многослойную структуру материала и геометрические особенности конструктивных элементов неоднородной оболочки: обшивку переменной толщины, ребра и накладки, выемки, каналы и отверстия, изломы срединной поверхности.

В данной работе проведен сравнительный анализ конечноэлементных моделей и результатов расчета тонких упругих оболочек с использованием МСКЭ, программных комплексов ЛИРА и SCAD. На примере пологих изотропных панелей, нагруженных равномерным давлением, изучалось влияние различных ослаблений на их нелинейное деформирование и потерю устойчивости.

Ключевые слова: гибкая оболочка; моментная схема конечных элементов; нелинейное деформирование; потеря устойчивости; ступенчато-переменная толщина; ослабление

Введение

Оболочки, ослабленные каналами, выемками или отверстиями, широко применяются в различных отраслях техники. Наличие в тонких оболочках подобных ослаблений обычно приводит к повышению деформативности, качественному изменению напряженно-деформированного состояния и уменьшению критической нагрузки конструкции [1, 2]. К настоящему времени имеется множество публикаций, посвященных расчету гибких оболочечных систем. За последнее десятилетие количество работ по тематике значительно возросло [1–22]. В них большое внимание уделяется изучению упругих оболочек ступенчато-переменной толщины, в частности тонких оболочек, подкрепленных ребрами [1, 2, 4, 12–15]. Значительно меньше работ посвящено рассмотрению оболочек с различными ослаблениями [1, 2, 22, 23]. В связи с этим вопросы, связанные с разработкой моделей нелинейного деформирования упругих тонких оболочек с каналами и выемками, и проведение на их основе расчетов представляются актуальными и важными.

Следует отметить, что в известных программных комплексах (ПК) недостаточно разработаны общие алгоритмы исследования нелинейного деформирования и устойчивости оболочечных конструкций ступенчато-переменной толщины. Изучение такого класса задач ввиду их сложности и возможной неоднозначности получаемых решений трудно реализовать в виде стандартной вычислительной процедуры. В связи с недостаточностью эталонных нелинейных решений для оболочек ступенчато-переменной толщины также проблемным является подтверждение достоверности и точности получаемых нелинейных решений. В цикле работ [24–27] представлен сравнительный анализ результатов исследования задач нелинейного деформирования и устойчивости различных классов тонких упругих неоднородных оболочек при действии термосиловых нагрузок с использованием моментной схемы конечных элементов (МСКЭ) и с помощью ПК ЛИРА.

1. Постановка задачи

Расчеты оболочек как систем с усложненной структурой вызывают не только вычислительные, но и принципиальные методические трудности. Современное развитие вычислительной техники стимулирует разработку новых уточненных методов исследования оболочек, которые имеют более широкий круг использования, чем традиционные методы расчета отдельных классов оболочек [1–6, 8, 10, 17–22]. Наиболее успешно эта проблема может быть решена методом конечных элементов на основе разработки и применения для неоднородных оболочек универсальных пространственных конечных элементов. Задачами работы являются:

- разработка численного метода решения статических задач геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения широкого класса упругих неоднородных оболочек сложной формы и структуры;
- изучение и оценка возможности использования комплексов ЛИРА и SCAD для решения сложных задач нелинейного деформирования и потери устойчивости тонких оболочек ступенчато-переменной толщины;
- сравнительный анализ результатов исследований нелинейного деформирования и устойчивости упругих оболочек при использовании трех ПК, основанных на МКЭ: разработанный авторами и реализующий МСКЭ, ЛИРА 9.6 и SCAD 11.5, с целью дальнейшего обоснования достоверности решений, получаемых по конечноэлементной методике [1, 2].

1.1. Методика решения геометрически нелинейных задач деформирования и потери устойчивости неоднородных оболочек с использованием МСКЭ

С единых позиций пространственной геометрически нелинейной теории термоупругости в [1, 2] разработана конечноэлементная методика исследования геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения упругих оболочек различной формы и структуры при статическом действии силовых и температурных нагрузок. Использована модель линейно-упругой сплошной среды, свойства которой отвечают обобщенному закону Дюамеля – Неймана, при больших перемещениях и малых деформациях. Применена моментная схема конечных элементов, которая распространена на задачи термоупругого деформирования тонких неоднородных оболочек. Под неоднородностью оболочки понимаются ее геометрические особенности в виде гладко-переменной и ступенчато-переменной толщины, изломы, отверстия и неоднородность материала вдоль толщины и в плане (рис. 1).

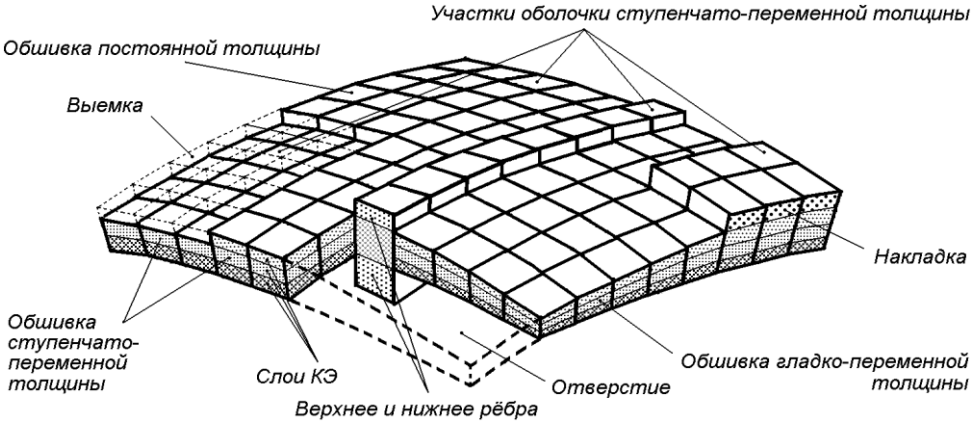


Рисунок 1. Фрагмент конечноэлементной модели оболочки неоднородной структуры

Разработан универсальный пространственный изопараметрический конечный элемент (КЭ) с полилинейными функциями формы (рис. 2, *а*, *б*; где s_k и x^k – сеточные и местные координаты узлов, ось x^1 местной системы координат направлена по толщине и необязательно по нормали к срединной поверхности). Тонкая оболочка по толщине аппроксимируется одним пространственным КЭ. Универсальность КЭ заключается в возможности моделирования геометрических особенностей оболочки через непрерывно-переменную и ступенчато-переменную толщину, изломы срединной поверхности, отверстия, многослойную структуру материала. Особенности НДС тонкой неоднородной оболочки учтены применением двух гипотез: о постоянстве нормальных напряжений обжатия волокон слоев в направлении толщины (более

слабая, чем классическая гипотеза) и о деформируемой прямой. Последняя гипотеза позволяет выполнять стыковку элементов без нарушения совместности по перемещениям и координатам в процессе деформирования. Возможности элемента расширены за счет введения дополнительных переменных параметров. Благодаря такому подходу точно моделируется объем эксцентрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки ребер, накладок, каналов и выемок. На рисунке 2, в на примере участка оболочки с выемками схематически показано моделирование оболочки ступенчато-переменной толщины универсальным КЭ.

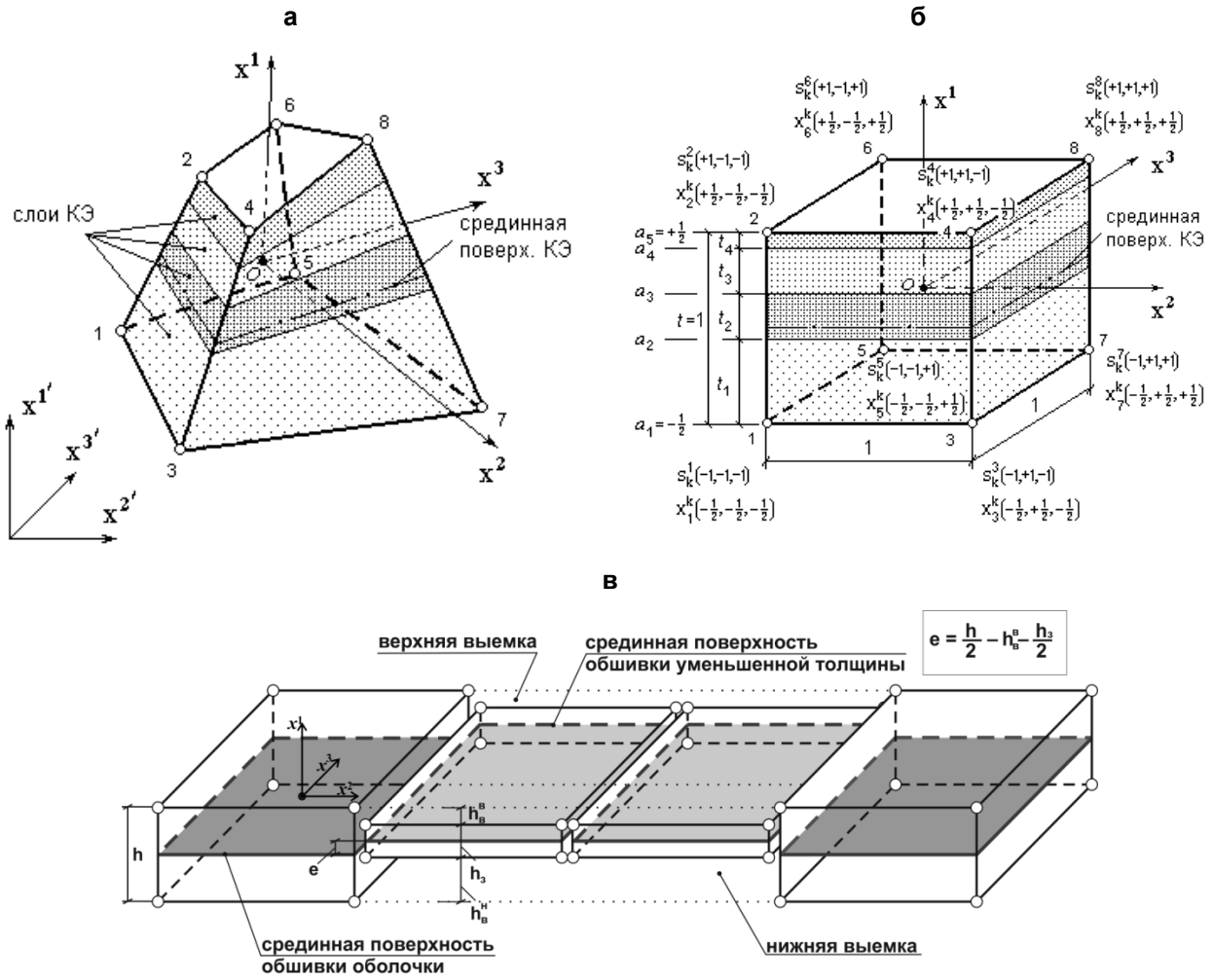


Рисунок 2. Универсальный пространственный КЭ оболочки (МСКЭ) (*а*) геометрическая форма; (*б*) топологическая модель; (*в*) моделирование участка с выемками

Обычно в МКЭ искомыми неизвестными являются перемещения узлов КЭ $u^{i'}_{s_1 s_2 s_3}$ в глобальной декартовой системе координат $x^{i'}$. Для улучшения сходимости для тонких оболочек в качестве разрешающих функций принимается совокупность перемещений узловых точек на срединной поверхности $\upsilon^{i'}_{s_2 s_3}$ и разницы узловых перемещений на ограничивающих поверхностях КЭ $\nu^{i'}_{s_2 s_3}$

$$\upsilon^{i'}_{s_2 s_3} = \frac{u^{i'}_{s_1=+1 s_2 s_3} + u^{i'}_{s_1=-1 s_2 s_3}}{2}, \qquad \nu^{i'}_{s_2 s_3} = u^{i'}_{s_1=+1 s_2 s_3} - u^{i'}_{s_1=-1 s_2 s_3}.$$

Введенная таким образом замена переменных может трактоваться как переход от 8-узлового пространственного КЭ с 3 узловыми перемещениями к 4-узловому оболочечному КЭ с 6 обобщенными перемещениями, отнесенными к узлам на срединной поверхности КЭ.

При получении соотношений для коэффициентов матриц реакций, жесткости, геометрической жесткости и эквивалентных температурных нагрузок универсального КЭ необходимым образом учитываются его дополнительные переменные параметры. При вычислении коэффициентов указанных матриц в соответствующие соотношения подаются исходные данные либо для КЭ обшивки, либо для модифицированного КЭ. При этом учитывается, что при получении матриц для КЭ обшивки и модифицированного КЭ в качестве поверхностей отсчета приняты их срединные поверхности, которые могут между собой не совпадать. Поэтому при численном построении системы разрешающих уравнений для конечноэлементной модели оболочки ступенчато-переменной толщины всегда выполняется корректирование матриц модифицированного КЭ относительно принятой единой поверхности отсчета – срединной поверхности обшивки оболочки.

Решение нелинейной задачи устойчивости выполняется комбинированным шаговым алгоритмом, сочетающим метод продолжения решения по параметру и итерационную процедуру Ньютона – Канторовича. Разработаны автоматизированные процедуры расчета задач нелинейного деформирования, потери устойчивости и закритического поведения неоднородных оболочек с определением точек бифуркации, верхней и нижней критической нагрузок.

1.2. Методика расчета геометрически нелинейных задач в ПК ЛИРА и SCAD

Для решения геометрически нелинейных задач устойчивости и определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек и пластин в ПК ЛИРА [28, 29] и SCAD [30, 31] применяются два типа плоских КЭ постоянной толщины: треугольный трехузловой №342 (рис. 3, а) и четырехугольный четырехузловой №344 (рис. 3, *б*). Узлы КЭ, расположенные на его срединной поверхности, имеют по 6 степеней свободы: три перемещения u_1, u_2, u_3 и три угла поворота $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ относительно местных декартовых осей x_i.

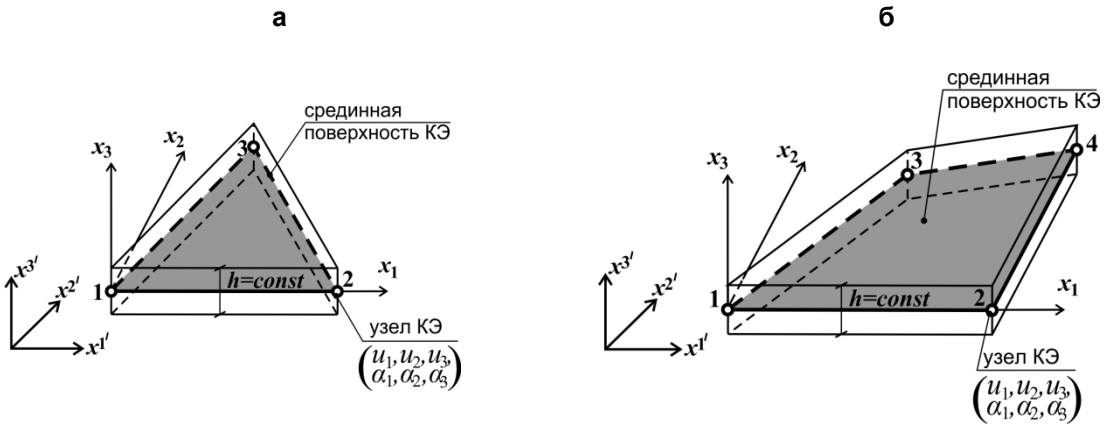


Рисунок 3. Треугольный КЭ №342 (*а*), четырехугольный КЭ №344 (*б*), ПК ЛИРА и SCAD

При моделировании геометрических особенностей оболочек ступенчато-переменной толщины в виде эксцентрично расположенных ребер, каналов и выемок в ПК ЛИРА и SCAD применяются специальные элементы. В ПК ЛИРА – это так называемые абсолютно жесткие вставки и абсолютно жесткие тела [28, 29], а в ПК SCAD – абсолютно жесткие (твердые) тела [30, 31]. Во всех случаях это искусственный прием, который применяется для аппроксимации в расчетной модели неоднородной оболочки ступенчатого изменения ее толщины с учетом эксцентриситета. Целью введения этих специальных элементов является задание кинематической связи для соответствующих узловых перемещений. На рисунках 4–5 на примере участка оболочки с выемками схематически показано применение абсолютно жестких вставок и абсолютно жестких тел в расчетных моделях ПК ЛИРА и SCAD.

Абсолютно жесткие вставки ПК ЛИРА служат для присоединения узлов КЭ на участках ступенчато-переменной толщины к основным узлам конструкции, размещенным на ее срединной поверхности. С помощью абсолютно жестких вставок происходит моделирование смещения (эксцентриситета) упругой части КЭ (срединной поверхности ребра или участка с выемкой) (рис. 4). Под упругой частью вставки понимается оболочечный КЭ соответствующей толщины, смещенный относительно срединной поверхности конструкции, в котором узлы (узлы вставки) с помощью кинематических соотношений привязаны к срединной поверхности исходной оболочки.

