

doi: 10.5862/MCE.61.4

Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей

The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels

*Д-р физ.-мат. наук, профессор
М.Н. Кирсанов,
Национальный исследовательский
университет "МЭИ", г. Москва, Россия*

*M.N. Kirsanov,
National Research University "Moscow Power
Engineering Institute", Moscow, Russia*

Ключевые слова: ферма; прогиб; метод индукции; точное решение; Maple; ферма «Молодечно»

Key words: truss, deflection; induction method; exact solution; Maple

Аннотация. Получено аналитическое выражение для прогиба и усилий в стержнях типовой плоской фермы балочного типа в упругой стадии. Замечено, что метод индукции, апробированный для широкого класса плоских и упругих регулярных ферм, не дает непосредственного компактного результата для ферм с наклонным верхним поясом. Разложение прогиба в ряд по малому параметру, характеризующему наклон, пригодно лишь для весьма малых наклонов, не характерных для реального практического применения. В формулы, выведенные для усилий в стержнях фермы, входят размеры фермы, номер стержня в поясе или решетке и число панелей. Найдены асимптотики решения для прогиба с учетом различной жесткости стержней (уклон верхнего пояса произвольный). Все аналитические преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple.

Abstract. We have obtained an analytical expression for the deflection and forces in the rods of a flat truss of beam type in the elastic stage. We found that the induction method, which has been tested for a wide class of two-dimensional elastic and regular trusses, does not yield a direct and compact result for trusses with an inclined upper chord. Decomposing the deflection into a series of a small parameter characterizing the slope is only suitable for very small tilts that are not typical for real practical application. The formulas for the forces in the rods of the truss include the geometrical and physical parameters, the number of a rod in the belt or grid, and the number of panels. The asymptotics of the solution for the deflection taking into account the different rod stiffnesses (the slope of the upper belt is random) were found. All the analytical transformations were executed in the Maple computer algebra system.

Введение

Преимущество аналитических решений в строительной механике неоспоримо. Чем больше входит в такое решение параметров конструкции, чем универсальней постановка задачи, тем больший теоретический и практический смысл имеет такое решение. Обычные расчеты для конкретной фермы, в которые в качестве параметров входят размеры конструкции и величины нагрузок, не сложны, доступны для студентов, изучающих азы строительной механики, и имеют ограниченное применение. Обобщение же решения на произвольное число стержней или панелей требует использования пакетов символьной математики с применением метода индукции [1, 2]. Известны такие решения для регулярных систем, где можно выделить классы стержней одинаковой длины. Метод индукции дает гарантированный успех, если с увеличением параметра индукции (например, числа панелей), количество этих классов не растет. Например, для балочной фермы с параллельными поясами и произвольной решеткой количество таких классов составляет от двух (треугольная решетка без вертикальных стоек) до пяти-шести (шпренгельные решетки), Kirsanov M.N. Tochnyye formuly dlya rascheta progiba i usilii v stержnyakh tipovoy fermy «Molodechno» s proizvolnym chislom paneley [The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41. doi: 10.5862/MCE.61.4

один из которых – это стержни нижнего и верхнего пояса. В результате в формулу для прогиба, рассчитанного по формуле Максвелла–Мора для упругих ферм, войдет ровно столько коэффициентов, зависящих от числа панелей, сколько классов длин стержней. В настоящей работе на примере стандартной фермы типа «Молодечно» [3, 4], широко используемой в практике, сделана попытка получить аналитическое решение для случая, когда с увеличением числа панелей неограниченно растет число классов длин стержней. Выбор типа исследуемой фермы связан с ее широким применением в практике. Исследования прочности и долговечности узловых соединений гнутосварных профилей фермы «Молодечно» проведены, в частности, в [4–10]. Для оптимизации формы подобных плоских ферм широко используются различные методы [10–14], в том числе методы нечеткой логики [15] и генетические алгоритмы [16–21].

Схема фермы

Рассмотрим ферму с треугольной решеткой, моделирующую типовую ферму «Молодечно» (рис. 1). Длину панели характеризует параметр a , высоту – b , уклон верхнего пояса – c . Конструкция статически определимая. Действительно, в ферме, состоящей из $k = 2n + 1$ панелей, число стержней $m = 8n + 10$, включая три стержня, моделирующие неподвижные опоры. Число шарниров равно $4n + 5$, следовательно, система уравнений равновесия, содержащая по два уравнения равновесия в проекциях на оси координат для каждого узла, замкнута.

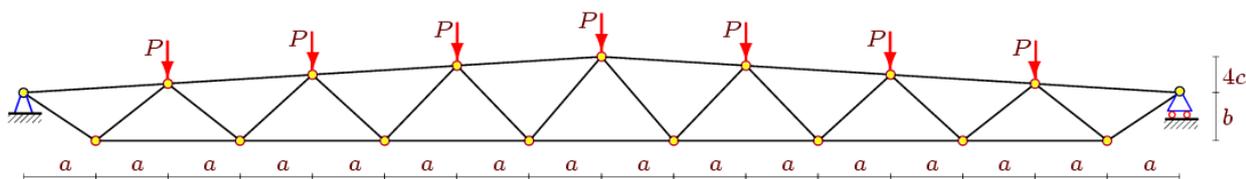


Рисунок 1. Ферма. $n = 3$, $k = 7$

Математическая модель. Система уравнений

Усилия в стержнях фермы, нагруженной по верхнему поясу равномерной нагрузкой, определим методом вырезания узлов [22]. Для вычисления проекций усилий на оси координат потребуются направляющие косинусы усилий, которые удобно находить, зная координаты концов стержня. Шарниры фермы пронумеруем сначала по нижнему поясу слева направо, затем – по верхнему. Начало координат расположим в левой опоре:

$$x_i = (2i - 1)a, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n + 2,$$

$$x_{i+2n+2} = 2(i - 1)a, \quad i = 1, \dots, 2n + 3,$$

$$y_{i+2n+2} = y_{4n+6-i} = b + c(i - 1), \quad i = 1, \dots, n + 2.$$

Порядок соединения узлов и стержней решетки фермы зададим условными векторами \bar{V}_i , $i = 1, \dots, m$. Компонентами этих векторов являются номера шарниров по их концам. Направления конфигурационных векторов произвольны, служат только для задания структуры соединений стержней и шарниров и не влияют на правило знаков усилий, которое остается общепринятым: сжатые стержни имеют отрицательные усилия, растянутые – положительные. Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы:

$$\bar{V}_i = [i, i + 1], \quad i = 1, \dots, 2n + 1,$$

Для стержней верхнего пояса:

$$\bar{V}_{i+2n+1} = [i + 2n + 2, i + 2n + 3], \quad i = 1, \dots, 2n + 2.$$

Для раскосов решетки (восходящих и нисходящих):

$$\bar{V}_{i+4n+3} = [i, i + 2n + 2], \quad \bar{V}_{i+6n+5} = [i, i + 2n + 3], \quad i = 1, \dots, 2n + 2.$$

Длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

В номере $V_{i,j}$ первый индекс i – это номер стержня, второй – номер компоненты вектора \bar{V}_i принимает значение 1 (условное начало стержня-вектора) или 2 (условный конец стержня). Матрица направляющих косинусов \mathbf{G} имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq m, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq m, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Систему линейных уравнений равновесия узлов запишем в матричной форме

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{Y}. \quad (1)$$

Здесь \bar{S} – вектор неизвестных усилий длиной m , \bar{Y} – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы Y_{2i-1} , вертикальные – в четные Y_{2i} . Решение находим с помощью обратной матрицы $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{Y}$. Данный метод особенно удобен при неоднократном решении системы с разными правыми частями. При определении перемещения узлов система уравнений решается дважды: один раз при вычислении усилий от действия внешней нагрузки, другой – от действия единичной силы, приложенной к заданному узлу, перемещение которого определяется.