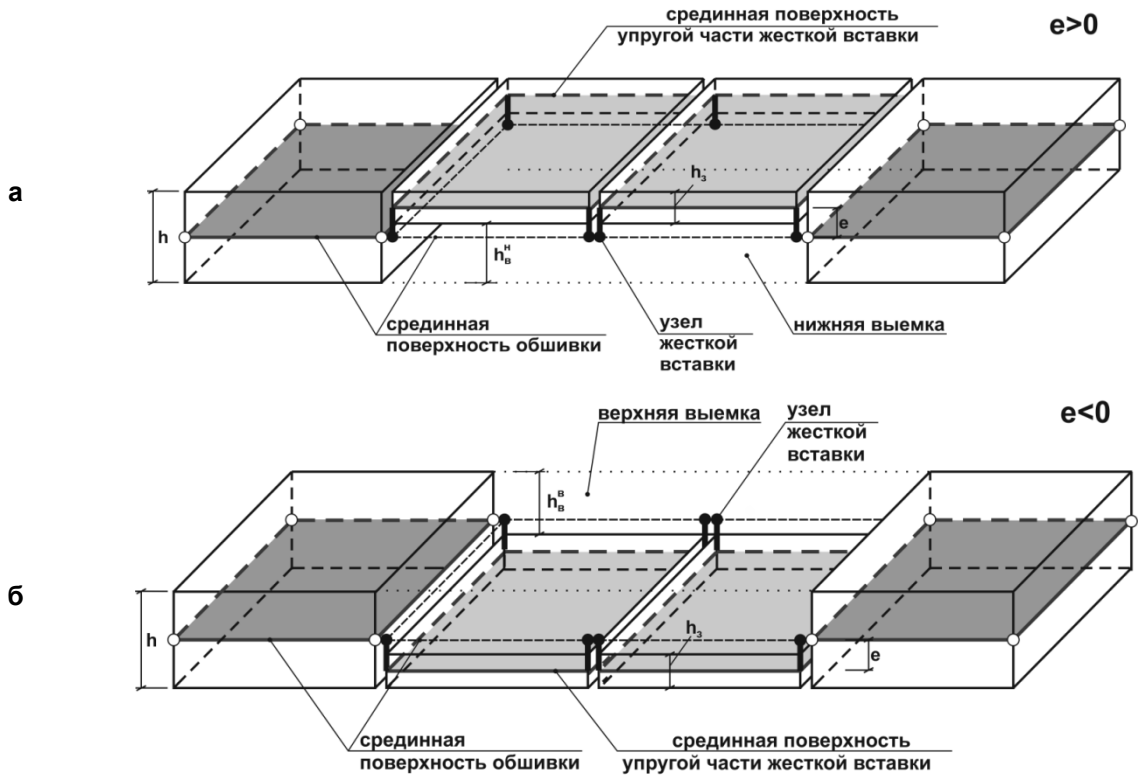


Рисунок 4. Моделирование ступенчато-переменной толщины оболочки абсолютно жесткими вставками в ПК ЛИРА (*а*) на участке с нижней выемкой; (*б*) на участке с верхней выемкой

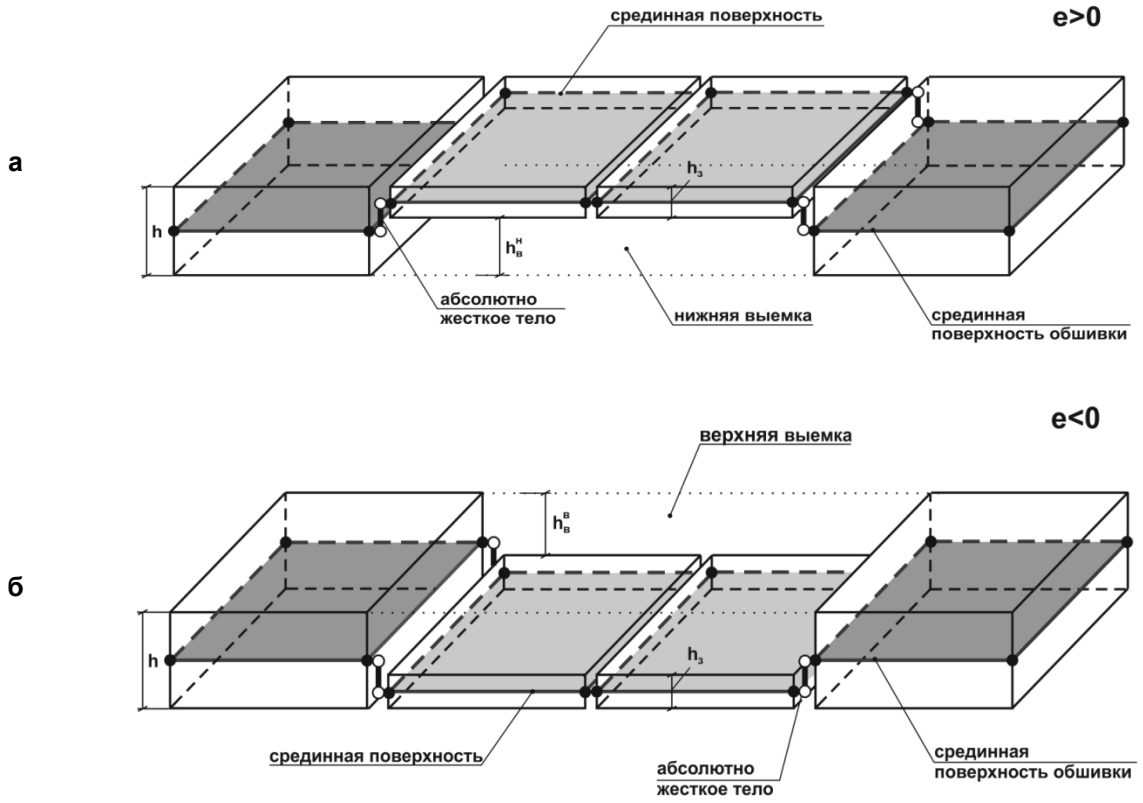


Рисунок 5. Моделирование ступенчато-переменной толщины оболочки абсолютно жесткими телами в ПК ЛИРА и ПК SCAD (*а*) на участке с нижней выемкой; (*б*) на участке с верхней выемкой

Абсолютно жесткие тела ПК ЛИРА и ПК SCAD представляют собой специальные (условные) КЭ большой жесткости, которые дополнительно вводятся в расчетную модель для соединения узлов срединных поверхностей обшивки и эксцентричного элемента (рис. 5). В целом абсолютно жесткое тело можно лишь условно отнести к понятию конечный элемент, поскольку оно собственно не имеет классических атрибутов КЭ (базисные функции, область конечного элемента и т. п.) [28]. Однако с точки зрения реализации абсолютно жесткое тело вписывается в конечноэлементную процедуру. При моделировании смещений КЭ абсолютно жесткое тело является жесткой связью между узлами эксцентрично расположенных элементов. Абсолютно жесткие тела используются для моделирования несоосной стыковки колонн, капителей, ребристых плит перекрытия и т. д. В ПК ЛИРА этот КЭ не имеет номера. В ПК SCAD он находится под номером 100.

Аналогичные приемы используются при моделировании ребер и накладок.

В ПК ЛИРА реализовано три шаговых алгоритма решения геометрически нелинейной задачи [29]:

1) простой – количество шагов и величина каждого шага нагрузки задаются пользователем;

2) с автоматическим выбором шага – количество шагов и их величина автоматически подбираются алгоритмом;

3) шаговый с поиском новых форм равновесия – реализует метод компенсирующих нагрузок, при котором фиксируется момент потери устойчивости и выполняется переход на новую устойчивую ветвь равновесия.

Первые два алгоритма используют простую модификацию метода последовательных нагрузок, где расчет выполняется до момента вырождения матрицы жесткости системы. Точки ветвления и критическая нагрузка не различаются. Таким образом, решение задачи нелинейного деформирования реализуется либо до точки ветвления ($\bar{q}*$), либо до точки верхней критической нагрузки ($\bar{q}^{в}_{кр}$). Третий алгоритм реализует переход на новую устойчивую ветвь (как показали исследования [26]) с существенной погрешностью.

В ПК SCAD реализовано также три шаговых алгоритма решения геометрически нелинейной задачи [31].

1. Простой шаговый (реализует метод последовательных нагрузок). Пользователь задает количество шагов и размер каждого шага нагрузки. На каждом шаге решается линеаризованная задача, в предположении, что решение является достаточно точным, реализуется переход к следующему шагу нелинейного расчета.

2. Шаговый с уточнением (реализует метод Ньютона – Канторовича). Пользователь задает количество шагов, величину каждого шага, число итераций. На текущем шаге нагрузки реализовано итерационное уточнение нелинейного решения на основе анализа невязки уравнений равновесия. Итерации выполняются с неизменными коэффициентами линеаризованной матрицы жесткости системы, вычисленными в начале текущего шага.

3. Шагово-итерационный (реализует метод Ньютона – Рафсона). Пользователь задает количество шагов, величину каждого шага, число итераций. На каждом шаге выполняется итерационное уточнение решения с пересчетом коэффициентов линеаризованной матрицы жесткости системы на каждой итерации.

В ПК SCAD не анализируется возможное появление точки ветвления.

Недостаточно полное описание нелинейных алгоритмов в инструкциях ПК ЛИРА и SCAD потребовало решения задач в этих программных комплексах тремя методами. На примере квадратной в плане гладкой сферической панели постоянной толщины, приведенной в работах [26, 27], были исследованы все алгоритмы нелинейного расчета с целью их оценки и выбора наиболее подходящего. Решения по диаграммам нагрузка – прогиб ($\bar{q}$ - $\bar{u}^{1'}$) сравнивались с решениями работ [4, 23] и МСКЭ. Анализ решений показал следующее [26].

В ПК ЛИРА оба варианта метода последовательных нагружений дают хорошее совпадение по величине верхней критической нагрузки $\bar{q}_{\text{кр}}^{\text{в}}$, где решение задачи и заканчивается. Выявлено, что для данной задачи шаговый алгоритм с поиском новых форм равновесия (ПК ЛИРА) реализует переход на новую устойчивую ветвь равновесия с большой погрешностью. Приемлемым является алгоритм с автоматическим выбором шага.

Все три алгоритма ПК SCAD позволяют переходить на новую устойчивую ветвь равновесия. Простой шаговый алгоритм выполняет переход на закритическую ветвь с большой погрешностью по величине верхней критической нагрузки. Эта проблема решается достаточно точно двумя алгоритмами: шаговым с уточнением и шагово-итерационным.

Равновесные формы деформированных панелей в докритической и в закритической областях имеют простой вид и хорошо совпадают во всех трех способах решения – ПК ЛИРА, ПК SCAD И МСКЭ.

2. Численные примеры

В работе рассматриваются квадратные в плане сферические панели с различными типами ослаблений. Панель шарнирно опирается по контуру и нагружается равномерным нормальным давлением интенсивностью q [1, 2]. Результаты исследований представлены с использованием безразмерных параметров $\bar{q} = a^4 q/(Eh^4)$, $\bar{u}^{1'} = u^{1'}/h$. Кривизна оболочки определяется параметром $K = 2a^2/(Rh) = 32$. Принято: $a = 60h$ – размер панели в плане, $R = 225h$ – радиус, $h = 1$ см – толщина, модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^6$ кг/см^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Расчетный фрагмент – четверть панели, для которой с учетом возможных сложных закритических форм деформирования для всех ПК принята густая сетка 30$\times$30 КЭ. Сходимость решений, получаемых по МСКЭ, исследована в [1], где для каждой задачи определена достаточная сетка.

При расчете в ПК ЛИРА использовался алгоритм с автоматическим выбором шага, в ПК SCAD – шагово-итерационный. На графиках $\bar{q} - \bar{u}^{1'}$ значком $*$ обозначена конечная точка проведения расчета в ПК ЛИРА.

2.1. Оболочки со сквозными ослаблениями

Исследуются панели с двумя видами отверстий, имеющими одинаковую общую площадь $144h^2$:

1) центральное квадратное отверстие шириной $b_0 = 12h$ (рис. 6, *а*);

2) равномерно расположенные четыре одинаковые квадратные отверстия шириной $b_0 = 6h$ (рис. 6, *б*).

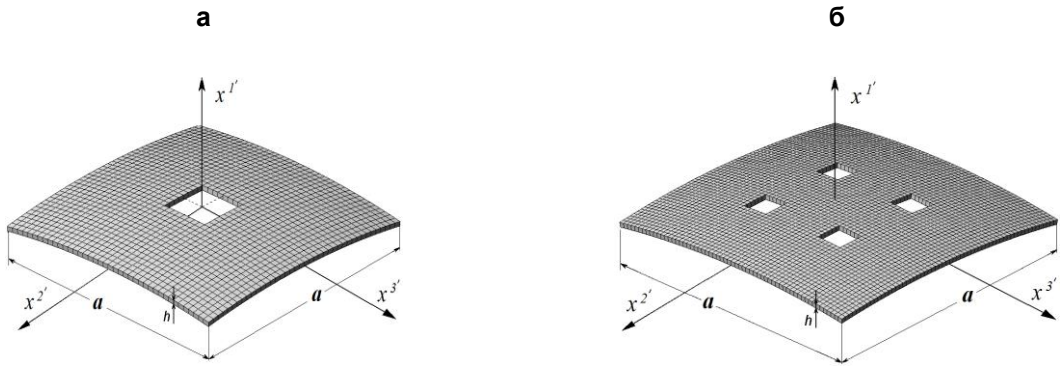


Рисунок 6. Оболочки с центральным отверстием (*а*) и с четырьмя отверстиями (*б*)

Для панели с центральным отверстием имеем хорошее совпадение диаграмм $\bar{q}-\bar{u}^{1'}$ МСКЭ, ПК ЛИРА и ПК SCAD с решением [23] в докритической области и постепенное их расхождение в закритической (рис. 7, а). В верхней критической точке расхождения с решением [23] по величине $\bar{q}_{кр}^{в}$ составляет соответственно 10.92, 11.13, 9.79 %, а по прогибу в точке А $\bar{u}_{кр}^{1'в}$ имеем 15.65, 34.0, 17.88 % (табл. 1). Диаграммы МСКЭ, ПК ЛИРА и ПК SCAD между собой практически совпадают. Формы деформирования ослабленной центральным отверстием панели имеют похожий вид (рис. 7, б) и хорошо между собой согласуются.

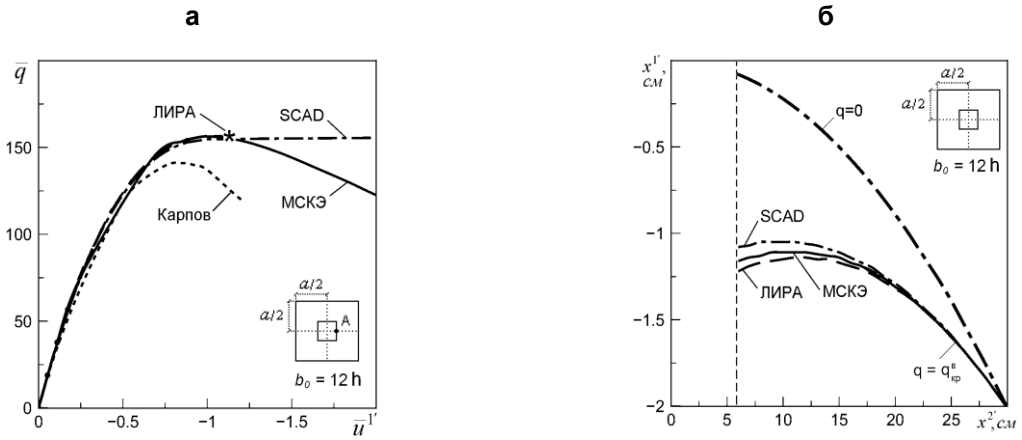


Рисунок 7. Диаграммы «нагрузка – прогиб» в точке *А* (*а*); форма потери устойчивости (*б*)

Таблица 1. Сравнительные результаты критических точек и величин прогибов диаграмм P – U для панелей с центральным отверстием, полученные разными методами

Вариант расчета	$\bar{q}_{кр}^{в}$	Δ,%	$\bar{u}_{кр}^{1'в}$	Δ,%
Одно отверстие				
Карпов, [23]	141.0	–	-0.850	–
МСКЭ	156.0	+10.6	-1.007	+18.5
ПК ЛИРА	156.7	+11.1	-1.139	+34.0
ПК SCAD	154.8	+9.8	-1.002	+17.9
Четыре отверстия				
Карпов, [23]	177.1	–	-0.870	–
МСКЭ	171.6	-3.1	-0.873	+0.3
ПК ЛИРА	173.1	-2.3	-0.946	+8.7
ПК SCAD	171.6	-3.1	-1.027	+18.1

Для панели с четырьмя отверстиями наблюдается хорошее совпадение диаграмм (рис. 8, *а*). В верхней критической точке различие по величине $\bar{q}_{кр}^{в}$ с решением [23] составляет −3.11, −2.28, −3.13 %, а по прогибу центра панели $\bar{u}_{кр}^{1'в}$ − 0.35, 8.74, 18.05 % (табл. 1). Форма потери устойчивости этой оболочки имеет простой вид, который соответствует общей потере устойчивости панели с прощелкиванием ее центральной части (рис. 8, *б*).

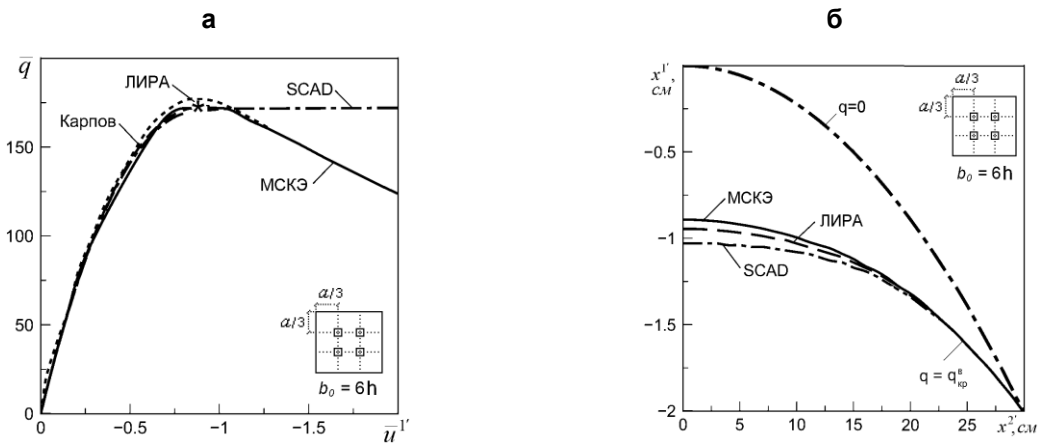


Рисунок 8. Диаграммы $\bar{q}$ – $\bar{u}^{1'}$ в центре панели (*а*) и форма потери устойчивости (*б*)

Ослабление гладкой панели, для которой $\bar{q}^{в}_{кр}$ = 193.7 [1], одним отверстием приводит к большему снижению $\bar{q}^{в}_{кр}$ по сравнению с вариантом четырех отверстий. Для панели, ослабленной одним центральным отверстием, величина $\bar{q}^{в}_{кр}$ уменьшается на 9.5 %, а для панели с четырьмя отверстиями – на 11.4 %. Этот факт объясняется тем, что одно большое отверстие, сосредоточенное в наиболее деформативной центральной части панели, сильнее уменьшает ее жесткость, чем это делают равномерно распределенные четыре отверстия того же суммарного объема.

2.2. Оболочки с каналами и выемками

Рассматривается оболочка с тремя вариантами несквозных ослаблений (рис. 9):

1) четыре узких перекрестных канала одинаковых размеров: длиной a, шириной $b_к = 2h$ и глубиной $h_к = 0.3h$ (*а*);

2) четыре широких перекрестных канала одинаковых размеров: длиной a, шириной $b_к = 6h$ и глубиной $h_к = 0.7h$ (*а*);

3) четыре квадратных выемки одинаковых размеров: шириной $b_в = 6h$ и глубиной $h_в = 0.7h$ (*б*).

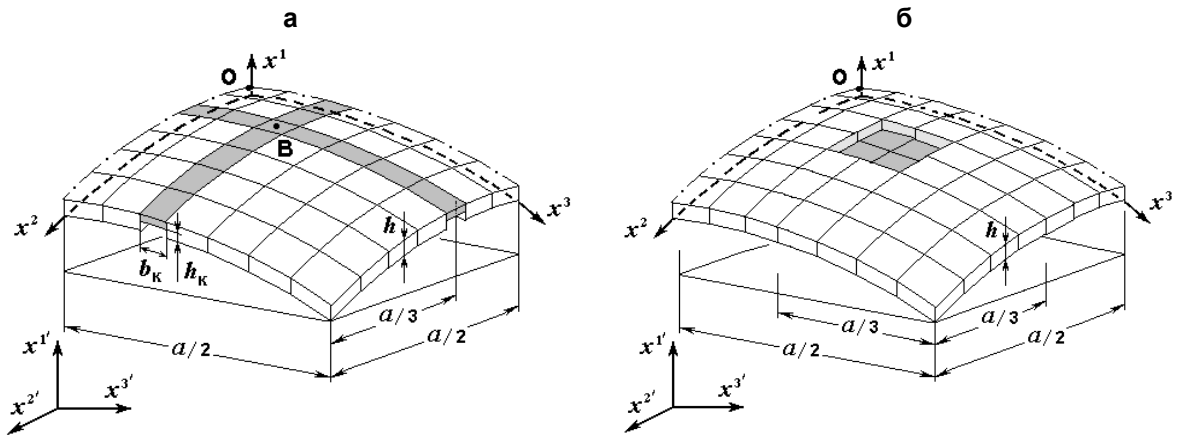


Рисунок 9. Фрагмент четверти оболочки с перекрестными каналами (*а*) и с четырьмя выемками (*б*)

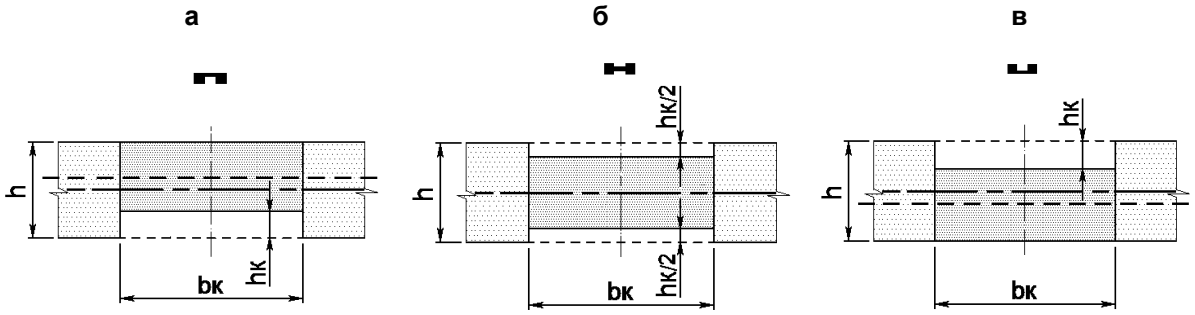


Рисунок 10. Варианты эксцентрического расположения каналов и выемок

Выполнено сравнение трех способов эксцентрического расположения каналов и выемок относительно срединной поверхности обшивки оболочки, где способы ослаблений обозначены соответствующими значками (рис. 10):

1) с внутренней стороны (▛) (*а*);
2) с внутренней и внешней сторон симметрично относительно срединной поверхности (▬) (*б*);
3) с внешней стороны (▙) (*в*).