Расчет

Найдем формулу зависимости прогиба середины пролета фермы от числа панелей и ее геометрических параметров. Используем систему компьютерной математики Maple [23–25]. Усилия в стержнях фермы от внешней нагрузки, приложенной к верхнему поясу, обозначим $S_{i,P}$, а усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета – s_i . Жесткости EF всех стержней принимаем одинаковыми, деформациями опорных стержней пренебрегаем. Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла–Мора

$$\Delta = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^m S_{i,P} s_i l_i. \quad (2)$$

В общем случае для произвольных значений размера c аналитическое решение получается громоздким, поэтому выпишем результат, раскладывая решение в ряд по малым значениям c . Решение содержит только нечетные степени c . Учтем только первую степень:

$$\Delta = \frac{P(n+1)}{b^2} \left(B_{1,n} a^3 + B_{2,n} d^3 - \frac{C_{1,n} a^2 d + C_{2,n} d b^2 + C_{3,n} a^3}{b} c \right), \quad (3)$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Для разложения в ряд по c использован оператор `mtaylor` системы Maple. Коэффициенты C_1, C_2, C_3 получены индуктивным методом и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 B_{1,n} &= (10n^2 + 20n + 9)(n + 1) / 3, \\
 B_{2,n} &= n + 1, \\
 C_{1,n} &= (5n^2 + 10n + 6) / 3, \\
 C_{2,n} &= (2n + 3)(2n + 1) / 6, \\
 C_{3,n} &= (24n^4 + 96n^3 + 144n^2 + 96n + 25) / 5.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Формулы для общих членов последовательностей выведены обобщением решений 12 ферм с числом панелей от 1 до 12 в половине пролета. Если общий член последовательности $B_{2,n}$ очевиден, то в других случаях необходимо использовать аппарат преобразований системы Maple. Последовательность коэффициентов $C_{3,n}$, например, имеет вид: 77, 389, 1229, 15001/5, 6221, 11525, 19661, 31493, 240001/5, 70277, 99533, 137093. Рекуррентное уравнение

$$C_{3,n} = 5C_{3,n-1} - 10C_{3,n-2} + 10C_{3,n-3} - 5C_{3,n-4} + C_{3,n-5}$$

для общего члена этой последовательности найдено с помощью специального оператора `rgf_findrecur` из состава пакета `genfunc` системы Maple. Оператор `genfunc` требует для ввода четное число членов последовательности. Для других коэффициентов рекуррентное уравнение проще и имеет вид

$$C_{j,n} = 3C_{j,n-1} - 3C_{j,n-2} + C_{j,n-3}, j = 1, 2.$$

Решение рекуррентных уравнений дает оператор `rsolve`. Готовые формулы легко проверяются при других значениях числа панелей в численном режиме работы программы. Заметим, что для символьных преобразований при большом числе панелей требуется значительное время выполнения, быстро растущее с увеличением n .

Анализ решения

Численные расчеты показывают, что полученное аналитическое приближенное решение соответствует точному при малых значениях параметра c , характеризующего уклон верхнего пояса. При $b = 1,04 \text{ м}$, $a = 1,5 \text{ м}$, $c = a / 30$, $n = 3$ погрешность не превышает 6%. Заметим, что в практике используются фермы со значительно большим уклоном $c = a / 5$. Учет в разложении более высоких степеней c , вплоть до пятой, не *решает* проблему. С увеличением же числа панелей погрешность растет еще больше.

Зафиксируем длину пролета и суммарную нагрузку P_{sum} на ферму, положив усилие на каждый узел верхнего пояса зависящим от числа панелей

$$L = a(2n + 1), P = P_{sum} / (2n + 1). \tag{5}$$

Найдем следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta / n^2 = P_{sum} cd / (3b). \tag{6}$$

Эта величина имеет теоретическое значение при выборе схемы решетки. В зависимости от конструкции фермы рост прогиба как функции числа пролетов имеет различную степень [2]. На рисунке 3 представлены кривые зависимости относительного прогиба $\Delta' = EF \Delta / P_{sum}$ от числа панелей, полученные на основе (3), при $L = 20 \text{ м}$, $c = a / 40$ и условии (5); размеры даны в метрах.

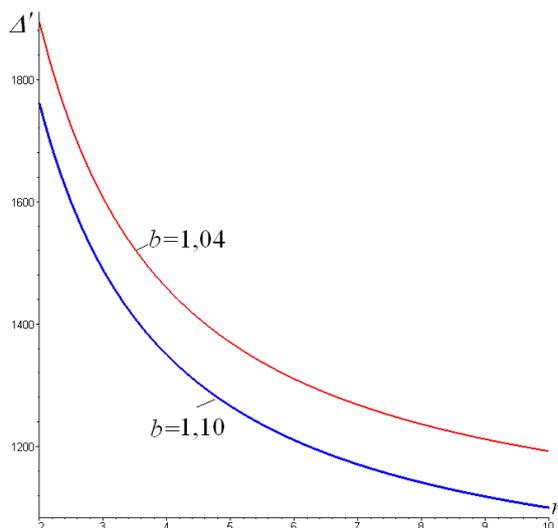


Рисунок 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Усилия в стержнях

Индуктивный метод позволяет получить формулу для усилия в каждом из стержней фермы без ограничения на малость параметра c , характеризующего уклон верхнего пояса. Необходимость таких формул возникает при расчете прочности стержней на разрыв и анализе устойчивости сжатых стержней. Кроме того, эти усилия необходимы для получения формулы для прогиба в виде конечной суммы, если вывести ее в общем случае для произвольного значения c не удастся, а разложение по малому параметру, как выяснилось, пригодно лишь для весьма небольших уклонов.

Для стержней нижнего пояса в результате индуктивного обобщения решений задачи метода вырезания узлов для десяти ферм имеем следующие формулы для усилий в стержнях $j = 1, \dots, n+1$ от действия распределенной по верхнему поясу нагрузки P :

$$U_j = Pa \frac{2jn + j(2-j)}{b + jc}. \quad (7)$$

Для стержней верхнего пояса:

$$O_j = -Pg \frac{2n(2j-1) - 2j^2 + 6j - 3}{2(2b + (2j-1)c)}, \quad g = \sqrt{4a^2 + c^2}. \quad (8)$$

Для нисходящих раскосов:

$$D_j^{(нис)} = P \frac{(b(2n - 2j + 3) - j(j-1)c)\sqrt{a^2 + (b + (j-1)c)^2}}{(2b + (2j-1)c)(b + (j-1)c)} \quad (9)$$

Для восходящих:

$$D_j^{(всх)} = -P \frac{(b(2n - 2j + 3) - j(j-1)c)\sqrt{a^2 + (b + jc)^2}}{(2b + (2j-1)c)(b + jc)}. \quad (10)$$

Формулы для усилий в стержнях от действия единичной силы имеют сходную структуру. Для усилий в стержнях нижнего пояса (растянутый) имеем положительные величины:

$$u_j = \frac{aj}{b + jc}, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Kirsanov M.N. Tochnyye formuly dlya rascheta progiba i usilij v sterzhnyakh tipovoy fermy «Molodechno» s proizvolnym chislom paneley [The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41. doi: 10.5862/MCE.61.4