Для всех способов расположения каналов и выемок величины объемов ослаблений были одинаковыми.

При аппроксимации участков панели с эксцентрично расположенными каналами и выемками в ПК ЛИРА использовались абсолютно жесткие вставки пластин, а в ПК SCAD – абсолютно жесткие тела.

Для оболочек с ослаблением, расположенным со стороны вогнутости панели (с ее внутренней стороны – ▛; рис. 11, *а*, *г*, *ж*;), выполнено сравнение с решениями работы [23]. При этом способе расположения ослаблений для панелей с узкими каналами и квадратными выемками наблюдается хорошее совпадение диаграмм МСКЭ и ПК ЛИРА с решением [23] и некоторое расхождение для ПК SCAD (рис. 11, *а*, *ж*; табл. 2). При ослаблении панели широкими каналами (рис. 11, *г*) наблюдается существенное расхождение диаграмм $\bar{q}$ – $\bar{u}^{1'}$, полученных по МСКЭ, ПК ЛИРА и SCAD, с решениями работы [23]. Это объясняется сложной формой деформирования оболочки [1]. В таблице 2 приведено сравнение (Δ,%) с решением [23] (первый столбец) и решением по МСКЭ (второй столбец).

Для всех панелей с широкими каналами (рис. 11, *г*–*е*) наблюдается хорошее совпадение решений ПК ЛИРА с решением по МСКЭ. Результат, полученный в ПК SCAD для оболочки с широкими каналами, расположенными на внешней стороне обшивки (рис. 11, *е*), по сравнению с результатом МСКЭ дает погрешность 4.5 % по величине верхней критической нагрузки.

Для оболочек без эксцентричного расположения каналов (узких и широких) и выемок (▬; рис. 11, *б*, *д*, *з*) при всех вариантах симметричных ослаблений наблюдается хорошее совпадение диаграмм $\bar{q}$ – $\bar{u}^{1'}$, полученных по МСКЭ, ПК ЛИРА и SCAD.

Для панели с широкими симметричными каналами (▬; рис. 11, *д*; табл. 2) решение задачи в ПК ЛИРА остановилось в точке ветвления $*$, также обнаруженной по МСКЭ. ПК ЛИРА определил точку ветвления решения $\bar{q}^*$=64.79 ($\bar{u}^*$=-0.2451), как критическую. По МСКЭ точке ветвления отвечает величина $\bar{q}^*$=66.00 ($\bar{u}^*$=-0.2467), при этом величина верхней критической нагрузки $\bar{q}^{в}_{кр}$=72.94 ($\bar{u}^{1'}_{кр}$=-0.2876). В точке ветвления расхождение решений по величинам нагрузки $\bar{q}^*$ и перемещения $\bar{u}^*$ центра панели составляет – 1.83 и – 0.65 % соответственно. В этом случае в ПК ЛИРА точка ветвления принимается за верхнюю критическую (Δ=–11.2%).

Среди панелей одинакового объема наименьшее значение величины верхней критической нагрузки имеют оболочки с ослаблением, расположенным на внешней стороне обшивки (▬; рис. 11, *в*, *е*, *к*). При увеличении ширины и глубины каналов уменьшается значение верхней критической нагрузки и увеличивается прогиб в центре панели.

Практически полное совпадение решений в докритической области подтверждает возможность применения ПК ЛИРА и SCAD при решении геометрически нелинейной задачи устойчивости пологих сферических оболочек с разными ослаблениями. ПК ЛИРА и SCAD могут использоваться в качестве инструмента для сопоставления решений при проведении подобных исследований.

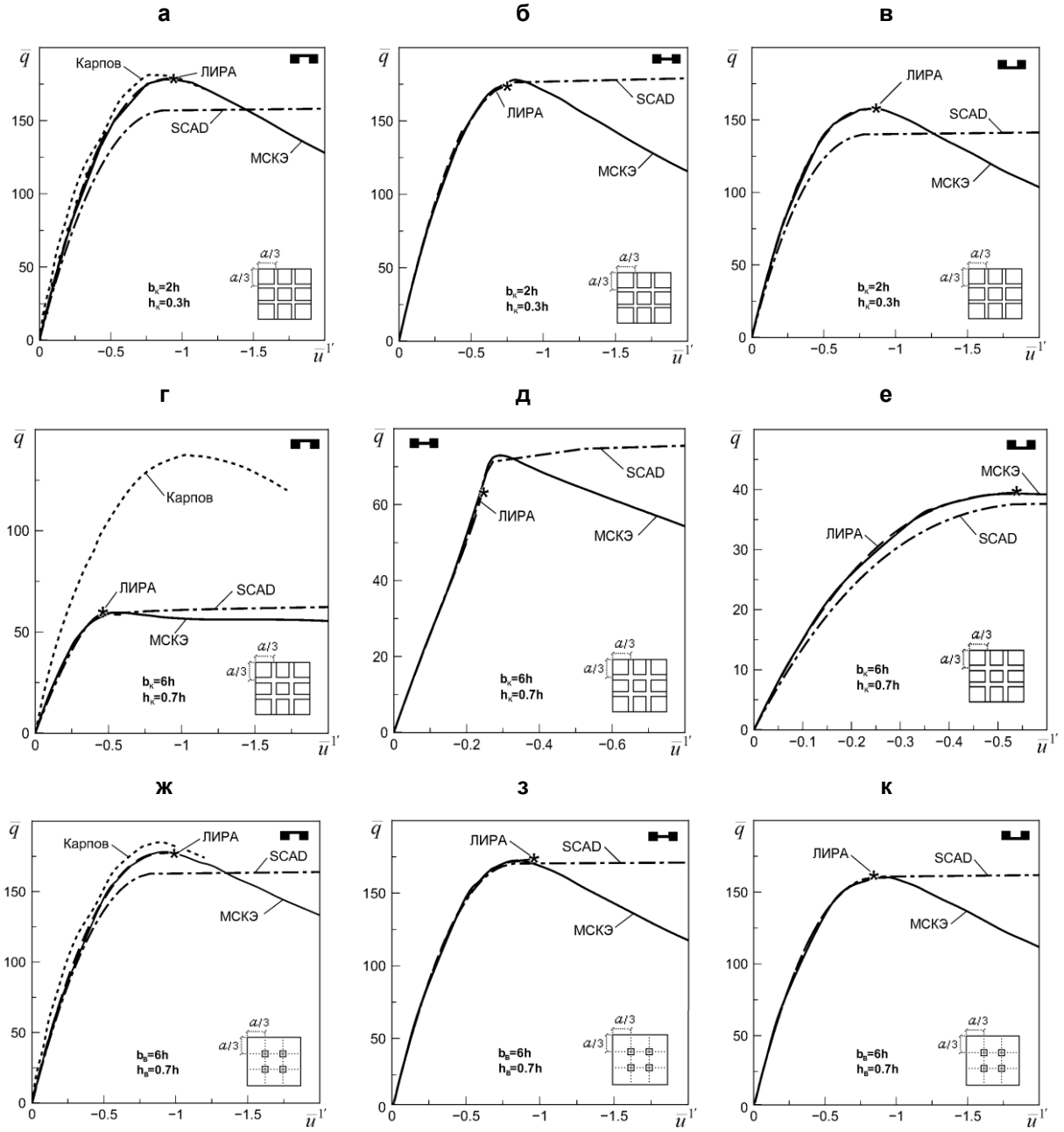


Рисунок 11. Диаграммы $\bar{q}$ – $\bar{u}^{1'}$ для панелей с узкими (*а–в*) и широкими (*г–е*) каналами, с выемками (*ж–к*)

Таблица 2. Сравнительные результаты критических точек и величин прогибов диаграмм P – U для панелей с эксцентричным расположением каналов и выемок, полученные разными методами

Вариант расчета	$\bar{q}_{кр}^{в}$	Δ, %		$\bar{u}_{кр}^{1'в}$	Δ, %	
		[23]	МСКЭ		[23]	МСКЭ
Узкие каналы						
Карпов, [23]	181.20	–		−0.8600	–	
МСКЭ	178.40	−1.55	–	−0.8684	+0.98	–
ПК ЛИРА	178.98	−1.23	+0.33	−0.9347	+8.69	+7.63
ПК SCAD	156.93	−13.39	−12.03	−0.8542	−0.67	−1.64
Узкие каналы						
МСКЭ	177.50		–	−0.8050		–
ПК ЛИРА	176.71		−0.45	−0.8810		+9.44
ПК SCAD	176.21		−0.73	−0.7834		−2.68
Узкие каналы						
МСКЭ	157.80		–	−0.8321		–
ПК ЛИРА	157.83		+0.02	−0.8688		+4.41
ПК SCAD	140.02		−11.27	−0.7743		−6.95
Широкие каналы						
Карпов, [23]	137.40	–		−1.080	–	
МСКЭ	59.58	−56.64	–	−0.5539	−48.71	–
ПК ЛИРА	58.65	−57.31	−1.56	−0.5854	−45.83	+5.69
ПК SCAD	59.39	−56.78	−0.32	−0.5970	−44.72	+7.78
Широкие каналы						
МСКЭ	72.94 ($\bar{q}^*$ =66.00)		– (–)	-0.2876 ($\bar{u}^*$ =-0.2467)		– (–)
ПК ЛИРА	– ($\bar{q}^*$ =64.79)		−11.20 (−1.83)	– ($\bar{u}^*$ =−0.2407)		– (−0.65)
ПК SCAD	71.32		−2.22	−0.2653		−7.75
Широкие каналы						
МСКЭ	39.31		–	−0.5444		–
ПК ЛИРА	39.52		+0.53	−0.5577		+2.50
ПК SCAD	37.54		−4.50	−0.5301		−2.65
Выемки						
Карпов, [23]	184.80	–		−0.900	–	
МСКЭ	178.00	−3.68	–	−0.9581	+6.46	–
ПК ЛИРА	177.84	−3.77	−0.09	−1.0541	+17.11	+10.01
ПК SCAD	162.67	−11.98	−8.61	−0.8190	−9.00	−14.52
Выемки						
МСКЭ	171.60		–	−0.7980		–
ПК ЛИРА	172.37		+0.45	−0.9523		+19.34
ПК SCAD	170.39		−0.71	−0.8261		+3.52
Выемки						
МСКЭ	160.20		–	−0.9085		–
ПК ЛИРА	160.85		+0.41	−0.9299		+2.36
ПК SCAD	160.76		+0.35	−0.8767		−3.50

Выводы

1. На базе метода конечных элементов разработан метод исследования тонкостенных оболочечных конструкций, который основан на использовании для всех конструктивных элементов неоднородной оболочки геометрически нелинейных соотношений пространственной теории термоупругости. В основу методики заложены гипотеза недеформированной прямой и закон Дюамеля – Неймана. Применена моментная схема конечных элементов, которая распространена на задачи нелинейного термоупругого деформирования тонких неоднородных оболочек.

На базе универсального пространственного КЭ разработана единая расчетная модель, учитывающая геометрические особенности конструктивных элементов неоднородной оболочки: обшивку переменной толщины, ребра и накладки, выемки, каналы и отверстия, изломы срединной поверхности.

Построен эффективный шаговый алгоритм решения задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких неоднородных оболочек.

2. Проанализированы и исследованы возможности применения современных программных комплексов ЛИРА и SCAD к решению задач нелинейного деформирования и потери устойчивости оболочек ступенчато-переменной толщины.

3. Проведенные для неоднородных оболочек исследования нелинейного деформирования и потери устойчивости подтверждают достоверность решений, полученных по МСКЭ, в ПК ЛИРА и SCAD. При этом в ходе решения нелинейных задач были выявлены некоторые особенности расчета по ПК ЛИРА и SCAD. Выявленные особенности могут быть полезны для пользователей комплексов при проведении расчетов панелей ступенчато-переменной толщины.

Для решения геометрически нелинейной задачи устойчивости можно рекомендовать в ПК ЛИРА использовать алгоритм с автоматическим выбором шага, в ПК SCAD – шагово-итерационный.

При моделировании геометрических особенностей оболочек ступенчато-переменной толщины в виде эксцентрично расположенных ребер, каналов и выемок можно рекомендовать в ПК ЛИРА применять абсолютно жесткие вставки пластин, а в ПК SCAD – абсолютно жесткие тела.

Отметим, что рассмотренные результаты решений нелинейных задач подтверждают недостаточную разработку алгоритмов исследования нелинейного деформирования и устойчивости неоднородных оболочек. В частности, это касается стратегии выбора начальных и текущих шагов нагружения, точности решения задачи и ряда других параметров.

Литература

1. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. 336 с.
2. Bazhenov V.A., Solovei N.A. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // International Applied Mechanics. 2009. Vol. 45. №9. Pp. 923–953.
3. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 392 с.
4. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х. ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 288 с.; Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 248 с.
5. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: монография. Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. 264 с.
6. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004. 276 с.
7. Ivanova J., Pastrone F. Geometric method for stability of non-linear elastic thin shells. Boston, Mass. [u.a.] Kluwer Academic, 2002. 245 p.
8. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition. CRC Press, 2006. 568 p.
9. Jones R.M. Buckling of bars, plates, and shells. Blacksburg, Va.: Bull Ridge Publ., 2006. 815 p.

10. Chapelle D., Bathe K.J. The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. 410 p.
11. Якушев В.Л. Устойчивость тонкостенных конструкций с учетом начальных несовершенств // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №1. С. 43–46.
12. Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.. Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials. 2011. Vol. 43. No. 3. Pp. 347–351.
13. Москаленко Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров, 2011. №4. С. 161–164.
14. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5. С. 100–146.
15. Жгутов В.М. Математические модели деформирования оболочек переменной толщины с учетом различных свойств материалов // Инженерно-строительный журнал, 2012. №1. С. 79–90.
16. Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H. Locally imperfect conical shells under uniform external pressure // Strength of Materials. 2013. Vol. 45. No. 3. Pp. 369–377.
17. Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2009. Т. 151, кн. 3. С. 121–129.
18. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А. Сравнение вариантов интерполяций перемещений на примере произвольной оболочки в форме эллипсоида // Вестн. Волгоград. гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2011. Вып. 23(42). С. 54–59.
19. Dumir P.C., Dube G.P., Mallick A. Axisymmetric buckling of laminated thick annular spherical cap // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2005. Vol. 10. No.2. Pp. 191–204.
20. Arciniega R.A., Reddy J.N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007. Vol. 196. No. 4–6. Pp. 1048–1073.
21. Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics. 2009. Vol. 45. No. 3. Pp. 245–271.
22. Nie G.H., Chan C.K., Yao J.C., He X.Q. Asymptotic Solution for Nonlinear Buckling of Orthotropic Shells on Elastic Foundation // AIAA Journal. 2009. Vol. 47. No. 7. Pp. 1772–1783.
23. Ильин В.П., Карпов В.В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л.: Стройиздат, 1986. 168 с.
24. Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б., Тамілко О.А. Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2009. Вип. 84. С. 89–95.
25. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О. Порівняльний аналіз нелінійного деформування та стійкості гранованих оболонок ступінчасто-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2010. Вип. 86. С. 131–139.
26. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Калашников А.Б., Мищенко О.А. Анализ моделирования нелинейного деформирования и устойчивости упругих неоднородных оболочек в некоторых программных комплексах // Труды VI Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2013». Москва, 24–26 апреля 2013 г. М.: РУДН, 2013. С. 96–102.
27. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А. Моделирование нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. №5. С. 14–33.
28. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. К: Факт, 2007. 394 с.
29. Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д. [и др.] Лира 9.4 Руководство пользователя. Основы. К.: Факт, 2008. 164 с.
30. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
31. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD. М.: СКАД СОФТ, 2009. 656 с.

Николай Александрович Соловей, г. Киев, Украина

Ольга Петровна Кривенко, г. Киев, Украина
Тел. раб.: +38(066)0483277; эл. почта: olakop@ukr.net

Оксана Александровна Малыгина, г. Киев, Украина
Тел. раб.: +38(098)2912918; эл. почта: oksalita@mail.ru

© Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.7

Расчет призматических оболочек в упругой среде

К.т.н., доцент О.Г. Иванов;
к.т.н., доцент С.В. Шлычков,
Поволжский государственный технологический университет

Аннотация. В работе представлена методика расчета физически нелинейных призматических оболочек с заделанными торцами. Известно, что подкрепленные ребрами жесткости плиты, находящиеся в упругой среде, можно рассчитывать аналогично однородным (без подкреплений) плитам. При этом влияние ребер на напряженно-деформированное состояние плиты учитывается в виде упругого основания по винклеровской модели.

Здесь моделируется контакт с упругой средой, которая принимается в виде однослойного основания. Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций устанавливается в виде кубического полинома. Основные дифференциальные уравнения выводятся на основе энергетического метода. Конечные уравнения реализуются численным методом Рунге – Кутты.

На основе полученных уравнений выполнен расчет п-образной оболочки. Представлена оценка влияния упругой среды и физической нелинейности на напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы.

Ключевые слова: физическая нелинейность; пластинчатые системы; упругое основание

Введение

Тонкостенные пространственные конструкции применяют в настоящее время во многих областях техники и строительства в качестве различных инженерных сооружений. Некоторые из этих сооружений взаимодействуют с упругой средой, например, подземные переходы, тоннели, фундаменты и т. д. Поведению пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой, посвящено достаточно большое количество работ [1–13]. Для анализа их поведения используются экспериментальные, численные и аналитические подходы [10–15]. При этом целое направление исследований посвящено учету влияния геометрических нелинейностей на характер напряженно-деформированного состояния конструкций [16–19]. Однако практически отсутствуют публикации, связанные с расчетом таких систем в упругой среде с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала. При этом если подходить строго к диаграмме деформирования конструкционных материалов, то практически все они в той или иной степени обладают физической нелинейностью [20–24]. Такие материалы, как бетон, различные сплавы, пластмассы, композиты имеют высокую степень физической нелинейности [25–27, 29]. Следует отметить, что расчет конструкций с учетом физической нелинейности значительно более трудоемок по сравнению с расчетом конструкций в линейной постановке. Для более точного определения коэффициента запаса прочности конструкции, точной и правильной оценки ее работы необходимо дальнейшее развитие методики расчета пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой, при наличии физической нелинейности. Поэтому разработка методики расчета призматических оболочек в упругой среде с учетом физической нелинейности материала является актуальной проблемой.

Известно, что влияние подкреплений на напряженно-деформированное состояние плит можно учитывать посредством введения упругого основания по винклеровской модели. При этом конструкции, усиленные ребрами жесткости и находящиеся в упругой среде, можно рассматривать как однородные (неподкрепленные) плиты. Настоящая работа посвящена разработке методики расчета физически нелинейных пластинчатых систем [23, 24], взаимодействующих с упругой средой. Среда рассматривается в виде однослойного основания. Для вывода дифференциальных уравнений равновесия используется энергетический подход. Конечные уравнения реализуются численным методом Рунге – Кутты.

1. Дифференциальные уравнения равновесия

Предположим, что пластинчатые системы могут располагаться в упругой среде полностью или частично. В данной статье в качестве расчетной модели упругой среды принята однослойная модель. Также в основу разрабатываемой методики расчета закладывается модель нелинейно-упругого материала пластинчатой системы. Экспериментальные данные таких материалов, как

бетон, различные сплавы, композиты, показывают, что зависимость между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций e_i можно записать в виде кубического полинома [30]:

$$\sigma_i = E \cdot e_i - E_1 e_i^3, \tag{1.1}$$

где E – начальный модуль упругости; E_1 – постоянная, учитывающая степень нелинейности материала (принимается на основании экспериментальных данных).

Например, уравнением (1.1) достаточно хорошо описываются кривые деформирования бетона, композитов, сплавов, некоторых видов стали. Так, в зависимости от марки бетона и возраста [25, 26] указанные величины можно принять в следующих пределах: $E = 2 \cdot 10^4$–$4{,}5 \cdot 10^4$ МПа, $E_1 = 1{,}5 \cdot 10^{10}$–$6{,}5 \cdot 10^{10}$ МПа. Для композита марки ЭДФ-5-6 [31] в зависимости от укладки основы $E = 1{,}9 \cdot 10^4$–$2{,}7 \cdot 10^4$ МПа, $E_1 = 1{,}4 \cdot 10^7$–$2{,}6 \cdot 10^7$ МПа, а для стали марки 20Н5А [25] $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_1 = 2 \cdot 10^{10}$ МПа.

Учитываем гипотезы Кирхгофа – Лява; полагаем, что направляющие тензоров напряжений и деформаций совпадают. Используем известные соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_x = e_x - z\chi_x; \quad \varepsilon_s = e_s - z\chi_s; \quad \varepsilon_{xs} = e_{xs} - 2z\chi_{xs}, \tag{1.2}$$

где $e_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $e_s = \dfrac{\partial v}{\partial s}$; $e_{xs} = \dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$; $\chi_x = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\chi_s = \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}$; $\chi_{xs} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}$.

Величины u, v и w соответствуют компонентам вектора перемещений точки K срединной поверхности пластинчатой системы в продольном x, поперечном s и нормальном z направлениях (рис. 1).

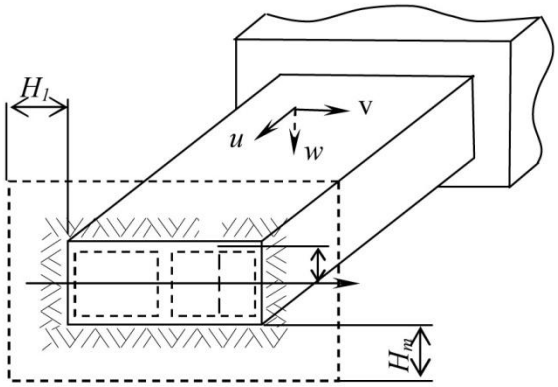


Рисунок 1. Схема оболочки в упругом деформируемом слое толщиной *H*

Двумерная задача сводится к одномерной. Перемещения выражаются по В.З. Власову [32] и принимаются в виде разложений:

$$u(x,s) = \sum_i U_i(x)\varphi_i(s); \qquad v(x,s) = \sum_k V_k(x)\psi_k(s);$$
$$w(x,s) = \sum_d W_d(x) f_d(s), \quad (i = 1,2,3,\ldots,m; k,d = 1,2,3,\ldots,n). \tag{1.3}$$

Выражения интенсивности деформаций e_i и объемной деформации θ с учетом гипотез Кирхгофа – Лява и сжимаемости материала ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{sz} = 0$) можно записать следующим образом:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_s)^2 + (\varepsilon_s - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{xs}^2}; \tag{1.4}$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_s), \tag{1.5}$$

а деформацию –

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_s) \tag{1.6}$$

Учитывая соотношение (1.6), получим формулу для квадрата интенсивности деформаций

$$e_i^2 = \frac{3}{(1+\nu)^2}[\nu_1(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_s^2) + \nu_2\varepsilon_x\varepsilon_s + \frac{1}{4}\varepsilon_{xs}^2], \tag{1.7}$$

где $\nu_1 = \frac{1}{3}[\frac{\nu}{(1+\nu)^2} + 1]; \nu_2 = \frac{1}{3}[\frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1]$; ν – коэффициент Пуассона.

Вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b_0 &= \nu_1(e_x^2 + e_s^2) + \nu_2 e_x e_s + \frac{1}{4}e_{xs}^2; \\ b_1 &= 2\nu_1(e_x\chi_x + e_s\chi_s) + \nu_2(e_x\chi_s + e_s\chi_x) + e_{xs}\chi_{xs}; \\ b_2 &= \nu_1(\chi_x^2 + \chi_s^2) + \nu_2\chi_x\chi_s + \chi_{xs}^2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

тогда формула (1.7) принимает более компактный вид:

$$e_i^2 = \frac{3}{(1+\nu)^2}(b_0 - zb_1 + z^2 b_2). \tag{1.9}$$

Составим уравнение для удельной энергии изменения объема и формы [30]:

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathrm{K}\theta^2 + \frac{2}{3}\int_0^{e_i}(1+\nu)\cdot\sigma_i\cdot de_i, \tag{1.10}$$

где $K = E/[3(1-2\nu)]$ – модуль объемного сжатия.

Подставляя в (1.10) соотношения (1.1 –1.9), получим:

$$\begin{aligned} \Phi = &\frac{E(1-2\nu)}{6(1-\nu)^2}[e_x + e_s - z(\chi_x + \chi_s)]^2 + \frac{E}{1+\nu}(b_0 + zb_1 + z^2 b_2) - \\ &- \frac{3}{2(1+\nu)^3}E_1(b_0 - zb_1 + z^2 b_2)^2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Работа, отнесенная к единице площади поверхности оболочки, равна

$$A = \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\Phi dz, \tag{1.12}$$

где δ – толщина элемента пластинчатой системы.

Подставляя (1.11) в (1.12), получим:

$$\begin{aligned} A = &\frac{E(1-2\nu)\delta}{6(1-\nu)^2}(d_0 + \frac{\delta^2}{12}d_1) + \frac{E\delta}{1+\nu}(b_0 + \frac{\delta^2}{12}b_2) - \\ &- \frac{1}{4}[B_1 b_0^2 + Д_2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + Д_1 b_2^2] \end{aligned}, \tag{1.13}$$

где $B_1 = 6\overline{E}_1\delta; Д_1 = \frac{3}{40}\overline{E}_1\delta^5; Д_2 = \frac{1}{2}\overline{E}_1\delta^3; \overline{E}_1 = E_1/(1+\nu)^3; d_0 = (e_x + e_s)^2; d_1 = (\chi_x + \chi_s)^2$.

Следуя В.З. Власову [32], пространственную пластинчатую систему принимаем дискретно-континуальной. Выбор координатных функций $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$, $f_d(s)$ осуществляется по виду деформированного состояния системы. Искомые функции $U_i(x), V_k(x)$ и $W_d(x)$ являются обобщенными перемещениями и подлежат определению из решения задачи. В дальнейших записях функций переменные, указанные в скобках, опускаем.

Составляем выражение для полной энергии системы:

$$\Pi = \iint (A + q_x \sum_i U_i \varphi_i + q_s \sum_k V_k \psi_k + q_z \sum_d W_d f_d) dx ds, \tag{1.14}$$

где q_x q_s, q_z – интенсивности нагрузок, действующих на систему в продольном, поперечном и нормальном направлениях.

Из условий совместности деформаций в местах соединений пластинчатой системы можно принять при $d = k$

$$W_d = V_k, \tag{1.15}$$

а углы между пластинами учитываются при выборе координатных функций.

Определим минимум функционала (1.14), используя уравнения Эйлера – Лагранжа [33]:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_i'} - \frac{\partial F}{\partial U_i} = 0; \\ &-\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial V_k''} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial V_k'} - \frac{\partial F}{\partial V_k} = 0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где F – подынтегральная функция (1.14); штрихи обозначают обычные производные от функций по переменной x.

Полагаем, что прогибы пластин системы совпадают с осадкой упругой среды. Развернув уравнения (1.16) и присоединив работу реактивных давлений $Q_j^{осн.}$, $Q_\nu^{осн.}$ упругой среды [32] соответственно в продольном и нормальном направлениях:

$$Q_j^{осн.} = \sum_i a_{ji}^0 U_i; \quad Q_\nu^{осн.} = 2\sum_k \rho_{hk}^0 V_k'' - \sum_k s_{hk}^0 V_k, \tag{1.17}$$

получим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений равновесия пластинчатой системы в упругой среде:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \sum_i a_{ji} U_i'' - \sum_i \bar{b}_{ji} U_i - \sum_k c_{jk} V_k' + Q_j = {}^1\Phi_j; \\ &-\gamma_1 \sum_k e_{hk} V_k^{IV} + \sum_k \left[\bar{r}_{hk} + \frac{2\gamma}{1+\nu}\left(m_{hk} - \frac{\nu}{1-\nu}\alpha_{hk}\right)\right] V_k'' - \sum_k \bar{s}_{hk} V_k + \sum_i c_{hi} U_i' + Q_\nu = {}^2\Phi_h, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где

$$Q_j = \frac{1}{G}\int_s q_x \varphi_j ds; \quad Q_\nu = \frac{1}{G}\int_s (q_h \psi_h + q_z f_h) ds;$$

$$\begin{aligned} &\bar{b}_{ji} = b_{ji} + \frac{1}{G} a_{ji}^0; \ \bar{r}_{hk} = r_{hk} + \frac{1}{G}\rho_{hk}^0; \ \bar{s}_{hk} = \gamma_1 s_{hk} + \frac{1}{G} s_{hk}^0; \ \gamma_1 = \frac{E}{G(1-\nu^2)}; \\ &a_{ji}^0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)H_m}\int_s \varphi_j \varphi_i ds; \quad \rho_{hk}^0 = \frac{E_0 H_m}{12(1+\nu_0)}\int_s f_k f_h ds; \\ &s_{hk}^0 = \frac{E_0}{H_m(1-\nu_0^2)}\left\{\int_s f_k f_h ds + \frac{H_m^2(1-\nu_0)}{6}\int_s f_k' f_h' ds\right\}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

В коэффициентах $a_{ji}^{0}, \rho_{hk}^{0}, s_{hk}^{0}$ под интегралы включаются координатные функции только тех пластин системы, которые взаимодействуют с упругой средой. Остальные коэффициенты линейной части уравнений (1.18) имеют следующий вид:

$$a_{ji} = \int_s \varphi_j(s)\varphi_i(s)\,\delta\,ds;\ b_{ji} = \int_s \varphi_j'(s)\varphi_i'(s)\,\delta\,ds;\ m_{hk} = \int_s Jf_h'(s)\,f_k'(s)ds;$$

$$c_{jk} = \int_s \varphi_j'(s)\psi_k(s)\,\delta\,ds;\ c_{hi} = \int_s \psi_h(s)\varphi_i'(s)\,\delta\,ds;\ \alpha_{hk} = \int_s Jf_h''(s)\,f_k(s)ds;$$

$$r_{hk} = \int_s \psi_h(s)\psi_k(s)\,\delta\,ds;\ e_{hk} = \int_s J\,f_h(s)\,f_k(s)ds; \tag{1.20}$$

$$s_{hk} = \int_s [Jf_h''(s)\,f_k''(s) + \psi_k'(s)\,\psi_h'(s)\,\delta]\,ds;\ J = \delta^3/12.$$

В уравнениях и в коэффициентах приняты следующие обозначения: E_0, ν_0 соответствуют модулю деформации и коэффициенту Пуассона упругой среды; H_m – толщина деформируемого слоя упругой среды (индекс m показывает номера слоев, взаимодействующих с различными гранями системы (см. рис. 1), которая может быть разной; E, G, ν соответствуют модулю упругости, модулю сдвига и коэффициенту Пуассона материала пластинчатой системы. Если толщина деформируемого слоя среды для всех граней пластинчатой системы одинакова, то принимаем $H_m = H$. Выражения ${}^1\Phi_j$ и ${}^2\Phi_h$ в (1.18) учитывают физическую нелинейность материала оболочки и имеют следующий вид:

$${}^1\Phi_j = -\int_s (N_{1,x}\varphi_j + N_2\varphi_{j,s})ds;$$

$${}^2\Phi_h = -\int_s N_{3,x}\psi_h ds + \int_s N_2\psi_h' ds - \int_s N_{6,x}\,f_t ds + \tag{1.21}$$

$$+ \int_s (N_{4,xx}\,f_t ds + \int_s N_5\,f_{t,ss}\,ds.$$

В (1.21) индексы после запятой указывают на дифференцирование по данным переменным, а функции, находящиеся под интегралами, записываются следующим образом:

$$N_1 = -\overline{B}_1\,b_0(\nu_1 e_x + 0.5\nu_2 e_s) - \overline{Д}_2[b_1(\nu_1\chi_x + 0.5\chi_s) + b_2(\nu_1 e_x - 0.5\nu_2 e_s)];$$

$$N_2 = -\overline{B}_1\,b_0(\nu_1 e_s + 0.5\nu_2 e_x) - \overline{Д}_2[b_1(\nu_1\chi_s + 0.5\chi_x) + b_2(\nu_1 e_s - 0.5\nu_2 e_x)];$$

$$N_3 = -0.25\overline{B}_1\,b_0 e_{xs} - 0.5\overline{Д}_2(b_1\chi_{xs} + 0.5b_2 e_{xs});$$

$$N_4 = \overline{Д}_2[b_0(\nu_1\chi_x + 0.5\nu_2\chi_s) + b_1(\nu_1 e_x + 0.5\nu_2 e_s)] + \overline{Д}_1\,b_2(\nu_1\chi_x + 0.5\nu_2\chi_s); \tag{1.22}$$

$$N_5 = \overline{Д}_2[b_0(\nu_1\chi_s + 0.5\nu_2\chi_x) + b_1(\nu_1 e_s + 0.5\nu_2 e_x)] + \overline{Д}_1\,b_2(\nu_1\chi_s + 0.5\nu_2\chi_x);$$

$$N_6 = \overline{Д}_2(b_0\chi_{xs} + 0.5b_1 e_{xs}) + \overline{Д}_1\,b_2\chi_{xs},$$

где $\overline{B}_1 = 12\,E_2\,\delta$; $\overline{Д}_1 = 3\,E_2\,\delta^5/20$; $\overline{Д}_2 = E_2\,\delta^3$; $E_2 = E_1/E(1+\nu)^2$.

Выражения (1.21) и (1.22) полностью будут совпадать с полученными в [23], если решать задачу с учетом физической и геометрической нелинейностей. В оболочках средней длины можно пренебречь работой продольных изгибающих моментов M_x, и в системе уравнений (1.18) следует принять

$$e_{hk} = 0, \tag{1.23}$$

что приводит к существенному понижению порядка системы.

2. Анализ результатов расчета

Конечная реализация нелинейных дифференциальных уравнений осуществляется на ПЭВМ численным методом Рунге – Кутты [34] по программе, составленной на языке Fortran. На основании уравнений (1.18) рассчитывалась п-образная пластинчатая система (рис. 2, *а*), когда верхняя и правая пластины контактируют с упругой средой, а внешняя равномерно распределенная нагрузка *q*, расположенная в плоскости верхней грани (см. [32]), действует по левому верхнему краю в поперечном направлении по всей длине оболочки (рис. 2, *б*). Оболочка по торцам заделана в абсолютно жесткий неподвижный массив.

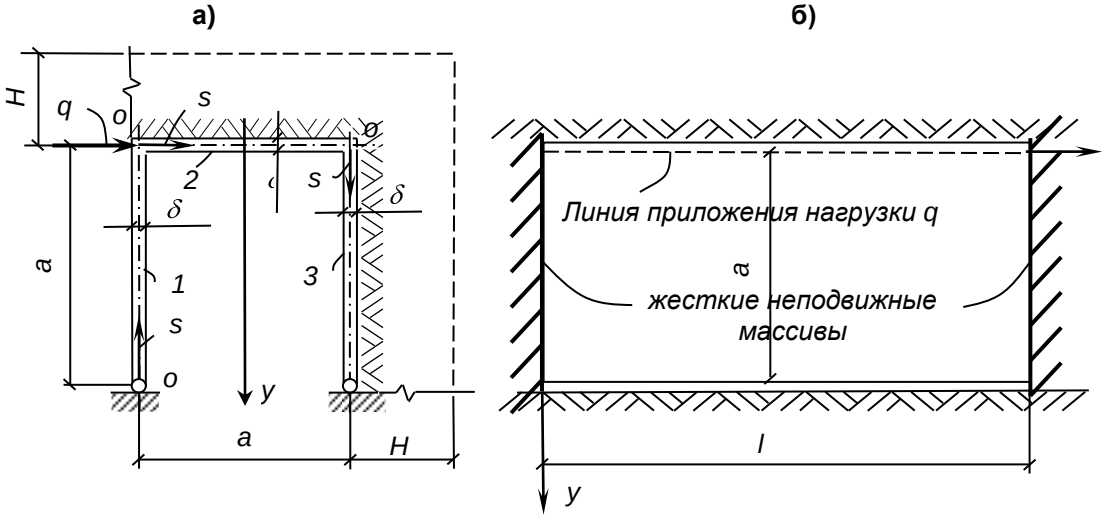


Рисунок 2. Схема действующей нагрузки и поперечного сечения оболочки в упругой среде (*а*), вид оболочки слева (*б*)

Геометрические параметры призматической системы принимались следующие: δ/a = 1/10 – отношение толщины к поперечному размеру; l/a = 5–9 – отношение длины к поперечному размеру; $H_1/a = H/a$ = 2,5 – отношение толщины деформируемых слоев к поперечному размеру оболочки. Физические постоянные $E_1/E = 10^5$, $\nu = 0$, E_0/G = 0,004, ν_0 = 0,3. $Q = q/G\delta = 5\cdot10^{-5}$ – относительная величина нагрузки.

Согласно действующей нагрузке перемещения принимаем в виде следующих разложений [32]:

$$u(x,s) = U_1(x)\varphi_1(s); \quad v(x,s) = V_1(x)\psi_1(s); \quad w(x,s) = W_1(x) f_1(s). \tag{2.1}$$

При составлении функций $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ и $f_1(s)$ обходим контур по часовой стрелке, начиная с левой опоры. Продольные перемещения $u(x,s)$ двух точек, симметричных относительно оси y, сечения x = const будут равны по величине, но противоположны по знаку. Учитывая, что нагрузку можно представить как кососимметричную, то получаем один параметр обобщенного перемещения $U_1(x)$ и принимаем соответствующее ему продольное перемещение верхнего правого угла. Обобщенным контурным перемещениям пластин в своей плоскости $V_1(x)$ соответствует функция $\psi_1(s)$.

Аналитические выражения координатных функций $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ для каждой грани можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&{}^1\varphi_1(s) = -\frac{s}{a};\ {}^2\varphi_1(s) = \frac{2s}{a} - 1;\ {}^3\varphi_1(s) = \frac{a-s}{a};\\
&{}^1\psi_1(s) = 0;\ {}^2\psi_1(s) = 1;\ {}^3\psi_1(s) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

а $f_1(s)$ выбирается соответственно обобщенным нормальным перемещениям $W_1(x)$ и принимается как прогиб точек контура поперечного сечения. Для каждой грани функции имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&{}^1f(s) = \frac{s}{3a}\left(4 - \frac{s^2}{a^2}\right);\\
&{}^2f(s) = \frac{1}{a^2}(as - s^2) + \frac{2}{3a^3}(s^3 - a^2 s);\\
&{}^3f(s) = 1 - \frac{5s}{3a} + \frac{s^2}{a^2} - \frac{s^3}{3a^3}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

В выражениях **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** верхние индексы слева при координатных функциях показывают номера элементов контура (рис. 2, а). Эпюры координатных функций представлены на рисунке 3.