Для стержней верхнего (сжатого) пояса усилия меньше нуля:

$$o_j = -\frac{g(2j-1)}{2(2b+(2j-1)c)},$$

Для нисходящих раскосов:

$$d_j^{(нис)} = \frac{b\sqrt{a^2+(b+(j-1)c)^2}}{(2b+(2j-1)c)(b+(j-1)c)}.$$

Для восходящих:

$$d_j^{(всх)} = -\frac{b\sqrt{a^2+(b+jc)^2}}{(2b+(2j-1)c)(b+jc)}.$$

Длины стержней легко вычисляются: $l_j^{(u)} = 2a$, $l_j^{(o)} = \sqrt{4a^2+c^2}$, $l_j^{(всх)} = \sqrt{a^2+(b+jc)^2}$, $l_j^{(нис)} = \sqrt{a^2+(b+(j-1)c)^2}$, $j = 1, \dots, n+1$.

Предельные значения прогиба

Аналитические выражения для усилий позволяют получить точное выражение для прогиба в конечной форме. Сумму, входящую в формулу Максвелла–Мора (2), удобно разбить на четыре: для стержней нижнего пояса $\Delta^{(u)}$, верхнего пояса $\Delta^{(o)}$, стержней решетки – нисходящие раскосы $\Delta^{(нис)}$ и восходящие $\Delta^{(всх)}$. Имеем общие выражения:

$$\Delta^{(u)} = \frac{2}{EF} \left(\sum_{i=1}^n U_i u_i l_i^{(u)} + U_{2n+1} u_{2n+1} a \right), \quad \Delta^{(o)} = \frac{2}{EF} \sum_{i=1}^{n+1} O_i o_i l_i^{(o)},$$

$$\Delta^{(нис)} = \frac{2}{EF} \sum_{i=1}^{n+1} D_i^{(нис)} d_i^{(нис)} l_i^{(нис)}, \quad \Delta^{(всх)} = \frac{2}{EF} \sum_{i=1}^{n+1} D_i^{(всх)} d_i^{(всх)} l_i^{(всх)}.$$

Указанные суммы имеют конечные, хотя и громоздкие, выражения, которые легко получаются в системе Maple оператором sum. Результат выражается через дигамму-функцию – логарифмическую производную гамма-функции. Эти формулы не имеет смысла выписывать, ими можно просто пользоваться, вычисляя суммы для конкретных значений числа панелей, что значительно точнее и быстрее прямого численного решения задачи. Предельные же величины при увеличении числа панелей вычисляются достаточно легко – с помощью оператора limit системы Maple. Зафиксируем суммарную нагрузку и длину пролета фермы (5). Имеем следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(u)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(o)} / n = 3g^2 / (8c), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(нис)} / n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(всх)} / n = -b / 8.$$

Этот результат позволяет оценить вклад отдельных элементов в общую деформативность конструкции. Слагаемое в сумме формулы Максвелла–Мора, соответствующее стержням нижнего пояса, с увеличением числа панелей уменьшается до нуля, остальные слагаемые выходят на асимптоту. Кроме того, разбиение суммы на четыре дает возможность получить решение для различных жесткостей стержней поясов и решетки. Результат будет в этом случае иметь вид

$$\Delta = \gamma_1 \Delta^{(u)} + \gamma_2 \Delta^{(o)} + \gamma_3 \Delta^{(нис)} + \gamma_4 \Delta^{(всх)}, \quad (11)$$

где коэффициенты $\gamma_k, k = 1, \dots, 4$ выражают жесткости различных стержней через некоторую заданную $EF_k = EF / \gamma_k$. Заметим, что предел (6), полученный по приближенной формуле, показывает иной характер роста прогиба – квадратичный, что лишний раз напоминает о необходимости осторожного обращения с формулами, найденными разложением в ряд по малому параметру.

Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.

Пример расчета

В таблице приведены результаты расчета усилий в стандартной ферме пролетом 24 м с уклоном $c/(2a)=10\%$ по формулам (7)–(10), в которых использованы значения $b=1,04$ м, $a=1,5$ м, $c=a/5$, $n=3$, $P=6$ кН. Результаты хорошо согласуются с данными [3] и близки [4], где предложен и рассчитан вариант фермы «Молодечно» с дополнительными вертикальными стойками.