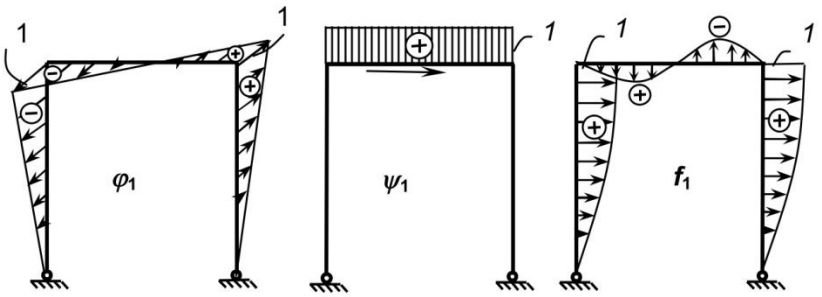


Рисунок 3. Эпюры координатных функций $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ и $f_1(s)$

Дифференциальные уравнения типа (1.18) для данной системы с учетом (1.23) будут иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 a_{11} U_1'' - \bar{b}_{11} U_1 - c_{11} V_1' = {}^1\Phi_1;\\
&c_{11} U_1' + \left[\bar{r}_{11} + \frac{2\gamma}{1+\nu}\left(m_{11} - \frac{\nu}{1-\nu}\alpha_{11}\right)\right] V_1'' - \bar{s}_{11} V_1 + Q_1 = {}^2\Phi_1.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

При определении коэффициентов $a_{11}^0, \rho_{11}^0, s_{11}^0$, входящих в состав коэффициентов $\bar{b}_{11}, \bar{r}_{11}, \bar{s}_{11}$, под интегралы будут входить координатные функции ${}^2\varphi_1$, ${}^2\psi_1$, ${}^2f_1$, ${}^3\varphi_1$, ${}^3\psi_1$, ${}^3f_1$, т. к. с упругой средой взаимодействуют верхняя и правая боковая пластины. Для вычисления этих коэффициентов используем формулы (1.19). Граничные условия для пластинчатой системы с торцами, заделанными в абсолютно жесткий неподвижный массив, запишутся так:

при x=0 и x=l: $U_i(x)$=0; $V_k(x)$ = 0; $V_k'(x) = 0$. (2.5)

Вместо краевой задачи (2.4) решаем задачу Коши для системы уравнений (2.4) с начальными условиями $U_i(x = 0) = 0$, $V_k(x = 0) = 0$ и дополнительными условиями для производных $U_i'(x=0) = r_i$, $V_k'(x=0) = r_k$. Неизвестные r_i и r_k подбираются так, чтобы были выполнены условия $U_i(x = l) = 0$; $V_k(x = l) = 0$. Уточнение значений r_i и r_k осуществляем, используя итерационный метод типа Ньютона [35]. Для реализации этого метода используется программа [36]. При этом используется метод Рунге – Кутты для интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка и подпрограмма решения системы алгебраических уравнений. На основании численного решения уравнений (2.4) и граничных условий (2.5) на рисунках 4, 5 построены графики.

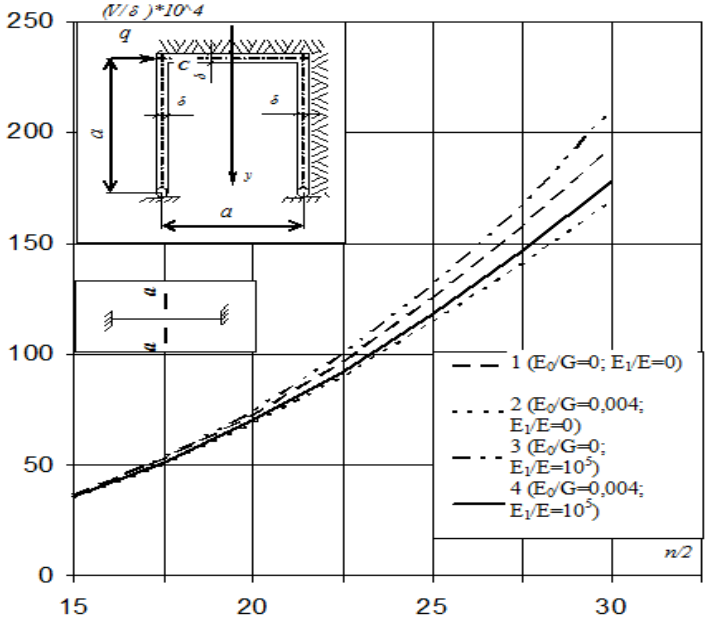


Рисунок 4. Графики изменения наибольшей относительной деформации контура в угловой точке *C* сечения *a–a* в зависимости от изменения длины оболочки с учетом упругой среды E_0 / G = 0,004 и без учета E_0 / G = 0: 1 и 2 – по линейной теории, 3 и 4 – при учете физической нелинейности

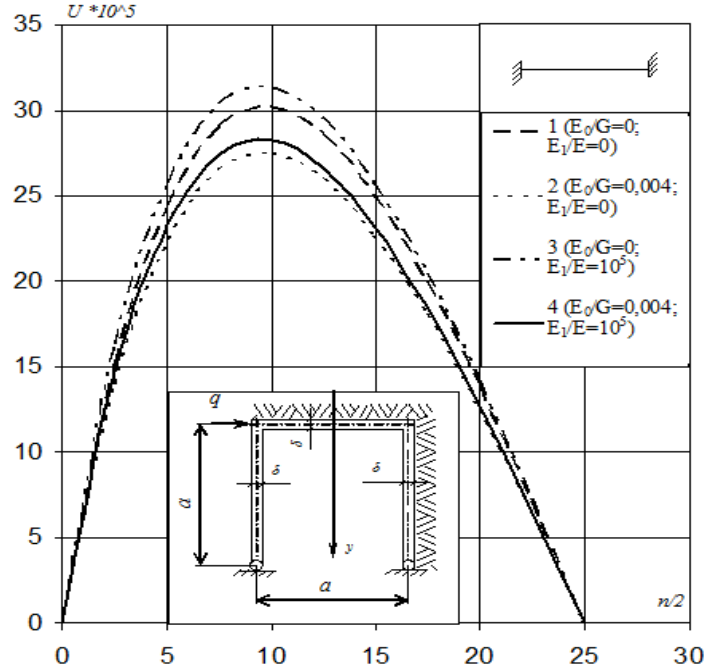


Рисунок 5. Графики изменения относительной депланации по длине оболочки с учетом упругой среды E_0 / G = 0,004 и без учета E_0 / G = 0: 1 и 2 – по линейной теории, 3 и 4 – при учете физической нелинейности

Заключение

Из графиков (рис. 4, 5) видно, что упругая среда может значительно снижать напряженно-деформированное состояние оболочек. При учете физической нелинейности увеличиваются перемещения в призматической системе. Если учитывать одновременно упругую среду и нелинейное деформирование материала оболочки, то при определенных соотношениях степени физической нелинейности и модуля деформации упругой среды напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы можно определять по линейной теории. Таким образом, на основании изложенной методики можно корректно исследовать физически нелинейные

пластинчатые системы, взаимодействующие с упругой средой. Разработанные алгоритмы и методика расчета могут быть использованы при проведении инженерных расчетов подземных сооружений проектными организациями.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №13-01-97045 р_поволжье_а.

Литература

1. Мулди Б. Расчет тонкостенных пространственных систем, контактирующих с упругой средой: Автореф. дис. канд. техн. наук. М., 2000. 22 с.
2. Березинская О.А. К расчету складчатых оболочек вращения в упругой среде // Вопросы теоретической и прикладной механики. М., 1990. С. 16–23.
3. Осадчук В.А., Николишин М.М., Маселко Т.Е. Предельное равновесие находящейся на упругом основании сферической оболочки, ослабленной трещиной // Прикладная механика. 1986. №10. С. 47–52.
4. Палатников Е.А. Прямоугольная плита на упругом основании. М.: Стройиздат, 1964. 236 с.
5. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госстройиздат, 1954. 56 с.
6. Емельянов И.Г., Кузнецов В.Ю. Контактная задача для физически нелинейной оболочки // ИМАШ УрО РАН: материалы второй международной конференции «Разрушение и мониторинг свойств металлов». Екатеринбург, 2003. С. 13–14.
7. Кузнецов О.Р. Применение метода Бубнова – Галеркина к расчету прямых замкнутых призматических оболочек с учетом физической нелинейностей // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и прочих рабочих сред. Саратов, 2003. С. 17–25.
8. Кузнецов О.Р. Уравнения Эйлера для расчета прямых замкнутых призматических оболочек с учетом физической нелинейности // Механика деформируемых сред: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 15. Саратов, 2004. С. 50–57.
9. Леонтьев Н.Н., Ибрагимов А. Изгиб призматической оболочки, свободно лежащей на статически неоднородном упругом основании // Вопросы теоретической и прикладной механики. МИСИ. М., 1987. С. 107–116. Деп. в ВИНИТИ 27.05.87 № 3799–В87.
10. Xiang-sheng C. On problems of optimal design of shallow shell with double curvature on elastic foundation // Applied Mathematics and Mechanics. 1986. No. 3. Pp. 279–284.
11. Colik M., Saygun A. A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation // International Journal of Solids and Structures. 1999. Vol. 36, No. 19. Pp. 2891–2915.
12. Шлычков С.В. Особенности динамического поведения связанных систем // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Труды Второй междунар. конф. Казань: КГУ, 2009. С. 435–438.
13. Шлычков С.В. Исследование резонансных свойств акустических панелей // Современные проблемы науки и образования. 2013. №6. С. 170.
14. Шлычков С.В. Анализ резонансных свойств тонкостенных элементов музыкальных струнных инструментов // Исследовано в России. 2000. №64. С. 924–942.
15. Шлычков С.В., Иванов С.П., Кузовков С.Г., Лоскутов Ю.В. Расчет геометрически нелинейных конструкций методом конечных элементов // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2008. №4. С.146–153.
16. Zhang Y. X., Kim K.S. Linear and Geometrically nonlinear analysis of plates and shells by a new refined non-conforming triangular plate/shell element // Computational Mechanics. 2005. Vol. 36. Issue 5. Pp. 331–342.
17. Xingang Zhou, Mingjin Chu, Jinming Liu, Shuying Qu, Haitao Fan. Geometrically Nonlinear Analysis Based on the Simple Trussl // Applied Mechanics and Materials. 2012, Vol. 166–169. Pp. 939–943.
18. Shengyi Li, Yingchun Liu, Rongbo Zhu, Hongguang Li, Wensi Ding. Geometrically Nonlinear Analysis of Long Span Composite Girder Cable-Stayed Bridge with Three Towers under Live Load // Applied Mechanics and Materials. 2010. Vol. 34–35. Pp. 371–375.

19. Ahmad K., Wu Z.G., Hasham H.J. FE-Modal Approach to Model Geometric Nonlinearities of High Aspect Ratio Wing // Applied Mechanics and Materials. 2013. Vol. 390. Pp. 28–32.

20. Autrusson T.B., Sabra K.G., Leamy M.J. Reflection of compressional and rayleigh waves on the edges of an elastic plate with quadratic nonlinearity // Journal of the Acoustical Society of America. 2012. Vol. 131. No. 3. Pp. 1928–1937.

21. Destrade M., Gilchrist M.D., Murphy J.G. Onset of nonlinearity in the elastic bending of blocks // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2010. Vol. 77. No. 6. 061015.

22. Bentahar M., El Guerjouma R., Idijmarene S., Scalerandi M. Influence of noise on the threshold for detection of elastic nonlinearity // Journal of Applied Physics. 2013. Vol. 113. No. 4. 043516.

23. Иванов С.П. Расчет пространственных пластинчатых систем с учетом физической и геометрической нелинейностей // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7. №4. С. 526–532.

24. Иванов С.П., Иванов О.Г., Шлычков С.В., Эрский А.Ф. Свободные колебания физически-нелинейных пластинчатых систем // Приволжский научный журнал. 2009. №4. С.53–60.

25. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.

26. Залигер Р. Железобетон, его расчет и проектирование. 4-е изд. Москва–Ленинград: Гос. Изд-во, 1929. 281 с.

27. Koissin V., Shipsha A., Skvortsov V. Effect of physical nonlinearity on local buckling in sandwich beams // Journal of Sandwich Structures and Materials. 2010. Vol. 12. No. 4. Pp. 477–494.

28. Blokhina N. Physical Nonlinearity and Anisotropic Features of Materials in Structure Analysis // Applied Mechanics and Materials. 2013. Vol. 405–408. Pp. 2686–2689.

29. Ragulskis K., Kibirkštis E., Dabkevičius A., Bivainis V., Miliūnas V., Ragulskis L. Investigation of physically nonlinear behaviour of polystyrene packages and their elements // MECHANIKA. Kaunas: Technologija. 2010. No.3 Vol. 83. Pp. 21–27.

30. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.

31. Тарнопольский Ю.М., Кинцыа Т.Я. О механизме передачи усилий при деформации ориентированных стеклопластиков // Механика полимеров. 1965. №1. С. 28–36.

32. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1958. 502 с.

33. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Л.: ГИТЛ, 1957. 627 с.

34. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. 368 с.

35. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.

36. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006613281. Программа расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой из нелинейно-упругих материалов / О.Г. Иванов, С.П. Иванов, Ю.В. Лоскутов (Россия). № 2006612511; Заявлено 20.07.2006; Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 18.09.2006.

Олег Геннадьевич Иванов, г. Йошкар-Ола, Россия
Тел. раб.: +7(836)686863; эл. почта: IvanovOG@volgatech.net

Сергей Владимирович Шлычков, г. Йошкар-Ола, Россия
Тел. раб.: +7(8362)686863; эл. почта: shlychkovsv@volgatech.net

© Иванов О.Г.,Шлычков С.В., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.8

Изгиб ортотропных пластин с учетом бимоментов

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник М.К. Усаров,
Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан

Аннотация. Статья посвящена усовершенствованию теории пластин с целью учета сил, моментов и бимоментов, порождаемых за счет нелинейного закона распределения перемещений в поперечном сечении пластины. Приведены интегральные соотношения для определения сил, моментов и бимоментов.

Разработанная бимоментная теория пластины описывается двумя несвязанными двумерными системами по девять в каждой системе уравнений. На каждом краю пластины в зависимости от вида закрепления задаются по девять граничных условий. Методика построения бимоментной теории основана на законе Гука, трехмерных уравнениях теории упругости и методе разложения перемещений в ряд Маклорена.

В качестве примера приведено решение задачи изгиба толстой ортотропной пластины под действием поперечной синусоидальной нагрузки. Получены численные результаты перемещений, сил, моментов, бимоментов и напряжений, сопровождаемые анализом.

Ключевые слова: закон Гука; ортотропность; теория упругости; трехмерная задача; толстая пластина; двумерная задача; сила; момент; бимомент; бимоментная теория

Изученность вопроса

Теория толстых пластин широко освещена в работах многих российских и зарубежных авторов. Подробный обзор литературы по данному направлению приведен в работах [1–4]. На современном этапе развития теории пластин динамическими задачами пластин с анизотропными свойствами занимаются авторы работ [5–8]. Задачами колебаний пластин занимались M.R. Karamooz Ravari, M.R. Forouzan [9], ими получены частотные уравнения ортотропной круговой кольцевой пластины для общих граничных условий в плоскости вибрации. В работе [10] рассматриваются решения переходных колебаний прямоугольной вязкоупругой ортотропной пластины для конкретных деформационных моделей по теориям Флюгге и Тимошенко – Миндлина. Статья [11] посвящена аналитическому решению проблемы вынужденных установившихся колебаний ортотропной пластины. Методом суперпозиции задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных уравнений. В [12] разрабатывается пространственный подход для трехмерного анализа прямоугольных ортотропных упругих пластин, подвергнутых внешним нагрузкам на верхней и нижней гранях. В. Бирман [13] разработал теорию более высокого порядка для толстой многослойной ламинированной композитной плиты, подчеркивая роль нормальных и поперечных деформаций сдвига. В [14] рассмотрена задача изгиба ортотропной прямоугольной пластины, лежащей на двупараметрическом упругом основании. Статья [15] посвящена нелинейной теории пластин.

Теоретические исследования В.З. Власова [16] показали, что при нарушении гипотезы плоских сечений, кроме растягивающих и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов, появляются еще дополнительные силовые факторы, так называемые бимоменты. Автором статей [17–20] решены задачи изгиба и колебаний толстых пластин на основе теории пластин, построенной в рамках трехмерной теории упругости, с помощью метода разложения перемещения по одной из пространственных координат в бесконечный ряд Маклорена.

В данной работе приводится методика построения теории пластин с учетом бимоментов, порождаемых за счет распределения перемещений точек поперечного сечения по нелинейному закону. Предлагаемая теория пластин, кроме растягивающих и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов, включает еще и бимоменты. При построении бимоментной теории учитываются все компоненты тензора напряжения и деформации: σ_{ij}, ε_{ij}, $(i, j = 1,3)$. Компоненты вектора перемещения являются функциями трех пространственных координат: $u_1(x_1, x_2, z)$, $u_2(x_1, x_2, z)$, $u_3(x_1, x_2, z)$. В работе приводятся определяющие соотношения сил, моментов, бимоментов и уравнения равновесия относительно этих силовых факторов.

Постановка и метод решения задачи

Рассмотрим ортотропную толстую пластину постоянной толщины $H = 2h$ и размерами a, b в плане. Введем обозначения: E_1, E_2, E_3 – модули упругости; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$– коэффициенты Пуассона материала пластины. Пластину рассмотрим как трехмерное тело, материал которого подчиняется обобщенному закону Гука:

$$\sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, \tag{1.а}$$

$$\sigma_{22} = E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + E_{23}\varepsilon_{33}, \tag{1.б}$$

$$\sigma_{33} = E_{31}\varepsilon_{11} + E_{32}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, \tag{1.в}$$

$$\sigma_{12} = G_{12}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = G_{13}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = G_{23}\varepsilon_{23}. \tag{1.г}$$

Здесь:

$$E_{11} = E_1 g_{11},\ E_{22} = E_2 g_{22},\ E_{33} = E_3 g_{33},\ E_{12} = E_{21} = E_1 g_{12} = E_{12} g_{21},$$

$$E_{12} = E_{21} = E_1 g_{12} = E_{12} g_{21},\ E_{13} = E_{31} = E_1 g_{13} = E_3 g_{31},\ E_{23} = E_{32} = E_2 g_{23} = E_3 g_{32},$$

$$g_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\mu^2},\ g_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{1-\mu^2},\ g_{22} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\mu^2},$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\mu^2} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{1-\mu^2},\ g_{13} = g_{31} = \frac{\nu_{13}+\nu_{21}\nu_{32}}{1-\mu^2} = \frac{\nu_{31}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\mu^2},$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{12}}{1-\mu^2} = \frac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{21}}{1-\mu^2},\ \mu^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{13}\nu_{31} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}.$$

Введем декартову систему координат x_1, x_2 и z. Ось oz направим вертикально вниз. Пусть по нижней $z = h$ и верхней $z = -h$ лицевым поверхностям пластины приложены распределенные поверхностные, нормальные и касательные нагрузки. Нормальные нагрузки в направлении оси oz обозначим $q_3^{(+)}$, $q_3^{(-)}$. Касательные нагрузки, приложенные в направлении ox_1, ox_2, обозначим $q_k^{(+)}$, $q_k^{(-)}$, $(k = \overline{1,2})$. Перемещения точек верхних $z = -h$ и нижних $z = h$ волокон пластины обозначим $u_i^{(-)}$, $u_i^{(+)}$, $(i = 1,3)$.

Воспользуемся трехмерными уравнениями равновесия теории упругости:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \tag{2.а}$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \tag{2.б}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0. \tag{2.в}$$

Граничные условия на нижней $z = h$ и верхней $z = -h$ поверхностях пластины и имеют вид:

$$\sigma_{33} = q_3^{(+)}, \quad \sigma_{31} = q_1^{(+)}, \ \sigma_{32} = q_2^{(+)} \text{ при } z = h; \tag{3.а}$$

$$\sigma_{33} = q_3^{(-)}, \quad \sigma_{31} = q_1^{(-)}, \ \sigma_{32} = q_2^{(-)} \text{ при } z = -h. \tag{3.б}$$

Методика построения бимоментной теории пластин основана на обобщенном законе Гука (1), трехмерных уравнениях теории упругости (2), граничных условиях на лицевых поверхностях (3) и разложении перемещений в ряд Маклорена в виде:

$$u_k = B_0^{(k)} + B_1^{(k)}\frac{z}{h} + B_2^{(k)}\left(\frac{z}{h}\right)^2 + B_3^{(k)}\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \ldots + B_i^{(k)}\left(\frac{z}{h}\right)^i +, \quad k = 1,2, \tag{4.а}$$

$$u_3 = A_0 + A_1\frac{z}{h} + A_2\left(\frac{z}{h}\right)^2 + A_3\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \ldots + A_i\left(\frac{z}{h}\right)^i + \tag{4.б}$$

Здесь $B_i^{(k)}$, A_i – неизвестные функции двух пространственных координат $B_i^{(k)} = B_i^{(k)}(x_1, x_2)$, $A_i = A_i(x_1, x_2)$:

$$B_i^{(k)} = \frac{1}{i!}h^i\left(\frac{\partial^i u_k}{\partial z^i}\right)_{z=0}, \quad k = 1,2, \qquad A_i = \frac{1}{i!}h^i\left(\frac{\partial^i u_3}{\partial z^i}\right)_{z=0}.$$

Предлагаемая бимоментная теория пластин описывается двумя несвязанными задачами, каждая из которых формулируется на основе девяти двумерных уравнений с соответствующими краевыми условиями.

Первая задача состоит из двух уравнений относительно продольных и тангенциальных усилий и четырех дополнительно построенных уравнений бимоментов относительно девяти неизвестных кинематических функций:

$$\overline{W} = \frac{u_3^{(+)} - u_3^{(-)}}{2}, \quad \bar{r} = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} u_3 z dz, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2h^4}\int_{-h}^{h} u_3 z^3 dz, \tag{5.а}$$

$$\bar{u}_k = \frac{u_k^{(+)} + u_k^{(-)}}{2}, \quad \overline{\psi}_k = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_k dz, \quad \bar{\beta}_k = \frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h} u_k z^2 dz, \quad (k = 1,2). \tag{5.б}$$

Уравнения равновесия относительно продольных и тангенциальных усилий, действующих в плоскости пластины, получаются интегрированием двух первых уравнений теории упругости (2) по координате z:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + 2\bar{q}_1 = 0, \tag{6.а}$$

$$\frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + 2\bar{q}_2 = 0, \tag{6.б}$$

где N_{11}, N_{12}, N_{22} – усилия, определяемые из соотношений

$$N_{11} = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}dz = E_{11}H\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12}H\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x_2} + 2E_{13}\overline{W}, \tag{7.а}$$

$$N_{22} = \int_{-h}^{h}\sigma_{22}dz = E_{12}H\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22}H\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x_2} + 2E_{23}\overline{W}, \tag{7.б}$$

$$N_{12} = N_{21} = \int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz = G_{12}\left(H\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x_1} + H\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x_1}\right), \tag{7.в}$$

$\bar{q}_k, (k = 1,2)$, $\bar{q}_3$ – грузовые члены уравнения, которые определяются по формулам:

$$\bar{q}_k = \frac{q_k^{(+)} - q_k^{(-)}}{2}, \ (k = 1,2), \quad \bar{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} + q_3^{(-)}}{2}. \tag{7.г}$$

Как видим, в двух уравнениях (6) содержатся три неизвестные функции $\overline{\psi}_1$, $\overline{\psi}_2$, $\overline{W}$. Чтобы дополнить систему, построим уравнения бимоментов. Сначала введем продольные и тангенциальные бимоменты T_{11}, T_{22}, T_{12}:

$$T_{11} = \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{11}z^2dz = H\left(E_{11}\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12}\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{13}\frac{2\overline{W}-4\overline{r}}{H}\right), \quad (8.а)$$

$$T_{22} = \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{22}z^2dz = H\left(E_{12}\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22}\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{23}\frac{2\overline{W}-4\overline{r}}{H}\right), \quad (8.б)$$

$$T_{12} = T_{21} = \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}z^2dz = HG_{12}\left(\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_2}\right). \quad (8.в)$$

Введем интенсивности поперечных бимоментов $\overline{p}_{13}$, $\overline{p}_{23}$ и $\overline{\tau}_{13}$, $\overline{\tau}_{23}$ от касательных напряжений σ_{13}, σ_{23}:

$$\overline{p}_{k3} = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{k3}zdz = G_{k3}\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial x_k} + \frac{2(\overline{u}_k - \overline{\psi}_k)}{H}\right), \quad (k=1,2), \quad (9.а)$$

$$\overline{\tau}_{k3} = \frac{1}{2h^4}\int_{-h}^{h}\sigma_{k3}z^3dz = G_{k3}\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial x_k} + \frac{2(\overline{u}_k - 3\overline{\beta}_k)}{H}\right), \quad (k=1,2). \quad (9.б)$$

Введем интенсивности нормальных бимоментов $\overline{p}_{33}$ и $\overline{\tau}_{33}$ от нормального напряжения σ_{33} в виде соотношений:

$$\overline{p}_{33} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{33}dz = E_{31}\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{32}\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x_2} + E_{33}\frac{2\overline{W}}{H}, \quad (10.а)$$

$$\overline{\tau}_{33} = \frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}\sigma_{33}z^2dz = E_{31}\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{32}\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{33}\frac{2\overline{W}-4\overline{r}}{H}. \quad (10.б)$$

Уравнения относительно продольных бимоментов, действующих в плоскости пластины, получаются из двух первых уравнений теории упругости (2). Умножив их на z^2, а после проинтегрировав их по координате z, получим:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} - 4\overline{p}_{13} + 2\overline{q}_1 = 0, \quad (11.а)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} - 4\overline{p}_{23} + 2\overline{q}_2 = 0. \quad (11.б)$$

Умножим третье уравнение теории упругости на z и проинтегрируем по координате z, затем умножим его на z^3 и проинтегрируем по координате z, получим пятое и шестое уравнения в интенсивности поперечных бимоментов:

$$\frac{\partial\overline{p}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\overline{p}_{23}}{\partial x_2} - \frac{2\overline{p}_{33}}{H} + \frac{2\overline{q}_3}{H} = 0, \quad (12.а)$$

$$\frac{\partial\overline{\tau}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\overline{\tau}_{23}}{\partial x_2} - \frac{6\overline{\tau}_{33}}{H} + \frac{2\overline{q}_3}{H} = 0. \quad (12.б)$$

Используя граничные условия (3), ряды Маклорона (4) и соотношения (5), построим еще три уравнения, которые имеют вид:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{4}\left(1\bar{\beta}_k - 3\bar{\psi}_k\right) - \frac{1}{20}H\frac{\partial \bar{W}}{\partial x_k} + \frac{1}{20}\frac{H\bar{q}_k}{G_{k3}}, \quad \left(k = 1,2\right), \tag{13.а}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\left(1\bar{\gamma} - 7\bar{r}\right) - \frac{1}{30}H\left(\frac{E_{31}}{E_{33}}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{E_{32}}{E_{33}}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\right) + \frac{H\bar{q}_3}{30E_{33}}. \tag{13.б}$$

Уравнения равновесия (6), (11), (12) и (13) составляют совместную систему дифференциальных уравнений, состоящую из девяти уравнений относительно девяти неизвестных функций: $\bar{\psi}_1,\ \bar{\psi}_2,\ \bar{\beta}_1,\ \bar{\beta}_1,\ \bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{r},\ \bar{\gamma},\ \bar{W}$.

Если на границе пластины перемещения равны нулю, то граничные условия для уравнений (6), (11), (12) и (13) на краях $x_1 = const$ и $x_2 = const$ имеют вид:

$$\bar{\psi}_1 = 0,\ \bar{\psi}_2 = 0,\ \bar{\beta}_1 = 0,\ \bar{\beta}_2 = 0,\ \bar{r} = 0,\ \bar{\gamma} = 0,\ \bar{u}_1 = 0,\ \bar{u}_2 = 0,\ \bar{W} = 0. \tag{14}$$

Если край оперт, то на краю $x_1 = const$:

$$N_{11} = 0,\ T_{11} = 0,\ \bar{\psi}_2 = 0,\ \bar{\beta}_2 = 0,\ \bar{\sigma}_{11} = 0,\ \bar{u}_2 = 0,\ \bar{r} = 0,\ \bar{\gamma} = 0,\ \bar{W} = 0. \tag{15}$$

На краю $x_2 = const$:

$$N_{22} = 0,\ T_{22} = 0,\ \bar{\psi}_1 = 0,\ \bar{\beta}_1 = 0,\ \bar{\sigma}_{22} = 0,\ \bar{u}_1 = 0,\ \bar{r} = 0,\ \bar{\gamma} = 0,\ \bar{W} = 0, \tag{16}$$

где $\bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{22},\ \bar{\sigma}_{12}$ определяются по формулам:

$$\bar{\sigma}_{11} = \left(E_{11} - \frac{E_{13}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \left(E_{12} - \frac{E_{13}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{13}}{E_{33}}\bar{q}_3, \tag{17.а}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \left(E_{21} - \frac{E_{23}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \left(E_{22} - \frac{E_{23}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{23}}{E_{33}}\bar{q}_3, \tag{17.б}$$

$$\bar{\sigma}_{12} = G_{12}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}\right). \tag{17.в}$$

Вторая задача состоит из уравнений относительно изгибающих моментов, крутящего момента, перерезывающих сил и бимоментов относительно девяти неизвестных кинематических функций:

$$\tilde{W} = \frac{u_3^{(+)} + u_3^{(-)}}{2},\quad \tilde{r} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_3 dz,\quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h} u_3 z^2 dz, \tag{18.а}$$

$$\tilde{u}_k = \frac{u_k^{(+)} - u_k^{(-)}}{2},\quad \tilde{\psi}_k = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} u_k z dz,\quad \tilde{\beta}_k = \frac{1}{2h^4}\int_{-h}^{h} u_k z^3 dz,\ (k = 1,2). \tag{18.б}$$

Выражения (18.а) включают два уравнения относительно изгибающих и крутящих моментов и одно уравнение относительно перерезывающих сил. Умножим первое и второе уравнения теории упругости на координату z и проинтегрируем по z, получим уравнения равновесия пластины в моментах и силах:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}-Q_{13}+2\tilde{q}_1=0, \tag{19.а}$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-Q_{23}+2\tilde{q}_2=0. \tag{19.б}$$

Интегрируя по координате z третье уравнение теории упругости (2), получим уравнение равновесия в силах:

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2}+2\tilde{q}_3=0. \tag{20}$$

Здесь $\tilde{q}_k,(k=1,2)$, $\tilde{q}_3$ – грузовые члены уравнения, определяемые соотношениями:

$$\tilde{q}_k=\frac{q_k^{(+)}+q_k^{(-)}}{2},\ (k=1,2),\quad \tilde{q}_3=\frac{q_3^{(+)}-q_3^{(-)}}{2}. \tag{21}$$

Здесь изгибающие и крутящие моменты запишутся в виде:

$$M_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}zdz=\frac{H^2}{2}\left(E_{11}H\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{12}H\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x_2}-E_{13}\frac{2(\tilde{r}-\tilde{W})}{H}\right), \tag{22.а}$$

$$M_{22}=\int_{-h}^{h}\sigma_{22}zdz=\frac{H^2}{2}\left(E_{12}H\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{22}H\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x_2}-E_{23}\frac{2(\tilde{r}-\tilde{W})}{H}\right), \tag{22.б}$$

$$M_{12}=M_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}zdz=G_{12}\frac{H^2}{2}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x_1}\right). \tag{22.в}$$

Выражения для определения перерезывающих сил имеют вид:

$$Q_{13}=\int_{-h}^{h}\sigma_{13}dz=G_{13}(2\tilde{u}_1+H\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x_1}),\quad Q_{23}=\int_{-h}^{h}\sigma_{23}dz=G_{23}(2\tilde{u}_2+H\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x_2}). \tag{23}$$

Уравнения равновесия пластины относительно бимоментов получаются умножением двух первых уравнений теории упругости (2) на z^3 и интегрированием их по координате z:

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial P_{12}}{\partial x_2}-3H\tilde{p}_{13}+H\tilde{q}_1=0, \tag{24.а}$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial P_{22}}{\partial x_2}-3H\tilde{p}_{23}+H\tilde{q}_2=0. \tag{24.б}$$

Уравнение равновесия пластины относительно интенсивности поперечных бимоментов получится умножением третьего уравнения теории упругости (2) на z^2 и интегрированием его по координате z:

$$H\frac{\partial\tilde{p}_{13}}{\partial x_1}+H\frac{\partial\tilde{p}_{23}}{\partial x_2}-4\tilde{p}_{33}+2\tilde{q}_3=0. \tag{25}$$

В уравнениях (24) бимоменты P_{11}, P_{22} P_{12} определяются по следующим выражениям:

$$P_{11}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{11}z^3dz=\frac{H^2}{2}\left(E_{11}\frac{\partial\tilde{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{12}\frac{\partial\tilde{\beta}_2}{\partial x_2}-E_{13}\frac{2(3\tilde{\gamma}-\tilde{W})}{H}\right), \quad (26.а)$$

$$P_{22}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{22}z^3dz=\frac{H^2}{2}\left(E_{12}\frac{\partial\tilde{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{22}\frac{\partial\tilde{\beta}_2}{\partial x_2}-E_{23}\frac{2(3\tilde{\gamma}-\tilde{W})}{H}\right), \quad (26.б)$$

$$P_{12}=P_{21}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}z^3dz=\frac{H^2}{2}G_{12}\left(\frac{\partial\tilde{\beta}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{\beta}_2}{\partial x_1}\right). \quad (26.в)$$

Интенсивности поперечных и нормальных бимоментов $\tilde{p}_{13}$, $\tilde{p}_{23}$ и $\tilde{p}_{33}$ определяются выражениями

$$\tilde{p}_{k3}=\frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}\sigma_{k3}z^2dz=G_{k3}\left(\frac{2\tilde{u}_k-4\tilde{\psi}_k}{H}+\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial x_k}\right), \quad k=1,2, \quad (27.а)$$

$$\tilde{p}_{33}=\frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{33}zdz=E_{31}\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{31}\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_1}-E_{33}\frac{2(\tilde{r}-\tilde{W})}{H}. \quad (27.б)$$

Используя граничные условия (3), ряд Маклорона (4) и соотношения (5), построим еще два уравнения:

$$\tilde{u}_k=\frac{1}{2}\left(1\tilde{\beta}_k-7\tilde{\psi}_k\right)-\frac{1}{30}H\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x_k}+\frac{1}{30}\frac{H\tilde{q}_k}{G_{k3}}, \quad k=1,2, \quad (28.а)$$

$$\tilde{W}=\frac{1}{4}\left(1\tilde{\gamma}-3\tilde{r}\right)-\frac{1}{20}H\left(\frac{E_{31}}{E_{33}}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_1}+\frac{E_{32}}{E_{33}}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_2}\right)+\frac{H\tilde{q}_3}{20E_{33}}. \quad (28.б)$$

Системы дифференциальных уравнений равновесия (19), (20), (24), (25) и (28) составляют совместную систему из девяти уравнений относительно девяти неизвестных функций $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{r}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{W}$.

Если на границе пластины перемещения равны нулю, то граничные условия для уравнений (19), (20), (24), (25) и (28) на краях $x_1=const$ и $x_2=const$ имеют вид:

$$\tilde{\psi}_1=0,\quad \tilde{\psi}_2=0,\quad \tilde{\beta}_1=0,\quad \tilde{\beta}_2=0,\quad \tilde{r}=0,\quad \tilde{\gamma}=0,\ \tilde{u}_1=0;\quad \tilde{u}_2=0,\quad \tilde{W}=0. \quad (29.а)$$

Если края пластины оперты, то на краях $x_1=const$ и $x_2=const$

$$M_{11}=0,\quad P_{11}=0,\quad \tilde{\psi}_2=0,\quad \tilde{\beta}_2=0,\quad \tilde{\sigma}_{11}=0,\quad \tilde{u}_2=0,\quad \tilde{r}=0,\quad \tilde{\gamma}=0,\quad \tilde{W}=0, \quad (29.б)$$

$$M_{22}=0,\quad P_{22}=0,\quad \tilde{\psi}_1=0,\quad \tilde{\beta}_1=0,\quad \tilde{\sigma}_{22}=0,\quad \tilde{u}_1=0,\quad \tilde{r}=0,\quad \tilde{\gamma}=0,\quad \tilde{W}=0, \quad (29.в)$$

где величины $\tilde{\sigma}_{11},\tilde{\sigma}_{12},\tilde{\sigma}_{22}$ определяются по следующим формулам:

$$\tilde{\sigma}_{11}=\left(E_{11}-\frac{E_{13}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_1}+\left(E_{12}-\frac{E_{13}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_2}+\frac{E_{13}}{E_{33}}\tilde{q}_3, \quad (30.а)$$

$$\tilde{\sigma}_{22}=\left(E_{21}-\frac{E_{23}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_1}+\left(E_{22}-\frac{E_{23}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_2}+\frac{E_{23}}{E_{33}}\tilde{q}_3, \quad (30.б)$$

$$\tilde{\sigma}_{12}=G_{12}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_1}\right). \quad (30.в)$$

Итак, сформулирована задача изгиба пластины на основе бимоментной теории толстых пластин. Преимущество бимоментной теории перед существующими теориями заключается в высокой точности и в хорошей применимости ее в решении практических задач определения напряжений и перемещений ортотропных пластин.

Пример расчета

В качестве примера рассмотрим изгиб пластины, нагруженной только по верхней лицевой поверхности $z=-h$ нормальной нагрузкой:

$$q_3^{(-)} = -q_0 \sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b},$$

где q_0 – параметр нагрузки.

Решение системы уравнений (6), (11), (12) и (13) при граничных условиях (15) и (16) имеет вид:

$$\overline{\psi}_1 = C_1\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{\psi}_2 = C_2\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\quad \overline{r} = C_3\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\qquad (32.а)$$

$$\overline{\beta}_1 = C_4\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{\beta}_2 = C_5\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{\gamma} = C_6\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\qquad (32.б)$$

$$\overline{u}_1 = C_7\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{u}_2 = C_8\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{W} = C_9\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}).\qquad (32.в)$$

Подставляя решения (32) в системы уравнений (6), (11), (12) и (13), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно девяти постоянных неизвестных $C_1, C_2, ..., C_9$. Решение системы уравнений (19), (20), (24), (25) и (28), удовлетворяющее граничным условиям (29.б) и (29.в), имеет вид:

$$\tilde{\psi}_1 = D_1\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \tilde{\psi}_2 = D_2\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\quad \tilde{r} = D_3\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\qquad (33.а)$$

$$\tilde{\beta}_1 = D_4\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \tilde{\beta}_2 = D_5\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \tilde{\gamma} = D_6\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\qquad (33.б)$$

$$\tilde{u}_1 = D_7\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \tilde{u}_2 = D_8\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \tilde{W} = D_9\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}).\qquad (33.в)$$

Подставляя решения (33) в системы уравнений (19), (20), (24), (25) и (28), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно девяти постоянных неизвестных $D_1, D_2, ..., D_9$.