Следует отметить характерную для таких ферм смену знака усилия в раскосе. Аналитическое решение (9) или (10) позволяет легко найти условие этой смены из решения уравнения $D_j^{(вкс)}=0$ или, что то же, $b(2n-2j+3)-j(j-1)c=0$. На номер панели j (первый столбец таблицы), где происходит смена знака, влияет главным образом отношение b/c . При $c=0$ смены знака не происходит.

Прогиб, вычисленный по формуле (11) при $\gamma_k=1$, $k=1, \dots, 4$, $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $F=3 \text{ см}^2$ и условной нагрузке $P=1$ кН, равен 0.014 м.

Таблица

j	U_j	O_j	$D_j^{(нвс)}$	$D_j^{(вкс)}$
панель	кН			
1	47.015	-26.603	32.211	-27.548
2	65.854	-57.669	13.902	-12.551
3	69.588	-68.216	2.998	-2.796
4	64.286	-67.079	-4.645	4.422

Выводы

Разложением в ряд по малому параметру аналитического решения, найденного методом индукции, получено приближенное выражение для прогиба фермы при малом уклоне верхнего пояса. Обнаружено, что ряд сходится весьма медленно, и решение справедливо лишь для узкого диапазона уклона. Однако усилия в стержнях удается найти в аналитической форме для произвольных параметров конструкции. Это позволяет обойти ограничения на уклон в методе разложения в ряд. Результат получается в виде конечных сумм и допускает простой предельный по числу панелей анализ. Найдены асимптоты решения с учетом разных жесткостей стержней фермы. Приведен пример расчета, дающий хорошее совпадение с известными результатами.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
2. Тинков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
3. Типовая документация на конструкции, изделия и узлы зданий и сооружений. Серия 1.460.3 – 23.98. Стальные конструкции покрытий производственных зданий из замкнутых гнутосварных профилей прямоугольного сечения пролетом 18, 24 и 30 м с уклоном кровли 10%.
4. Барановский М.Ю., Тарасов В.А. Стандартизированные ферменные конструкции с уклоном 10% пролетами 24, 30, 36 метров // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. №7(22). С. 92–106.
5. Левитанский И.В., Севрюгин В.В., Абрам З.П. Циклические испытания фланцевых соединений сварных ферм из гнутосварных профилей //

References

1. Kirsanov M.N. Analiz progiba reshchatoy balochnoy fermy raspornogo tipa [Analysis of the deflection of a strut-type lattice girder truss]. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 5. Pp. 58–65.(rus)
2. Tinkov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktsiy [Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection]. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 5. Pp. 66–73.(rus)
3. *Tipovaya dokumentatsiya na konstruktsii, izdeliya i uzly zdaniy i sooruzheniy. Seriya 1.460.3 - 23.98. Stalnyye konstruktsii pokrytiy proizvodstvennykh zdaniy iz zamknutykh gnutosvarnykh profiley pryamougolnogo secheniya proletom 18, 24 i 30 m s uklonom krovli 10%* [Typical documentation for design, products and units of buildings and structures. Series 1.460.3 - 23.98. Steel structure coatings industrial buildings of notowanых closed profiles of rectangular cross section with a span of 18, 24 and 30 m with a roof pitch 10%]. (rus)
4. Baranovskiy M.Yu., Tarasov V.A. Standartizirovannyye

Kirsanov M.N. Tochnyye formuly dlya rascheta progiba i usiliy v sterzhnyakh tipovoy fermy «Molodechno» s proizvolnym chislom paneley [The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41. doi: 10.5862/MCE.61.4