С помощью решений алгебраических систем уравнений получены численные значения перемещений и напряжений для прямоугольной изотропной пластины с относительной толщиной $\frac{H}{b}=\frac{1}{4}$ при различных значениях отношения $\frac{H}{a}$. Значения коэффициентов Пуассона принимались $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$.

В таблицах 1–3 приведены численные значения, полученные при решении первой задачи. В таблице 1 представлены численные результаты расчета обобщенных перемещений $\frac{E_1\overline{\psi}_1}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\psi}_2}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\beta}_1}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\beta}_2}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{r}}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\gamma}}{Hq_0}$. Расчеты показывают, что с увеличением размера пластины уменьшаются значения перемещений $\overline{\psi}_2$, $\overline{\beta}_2$, а перемещения $\overline{\psi}_1$, $\overline{\beta}_1$ в другом направлении, наоборот, увеличиваются. С увеличением этого размера пластины значения нормальных перемещений $\overline{r}$, $\overline{\gamma}$ практически не меняются.

Таблица 1. Значения кинематических функций первой задачи

H/b	$E_1\overline{\psi}_1/Hq_0$	$E_1\overline{\psi}_2/Hq_0$	$E_1\overline{\beta}_1/Hq_0$	$E_1\overline{\beta}_2/Hq_0$	$E_1\overline{r}/Hq_0$	$E_1\overline{\gamma}/Hq_0$
1/4	−0.1239	−0.1239	−0.0376	−0.0376	−0.0763	−0.0456
1/6	−0.1717	−0.1145	−0.0535	−0.0356	−0.0761	−0.0456
1/10	−0.2139	−0.0856	−0.0675	−0.0270	−0.0761	−0.0456

В таблице 2 приведены численные результаты расчета безразмерных продольных сил $n_{11}=\dfrac{N_{11}}{H}$, $n_{22}=\dfrac{N_{22}}{H}$, $n_{12}=\dfrac{N_{12}}{H}$ и бимоментов $t_{11}=\dfrac{2T_{11}}{H^2}$, $t_{22}=\dfrac{2T_{22}}{H^2}$, $t_{12}=\dfrac{2T_{12}}{H^2}$. Как видим, при увеличении размера пластины b значения силы и бимомента пластины N_{22}, T_{22} увеличиваются, а значения сил N_{11}, N_{12} и бимоментов T_{11}, T_{12} уменьшаются.

Таблица 2. Значения продольных сил и бимоментов первой задачи

H/b	n_{11}/q_0	n_{22}/q_0	n_{12}/q_0	t_{11}/q_0	t_{22}/q_0	t_{12}/q_0
1/4	−0.0748	−0.0748	−0.0748	−0.0998	−0.0998	−0.0227
1/6	−0.0461	−0.1034	−0.0692	−0.0896	−0.1075	−0.0215
1/10	−0.0207	−0.1292	−0.0517	−0.0808	−0.1150	−0.0163

В таблице 3 приведены безразмерные численные результаты расчета кинематических функций $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{W}$ и безразмерных обобщенных напряжений $\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{22}$, $\overline{\sigma}_{12}$. С увеличением размера пластины b значения перемещения $\overline{u}_2$ и напряжений $\overline{\sigma}_{11}, \overline{\sigma}_{12}$ уменьшаются, а значения перемещения $\overline{u}_1$ и напряжения $\overline{\sigma}_{22}$ увеличиваются. Отметим, что увеличение этого параметра практически не влияет на значение нормального перемещения $\overline{W}$.

Таблица 3. Значения перемещений и напряжений первой задачи

H/b	$E_1\overline{u}_1/Hq_0$	$E_1\overline{u}_2/Hq_0$	$E_1\overline{W}_1/Hq_0$	$\overline{\sigma}_{11}/q_0$	$\overline{\sigma}_{22}/q_0$	$\overline{\sigma}_{12}/q_0$
1/4	−0.0956	−0.0956	−0.2270	−0.1070	−0.1070	−0.0577
1/6	−0.1430	−0.0953	−0.2273	−0.0744	−0.1224	−0.0576
1/10	−0.1850	−0.0740	−0.2273	−0.0470	−0.1408	−0.0447

В таблицах 4–6 приведены численные результаты, полученные при решении второй задачи. В таблице 4 приводятся безразмерные результаты расчета кинематических функций $\dfrac{E_1\tilde{\psi}_1}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\psi}_2}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\beta}_1}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\beta}_2}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{r}}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\gamma}}{Hq_0}$. Отметим, что с увеличением размера пластины b увеличиваются значения перемещений $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\beta}_1$, а в другом направлении пластины размером a перемещения нормального направления пластины $\tilde{r}$, $\tilde{\gamma}$ также увеличиваются. Перемещения $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\beta}_2$ в направлении размера b сначала увеличиваются, а потом уменьшаются.

Таблица 4. Значения кинематических функций второй задачи

H/b	$E_1\tilde{\psi}_1/Hq_0$	$E_1\tilde{\psi}_2/Hq_0$	$E_1\tilde{\beta}_1/Hq_0$	$E_1\tilde{\beta}_2/Hq_0$	$E_1\tilde{r}/Hq_0$	$E_1\tilde{\gamma}/Hq_0$
1/4	−0.8897	−0.8897	−0.5420	−0.5420	9.2752	3.0633
1/6	−1.7319	−1.1546	−1.0505	−0.7002	16.6581	5.5081
1/10	−2.7063	−1.0825	−1.6378	−0.6552	24.9393	8.2541

В таблице 5 приведены безразмерные численные результаты расчета изгибающих моментов сил $m_{11} = \frac{2M_{11}}{H^2}$, $m_{22} = \frac{2M_{22}}{H^2}$, продольных изгибающих бимоментов $p_{11} = \frac{2P_{11}}{H^2}$, $p_{22} = \frac{2P_{22}}{H^2}$ и перерезывающих сил Q_{13}/Hq_0, Q_{23}/Hq_0. При увеличении размера пластины b значения момента, силы и бимомента m_{11}, Q_{13}, P_{11} увеличиваются, а значения момента, силы и бимомента m_{22}, Q_{23}, P_{22} увеличиваются, а потом уменьшаются.

Таблица 5. Значения моментов, бимоментов и перерезывающих сил второй задачи

H/b	m_{11}/q_0	m_{22}/q_0	p_{11}/q_0	p_{22}/q_0	Q_{13}/Hq_0	Q_{23}/Hq_0
1/4	1.0836	1.0836	0.6570	0.6570	0.6366	0.6366
1/6	1.7796	1.1983	1.0764	0.7238	0.8815	0.5876
1/10	2.5335	1.1600	1.5304	0.6992	1.0976	0.4390

По таблицам 6–8 можно сделать аналогичные выводы по анализу результатов расчетов. В таблице 6 приведены безразмерные численные результаты расчета кинематических функций $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{W}$ и обобщенных напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_{22}$, $\tilde{\sigma}_{12}$.

Таблица 6. Значения перемещений и напряжений для второй задачи

H/b	$E_1\tilde{u}_1/Hq_0$	$E_1\tilde{u}_2/Hq_0$	$E_1\tilde{W}/Hq_0$	$\tilde{\sigma}_{11}/q_0$	$\tilde{\sigma}_{22}/q_0$	$\tilde{\sigma}_{12}/q_0$
1/4	−2.8147	−2.8147	9.0498	3.3724	3.3724	−1.7005
1/6	−5.3957	−3.5971	16.3112	5.4921	3.6811	−2.1732
1/10	−8.3667	−3.3467	24.4851	7.7820	3.5360	−2.0219

Максимальные значения перемещений и напряжений пластины достигаются на лицевых поверхностях пластины и определяются решениями первой и второй задачи. Ниже приводим формулы для определения перемещений и напряжений на лицевых поверхностях пластины $z = -h$ и $z = h$:

$$u_i^{(-)} = \bar{u}_i - \tilde{u}_i, \quad u_i^{(+)} = \bar{u}_i + \tilde{u}_i, \ (i = 1,2), \quad u_3^{(-)} = \tilde{W} - \bar{W}, \quad u_3^{(+)} = \tilde{W} + \bar{W}$$

$$\sigma_{ij}^{(-)} = \bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(+)} = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2).$$

В таблицах 7 и 8 приведены безразмерные численные результаты расчета перемещений $\frac{E_1u_1}{Hq_0}$, $\frac{E_1u_2}{Hq_0}$, $\frac{E_1u_3}{Hq_0}$ и напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} на верхнем (таблица 7) и нижнем (таблица 8) слоях пластины.

Таблица 7. Значения перемещений и напряжений на верхнем слое пластины

H/b	$E_1u_1^{(-)}/Hq_0$	$E_1u_2^{(-)}/Hq_0$	$E_1u_3^{(-)}/Hq_0$	$\sigma_{11}^{(-)}/q_0$	$\sigma_{22}^{(-)}/q_0$	$\sigma_{12}^{(-)}/q_0$
1/4	2.7192	2.7192	9.2764	−3.4794	−3.4794	1.6428
1/6	5.2527	3.5018	16.5384	−5.5665	−3.8035	2.1156
1/10	8.1818	3.2727	24.7125	−7.8290	−3.6768	1.9772

Таблица 8. Значения перемещений и напряжений на нижнем слое пластины

H/b	$E_1u_1^{(+)}/Hq_0$	$E_1u_2^{(+)}/Hq_0$	$E_1u_3^{(+)}/Hq_0$	$\sigma_{11}^{(+)}/q_0$	$\sigma_{22}^{(+)}/q_0$	$\sigma_{12}^{(+)}/q_0$
1/4	−2.9103	−2.9103	8.8227	3.2654	3.2654	−1.7583
1/6	−5.5388	−3.6924	16.0839	5.4177	3.5587	−2.2308
1/10	−8.5517	−3.4207	24.2588	7.7350	3.3951	−2.0666

Заключение

В ходе исследования были получены следующие результаты:

- сформулирована задача изгиба толстых ортотропных пластин с учетом бимоментов;
- построено аналитическое решение задачи изгиба толстой ортотропной пластины;
- получены численные результаты, представляющие кинематические функции обобщенных перемещений, сил, моментов, бимоментов и напряжений.

Литература

1. Амбарцумян А.С. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика оболочек и пластин. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин: дис.. д-ра физ.-мат наук. Казань, 2003. 402 с.
4. Карпов В.В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения. М.: АСВ, 1999. 154 с.
5. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6. С. 38–47.
6. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Известия Орловского гос. техн. ун-та. Серия «Строительство, транспорт». 2007. №4. С. 20–23.
7. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7. С.46–54.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С, Хачатрян Г.Г. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластин переменной толщины // Изв. нац. АН Армении. Сер. мех. 1998. Т.51. №2. С. 27–36.
9. Karamooz Ravari M.R., Forouzan M.R. Frequency equations for the in-plane vibration of orthotropic circular annular plate // Archive of Applied Mechanics. 2011. Vol. 81. No.9. Pp. 1307–1322.
10. Soukup J., Valeš F., Volek J., Skočilas J. Transient vibration of thin viscoelastic orthotropic plates // Acta Mechanica Sinica. 2011. Vol. 27. No.1. Pp. 98–107.
11. Papkov S.O. Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 192. No.6. Pp. 691–702.
12. Hsi-Hung Chang, Jiann-Quo Tarn. Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates // Journal of Elasticity. 2012. Vol. 108. No.1. Pp. 49–66.
13. Birman V. Mechanics of Composite Plates // Solid Mechanics and Its Applications. 2011. Vol. 178. Pp. 173–223.
14. Zenkour A.M., Allam M.N.M., Shaker M.O., Radwan A.F. On the simple and mixed first-order theories for plates resting on elastic foundations // Acta Mechanica. 2011. Vol. 220. No.1–4. Pp. 33–46.
15. Lacarbonara W. Nonlinear Structural Mechanics: Theory, Dynamical Phenomena and Modeling. 2013. 879 p.
16. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Гостстройиздат, 1958. 503 с.
17. Усаров М.К. Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4. С.40–47.
18. Усаров М.К. Изгиб толстых пластин // Вестник ТашИИТ. 2008. №2. С.30–35.
19. Усаров М.К. Изгиб анизотропной пластины // Проблемы механики. 2009. №2–3. С.34–37
20. Усаров М.К. Вынужденные колебания толстых пластин // Проблемы механики. 2010. №3. С.15–18.

Махаматали Корабоевич Усаров, г. Ташкент, Узбекистан
Тел. раб.: +7(871)2627132; эл. почта: umakhamatali@mail.ru

© Усаров М.К., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.9

Метод начальных функций в модели упругого многослойного основания под действием нормальной локальной нагрузки

К.т.н., старший научный сотрудник Г.Н. Ширунов,
ООО «ТЕКТОН»

Аннотация. Методом начальных функций (МНФ) решена пространственная задача теории упругости сжатия изотропного слоя нормальной нагрузкой, равномерно распределенной на ограниченной области границы. Данный слой, разделенный на отдельные подслои, имеющие разные упругие характеристики, служит моделью многослойного основания. Выделенный из бесконечного слоя параллелепипед, размеры которого много больше размера области локальной нагрузки, рассматривается как упругое полупространство.

С помощью специально разработанной программы на основе комплекса символьных вычислений Maple получено численно-аналитическое решение, в котором искомые функции перемещений представлены рядами Фурье. Проблема вычислительной неустойчивости счета, присущая МНФ при высоких номерах гармоник, решается использованием в представлении вещественных чисел мантиссы достаточной длины.

Проведено сравнение полученных результатов с решениями классической теории упругости для упругого полупространства, заложенными в нормативные документы по проектированию оснований фундаментов, а также с решениями, получаемыми с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: теория упругости; упругий слой; упругое полупространство; метод начальных функций; численно-аналитическое решение; многослойное основание; метод конечных элементов

Введение

Метод начальных функций, разработанный отечественными учеными А.С. Малиевым [1] и В.З. Власовым [2, 3], применяется для решения различных двумерных и пространственных задач теории упругости [4–8]. Относящийся к классу методов функций общего решения МНФ позволяет получать аналитические решения, в том числе и точные [9, 10], для канонических областей, таких как цилиндр, плоский прямоугольник, параллелепипед. Практическая реализация метода ограничивалась моделями, в которых функция нагрузки, описываемая рядами Фурье, была плавно меняющейся и задавалась на всей границе области. В этом случае для удовлетворительного описания не требуется удерживать в рядах разложения большое количество членов. Такого рода ограничения вызваны проблемой неустойчивости счета, которая увеличивается с ростом номеров гармоник и относительной высотой (толщиной) объекта [11, 12]. Приемы, применявшиеся для преодоления проблемы неустойчивости [13, 14], давали ограниченный эффект.

Современные возможности компьютерного моделирования, такие как комплекс символьных вычислений Maple, позволяют решать указанную проблему неустойчивости счета путем наращивания мантиссы в представлении вещественных чисел до необходимой длины. В связи с этим границы применения МНФ к решению практических задач значительно расширились. Кроме того, полученные в замкнутой форме на основе подхода В.А. Агарёва [15] операторы метода начальных функций существенно снижают время счета, что также расширяет возможности метода.

Ранее в работах [16, 17] методом начальных функций в декартовой системе координат получено решение задачи теории упругости для линейно-деформируемого изотропного слоя, нагруженного нормальным сжимающим давлением на верхней грани, распределенным на локальном участке. Выделенный из бесконечного в плане периодически нагруженного слоя параллелепипед, размеры которого значительно превышают размеры грузовой площади, может трактоваться как упругое полупространство. Такая модель может использоваться в практических расчетах оснований фундаментов, подобно тому, как это делается в механике грунтов, свойства которых могут быть приняты линейно-упругими [18].

Метод начальных функций позволяет удобно строить решения задачи теории упругости для многослойной области, в которой границы слоев параллельны начальной плоскости МНФ [6, 7, 8, 9, 13].

В данной работе в рамках развития МНФ впервые решена пространственная задача теории упругости для изотропной области в виде параллелепипеда, где внешняя нагрузка, в отличие от известных решений МНФ для толстых плит [6, 10, 23], приложена не на всей грани, а на малом квадратном участке. При этом рассматриваемая область разделена на горизонтальные слои с различными упругими характеристиками. Предлагаемая модель может использоваться для расчета на действие локальной нагрузки упругого многослойного основания с неограниченным количеством слоев. Впервые для решения задачи многослойного основания применяются операторы МНФ в замкнутой форме, полученные на основе подхода В.А. Агарёва. Как аналитический метод МНФ является альтернативным по отношению к численным методам, например к МКЭ, и результаты расчета могут служить в качестве сравнительного эталона при конечно-элементном моделировании. В отличие от численного расчета решение задачи в аналитическом виде позволяет исследовать экстремальные значения и другие особенности компонентов НДС.

В качестве примера рассмотрена постановочная задача о нагружении трехслойного параллелепипеда, нагруженного в центре верхней грани на квадратном участке равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1). Выполнено сравнение полученных числовых результатов с расчетами по нормативной методике СНиП по определению осадок фундаментов, а также с решением МКЭ, реализованным с помощью комплекса SCAD.

Постановка задачи

Примем, что на границе слоев выполняются условия полного контакта, т. е. компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС), существующие на плоскостях, перпендикулярных оси *z*, непрерывны.

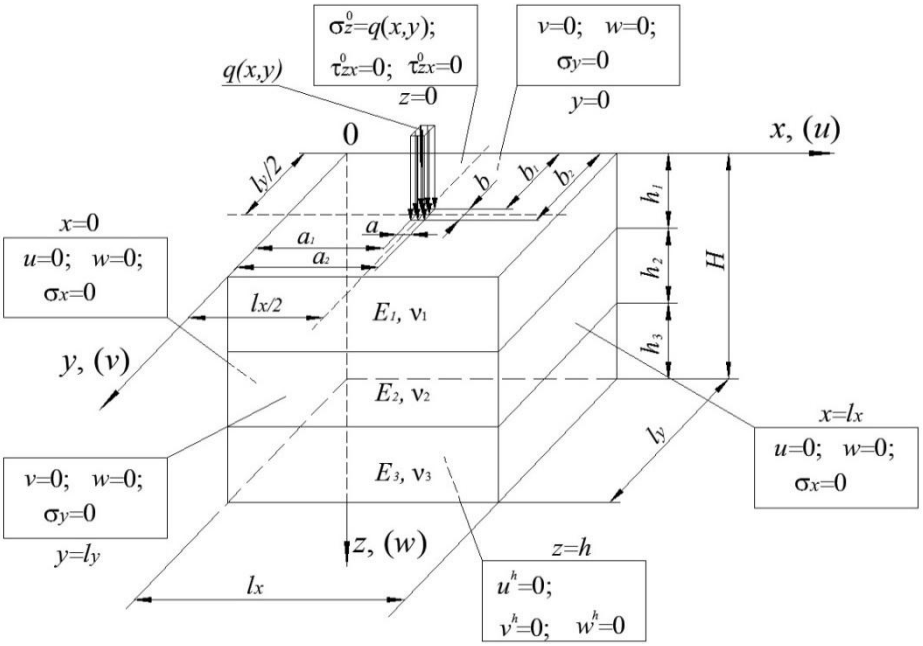


Рисунок 1. Расчетная схема параллелепипеда. Граничные условия

В соответствии с алгоритмом МНФ основное соотношение метода записывается в виде:

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{U}$ – вектор компонентов напряженно–деформированного состояния $\mathbf{U} = u, v, w, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; $\mathbf{U}^0$ – вектор начальных функций, определенных на начальной плоскости при $z = 0$, $\mathbf{U}^0 = u^0, v^0, w^0, \sigma_z^0, \tau_{yz}^0, \tau_{xz}^0$; $\mathbf{L}$ – матрица операторов МНФ, представляющих комбинации гиперболических функций синусов и косинусов.

Начальные функции вектора $\mathbf{U}^0$ раскладываются в двойные тригонометрические ряды Фурье по планарным координатам *x* и *y*. С помощью вектора начальных функций, представленного в виде:

$$\mathbf{U^0} = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u^0_{mn} \cos\alpha_m x \sin\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v^0_{mn} \sin\alpha_m x \cos\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w^0_{mn} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^0_{zmn} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \tau^0_{yzmn} \sin\alpha_m x \cos\beta_n y \\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tau^0_{xzmn} \cos\alpha_m x \sin\beta_n y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\alpha_m = \frac{m\pi}{l_x}, \beta_n = \frac{n\pi}{l_y}$, строится решение «в синусах». Значения операторов матрицы $\mathbf{L}$ на функциях вектора $\mathbf{U}^0$ обозначаем $\bar{L}_{ij}$ i=1…9, j=1…6, они получены ранее в работах [21, 22].

На начальной плоскости – верхней грани параллелепипеда при z = 0 – приняты следующие граничные условия: $\tau^0_{yz} = 0, \tau^0_{xz} = 0, \sigma^0_z = q\ \ x, y$. Точки нижней грани параллелепипеда при $z = H$ неподвижны: $u(x,y,h)$=0, $v(x,y,h)$=0, $w(x,y,h)$=0.

Система разрешающих уравнений, удовлетворяющая граничным условиям на грани $z = H$ и позволяющая определить неизвестные начальные функции, строится следующим образом. Воздействием операторов матрицы $\mathbf{L}$, в которой задано $z_1 = h_1$, модуль упругости E равен значению модуля упругости первого слоя E_1, коэффициент Пуассона $\nu = \nu_1$, на начальные функции $\mathbf{U}^0$ определяются на границе первого и второго слоев функции компонентов НДС. Шесть из них, $u\ v\ w\ \sigma_z\ \tau_{yz}\ \tau_{xz}$, составляют вектор $\mathbf{U}^1$ и являются начальными функциями для нижележащего второго слоя. Приняв начало координат на границе между первым и вторым слоями, воздействуем $\mathbf{L}$ при $z_2 = h_2$, $E = E_2$, $\nu = \nu_2$ на $\mathbf{U}^1$ и получим вектор начальных функций $\mathbf{U}^2$ для третьего слоя. Таким образом, последовательно по слоям удовлетворим заданным граничным условиям на нижней грани последнего слоя при $z_3 = h_3$. Используем основное соотношение МНФ (1) в матричном виде и запишем разрешающую систему уравнений:

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{L}}\ h_3, E_3, \nu_3\ \bar{\mathbf{L}}\ h_2, E_2, \nu_2\ \bar{\mathbf{L}}\ h_1, E_1, \nu_1\ \mathbf{U}^0, \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{L}}$ – матрица значений операторов МНФ.

Далее для каждого члена разложения двойного тригонометрического ряда Фурье функции нагрузки:

$$\sigma^0_z = P\ \ x, y\ = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\ \alpha_m x\ \sin\ \beta_n y\ , \quad (4)$$

решается неоднородная система алгебраических уравнений вида (3) относительно неизвестных коэффициентов разложения начальных функций u^0_{mn}, v^0_{mn} и w^0_{mn}. Все компоненты НДС также находятся из соотношения (3).

Нагрузка

Коэффициенты разложения двойного тригонометрического ряда Фурье для равномерно распределенной нагрузки, действующей на прямоугольном участке, имеют вид:

$$q_{mn} = \frac{4q}{\pi^2 n m}\left(\left(\cos\left(\frac{a_1 m\pi}{l_x}\right) - \cos\left(\frac{a_2 m\pi}{l_x}\right)\right)\times\left(\cos\left(\frac{b_1 n\pi}{l_y}\right) - \cos\left(\frac{b_2 n\pi}{l_y}\right)\right)\right). \quad (5)$$

Для ускорения сходимости ряда (4), сглаживания колебаний функции $P(x,y)$ и уменьшения явления Гиббса в точках разрыва использованы σ-множители Ланцоша [23, 24]. Их применение заменяет частичную сумму ряда (4) тригонометрическим полиномом, в котором каждый член домножается на поправочный множитель $\frac{\sin\frac{\pi m}{M}}{\frac{\pi m}{M}}$ (где M – количество удерживаемых членов). Полученная таким образом функция заменяет собой раскладываемую в ряд Фурье функцию и представляет значения локальной средней арифметической величины исходной функции. Это существенно уменьшает осцилляции частичной суммы ряда (4) и снижает эффект Гиббса на концах участка при $x = a_1, a_2$; $y = b_1, b_2$.

В описании нагрузки удерживается 201 член ряда (4), а для преодоления вычислительной неустойчивости длина мантиссы назначена в 400 значащих цифр. Такая длина определена по результатам серии вычислительных экспериментов, где критерием достаточной точности является удовлетворение заданным граничным условиям на грани $z = H$. Если абсолютные значения заданных нулевыми нормальных и касательных напряжений на нижней грани не превосходили 10^{-6}, то длина мантиссы принималась достаточной.

Результаты расчетов

В числовом примере рассмотрено трехслойное грунтовое основание с упругими характеристиками слоев:

модули упругости – E_1 = 20 МПа, E_2 = 10 МПа, E_3 = 25 МПа, коэффициенты Пуассона – ν_1 = 0,3, ν_2 = 0,35, ν_3 = 0,42. Размеры выделяемого параллелепипеда: полная высота H = 12 м при толщине слоев $h_1 = h_2 = h_3$ = 4 м, размеры в плане – $l_x = l_y$ = 12 м. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки q^0 принята равной 0,1 МПа, размеры грузовой площадки 1,2×1,2 м, что составляет 1/10 длин граней параллелепипеда.

Функция вертикальных перемещений w (МНФ) по глубине толщи под центральной точкой грузовой площадки имеет характерные изломы на границе слоев (рис. 2).

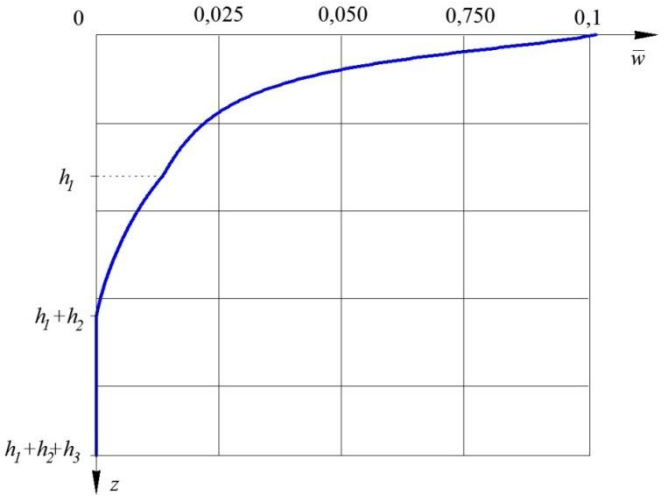


Рисунок 2. Эпюра относительных перемещений $\bar{w} = w\frac{E_1}{|q|H}$ по глубине сжимаемой толщи

Расчетная схема конечно-элементной модели построена в комплексе SCAD с использованием объемных 8-узловых конечных элементов с тремя степенями свободы в узле. Граничные условия модели приняты аналогичными тем, что реализуются МНФ. Минимальный размер объемных конечных элементов принят равным 0,2×0,2×0,2 м, что составляет 1/6 стороны грузовой площадки $a(b)$.

Вертикальные перемещения поверхности при z = 0 (осадка) определены по формулам СНиП послойным суммированием с использованием приема угловых точек (принципа суперпозиции). Глубина сжимаемой толщи разделена на 48 участков (по 0,25 м). На рисунке 3 показаны эпюры вертикальных перемещений верхней грани параллелепипеда w (z = 0, $y = l_y/2$, x), полученные на основе МНФ, МКЭ и по формулам СНиП.

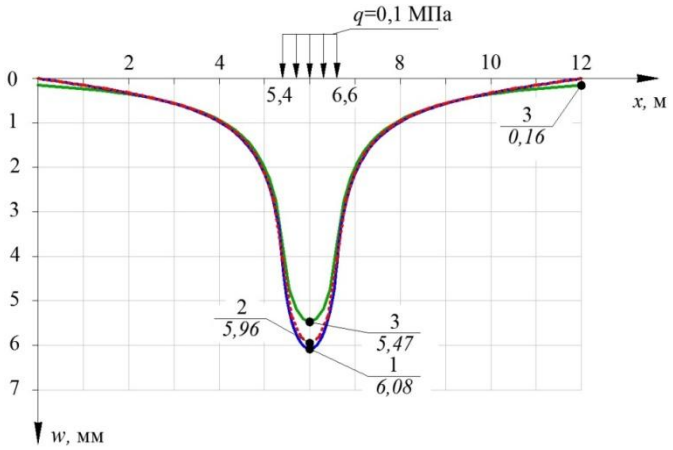


Рисунок 3. Эпюры вертикальных перемещений (осадка) *w* по центральной линии грузовой площадки: 1 – МНФ, 2 – МКЭ, 3 – СНиП

Распределения по глубине толщи напряжений σ_z, получаемые из трех решений, очень близки. Отличия в эпюрах нормальных напряжений σ_x и σ_y по глубине, полученных на основе МНФ и МКЭ, существенны на границе слоев и составляют 20 %. Отметим, что в аналитическом решении МНФ функция $\sigma_x(z)$ претерпевает разрывы на границах слоев, а в численном, полученном МКЭ, остается непрерывной (рис. 4).

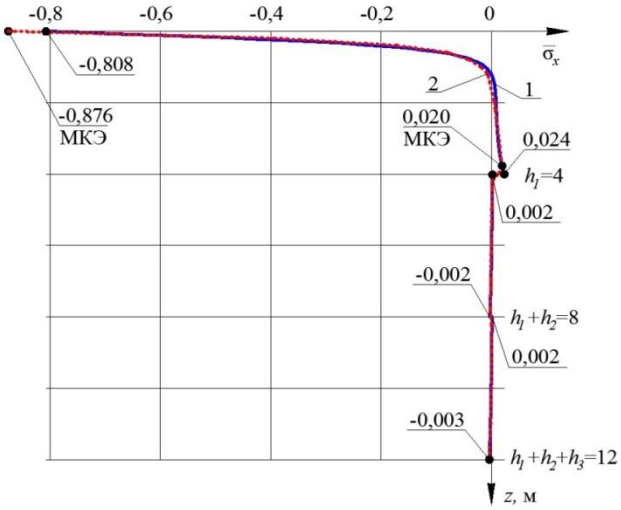


Рисунок 4. Эпюры относительных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_x = \dfrac{\sigma_x}{|q|}$ по глубине толщи в центре грузовой площадки: 1 – МНФ , 2 – МКЭ

Заключение

Полученное численно-аналитическое решение дает близкие значения для вертикальных перемещений w (осадки) и нормальных напряжений σ_z как в сравнении с расчетами по СНиП, так и с МКЭ. Отличия в распределении других компонентов НДС с решением МКЭ связаны, по-видимому, с недостаточно мелкой сеткой разбиения расчетной схемы. Это определенным образом подчеркивает преимущества численно-аналитического решения по сравнению с численным расчетом, в котором изначально неизвестно, какую сетку следует принять. Предложенное решение может служить дополнительным сравнительным ориентиром при разработке моделей численных методов.

Литература

1. Малиев А.С. О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Сб. науч. тр. / Ленингр. электротехн. ин-т инж. жел.-дор. транспорта. 1952. Вып. 4. С. 180–244.
2. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Серия ОТН. 1955. №7. С. 49–69.
3. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматлит, 1960. 491 с.
4. Матросов А.В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. №2. С. 55–65.
5. Матросов А.В. Численно-аналитический алгоритм решения задач плоской деформации линейно-упругих тел сложной конфигурации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2008. №3. С. 70.
6. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures // Composite Structures. 1997. Vol. 39. No. 3–4. Pp. 255–262.
7. Galileev S.M., Matrosov A.V., Verizhenko V.E. Method of initial functions for layered and continuously inhomogeneous plates and shells // Mechanics of Composite Materials. 1995. Vol. 30. No.4. Pp. 386–392.
8. Patel R., Dubey S.K., Pathak K.K. Analysis of Composite Beams using Method of Initial Functions // International Journal of Advanced Structures and Geotechnical Engineering. 2012. Vol. 1. No. 2. Pp. 83–86.
9. Galileev S. M., Matrosov A. V. Exact solutions for layered plates and shells // 3RD EUROMECH Solid Mechanics Conference, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 18-22 August. 1997. P. 259.
10. Ширунов Г.Н. Точные решения задачи теории упругости для проверки практической сходимости конечно-элементных моделей // Вестник гражданских инженеров. 2013. №6(41). С. 53–57.
11. Матросов А.В. Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. №4. С. 30–39.
12. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures // Composite Structures. 1997. Vol. 39. No. 3–4. Pp. 255–262.
13. Ширунов Г.Н., Якушев Б.Э. Изгиб несимметричных по высоте сечения многослойных анизотропных балок / ЛИСИ. Л., 1988. 19 с. Деп. Во ВНИИС 6.01.88, № 8461.
14. Матросов А.В. Устойчивый алгоритм метода начальных функций для расчета слоистых плит // Сборник научных трудов. СПб.: СПбГУВК, 1996. С. 260–267.
15. Агарёв В.А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1963. 203 с.
16. Shirunov G.N. A method of initial functions in analyzing a stress of an elastic layer // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). St.-Petersburg State University of Architecture & Civil Engineering, St. Petersburg, Russia; IEEE (IEEE Catalog number CFP14BDA–USB). 2014. С. 166–167.
17. Ширунов Г.Н. Анализ напряженно–деформированного состояния упругого слоя под действием локальной нагрузки методом начальных функций // Вестник гражданских инженеров. 2014. №5(46). С. 58–67.
18. Цытович Н.А. Механика грунтов. М.: Госстройиздат, 1963. 636 с.
19. Матросов А.В., Ширунов Г.Н. Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 256–262.
20. Матросов А.В., Ширунов Г.Н. Алгоритмы получения замкнутых форм операторов метода начальных функций для пространственных задач теории упругости // Вестник гражданских инженеров. 2014. №1(42). С. 136–144.
21. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Перевод с англ. Кайнера М.З. М.: Физматгиз., 1961. 524 с.
22. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. 538 с.
23. Усаров М.К. Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4. С. 40–47.

Гурий Николаевич Ширунов, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)6429807; эл. почта: guriyn@mail.ru

© Ширунов Г.Н., 2015

Требования к материалам, представляемым к публикации

Материалы принимаются только через систему электронной редакции журналов СПбГПУ. Авторам необходимо зарегистрироваться в системе (http://journals.spbstu.ru/) и подать статью через нее, предварительно ознакомившись с нижеприведенными требованиями и условиями опубликования. Публикация в журнале бесплатна для авторов.

Этические нормы и авторские права

Подавая статью в журнал, автор соглашается на условия лицензионного договора, в частности, на то, что все статьи без исключения публикуются в открытом доступе на сайте журнала и в Научной электронной библиотеке России. Также автор подтверждает, что статья является оригинальной, ранее не опубликованной, содержит только проверенные и точные данные; любые данные, полученные не автором, имеют соответствующие ссылки на источник.

Тематика статей

В «Инженерно-строительном журнале» публикуются оригинальные, ранее не опубликованные статьи, содержащие полученные авторами новые научные результаты, по тематике «Строительство». Статьи принимаются в тот или иной номер в соответствии с тематикой на текущее полугодие.

№	Дата выхода	Срок подачи материалов	Тема номера
2(54)	27.03.2015	16.02.2015	Технология и организация строительства. Строительные материалы и изделия
3(55)	30.04.2015	16.03.2015	Гидротехническое строительство. Основания и фундаменты
4(56)	26.06.2015	11.05.2015	Сопротивление материалов. Строительная механика
5(57)	24.08.2015	10.07.2015	Строительные конструкции и сооружения. Промышленное и транспортное строительство

Структура и содержание статей

Обязательны следующие элементы статьи: введение, включающее обзор иностранной и отечественной литературы и постановку задачи; основная часть (описание исследования); заключение, включающее нумерованные выводы; список литературы; источник финансирования (если есть).

Технические требования к статьям

Статьи подаются в формате docx (MS Word 2007–2013). Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст, без названия, списка литературы, фамилий и данных авторов. Все эти поля заполняются отдельно при подаче через электронную редакцию.

Рекомендуемый объем статей: от 15000 до 30000 знаков с пробелами. Таблицы выполняются средствами Word (не рисунками) и располагаются внутри текста статьи. Иллюстрации должны быть представлены в отдельных графических файлах (один рисунок – один файл). Допустимые форматы: JPEG, TIFF, BMP. В текстовый файл иллюстрации можно вставить для обозначения рекомендуемого места их использования.

Список литературы на русском языке должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Цитируемая литература приводится общим списком в конце статьи в порядке упоминания. Порядковый номер в тексте заключается в квадратные скобки. Текст статьи должен содержать ссылки на все источники из списка литературы. Также к статье прилагается список литературы на латинице, оформленный в соответствии с инструкцией по транслитерации списка литературы, размещенной на сайте издания.

Аннотация к статье

В журнал подается расширенная аннотация на двух языках: русском и английском. Особое внимание следует уделить аннотации на английском языке (если статья на русском). Аннотация должна повторять структуру статьи: актуальность, цель, методика, результаты, выводы. Аннотация должна содержать от 100 до 250 слов.

Подробные требования к статьям см. на сайте журнала:
http://www.engstroy.spb.ru/autors.html

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Инженерно-строительный институт
Центр дополнительных профессиональных программ

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
тел/факс: 552-94-60, www.stroikursi.spbstu.ru,
stroikursi@mail.ru

Приглашает специалистов проектных и строительных организаций,
не имеющих базового профильного высшего образования
на курсы профессиональной переподготовки (от 500 часов)
по направлению «Строительство» по программам:

П-01 «Промышленное и гражданское строительство»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Основы проектирования зданий и сооружений***
- ***Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD***
- ***Автоматизация сметного дела в строительстве***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций технического заказчика***

П-02 «Экономика и управление в строительстве»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Экономика и ценообразование в строительстве***
- ***Управление строительной организацией***
- ***Организация, управление и планирование в строительстве***
- ***Автоматизация сметного дела в строительстве***

П-03 «Инженерные системы зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы механики жидкости и газа***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем вентиляции и кондиционирования***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем отопления и теплоснабжения***
- ***Проектирование, монтаж и эксплуатация систем водоснабжения и водоотведения***
- ***Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD***
- ***Электроснабжение и электрооборудование объектов***

П-04 «Проектирование и конструирование зданий и сооружений»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы сопротивления материалов и механики стержневых систем***
- ***Проектирование и расчет оснований и фундаментов зданий и сооружений***
- ***Проектирование и расчет железобетонных конструкций***
- ***Проектирование и расчет металлических конструкций***
- ***Проектирование зданий и сооружений с использованием AutoCAD***
- ***Расчет строительных конструкций с использованием SCAD Office***

П-05 «Контроль качества строительства»

Программа включает учебные разделы:

- ***Основы строительного дела***
- ***Инженерное оборудование зданий и сооружений***
- ***Технология и контроль качества строительства***
- ***Проектирование и расчет железобетонных конструкций***
- ***Проектирование и расчет металлических конструкций***
- ***Обследование строительных конструкций зданий и сооружений***
- ***Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика***

По окончании курса слушателю выдается диплом о профессиональной переподготовке установленного образца, дающий право на ведение профессиональной деятельности