- Автоматическая сварка. 1987. №1. С. 56–59.
6. Семенов А.А., Мальяренко А.А., Порываев И.А., Сафиуллин М.Н. Напряженно-деформированное состояние высокопрочных болтов фланцевых соединений в укрупнительных стыках стропильных ферм // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 54–62.
 7. Шерстобитова Е.Г. Применение ферм покрытия из квадратных труб «на ребро» в условиях агрессивной среды // Наука ЮУрГУ. Секция технических наук : материалы 66-й науч. конф. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 1686–1690.
 8. Зинькова В.А., Солодов Н.В. Исследование напряженно-деформированного состояния бесфасоночных узлов трубчатых ферм [электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=11776> (дата обращения: 24.12.2015).
 9. Гимранов Л.Р. Исследование жесткости узла опирания профилированного настила на верхний пояс ферм из ГСП // Известия КазГАСУ. 2009. №1(11). С. 79–84.
 10. Марутян А.С. Оптимизация высот стропильных перекрестных стальных ферм // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №4(255). С. 25–34.
 11. Алпатов В.Ю., Холопов И.С. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций // Металлические конструкции. 2009. Т. 15. №1. С. 47–57.
 12. Gilbert M., Tyas A. Layout optimization of large-scale pin-jointed frames // Engineering Computations. 2003. Vol. 20. №8. Pp. 1044–1064.
 13. Kirsch U., Benardout, D. Optimal Design Of Elastic Trusses By Approximate Equilibrium // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1980. Vol. 22. Pp. 347–359.
 14. Afonso S.M., Horowitz B., Silva M.F. Performance of a physical surrogate in the sequential approximate optimization of space trusses // Engineering Computations. 2011. Vol. 28. №7. Pp. 912–938.
 15. Brown C.B., Yao, T.P. Fuzzy Sets And Structural Engineering // Journal of Structural Engineering. 1983. Vol. 109(5). Pp. 1211–1225.
 16. Rajan S.D. Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm // Journal of Structural Engineering. 1995. Vol. 121. №10. Pp. 1480–1487.
 17. Xu T., Zuo W., Xu T., Song G., Li R. An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization // Acta Mechanica Sinica. 2010. Vol. 26. №2. Pp. 225–234.
 18. Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Левкович Ф.Н., Тютюнников А.И. Структурно-параметрическая оптимизация стержневых металлических конструкций на основе эволюционного моделирования // Известия вузов. Строительство. 2005. №8. С. 16–24.
 19. Пелешко И.Д., Юрченко В.В. Использование генетических алгоритмов для поиска оптимальных проектных решений металлических конструкций // VIII Украинская научно-техническая конференция "Металлические конструкции: взгляд в прошлое и будущее" (18-22 октября 2004 г., Киев, Украина) / Сборник докладов, часть 1. К.: Сталь, 2004. С. 250–260.
 20. Ghasemi M.R., Hinton E., Wood R.D. Optimization of trusses using genetic algorithms for discrete and continuous variables // Engineering Computations. 1999. Vol. 16. №3. Pp. 272–303.
 21. Astudillo N. C., Vera R., Ruiz G. H., Cardenas R.A., Viramontes F.J. A long span bridge and a greenhouse roof truss structure optimized by means of a consistent genetic algorithm with a natural crossover // Engineering Computations. 2013. Vol. 30. №1. Pp. 49–73.
 - fermennyye konstruksii s uklonom 10% proletami 24, 30, 36 metrov [The standardized farm designs with 10% slope for 24, 30, 36 meters span]. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2014. No. 7. Pp. 92–106.(rus)
 5. Levitanskiy I.V. Sevryugin V.V. Abram Z.P. Tsiklicheskiye ispytaniya flantsevykh soyedineniy svarynykh ferm iz gnutosvanykh profiley [Cyclic testing of welded flange connections of truss from notowanykh profile]. *The Paton Welding Journal*. 1987. No. 1. Pp. 56–59.(rus)
 6. Semenov A.A., Malyarenko A.A., Poryvayev I.A., Safiullin M.N. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye vysokoprochnykh boltov flantsevykh soyedineniy v ukрупnitelnykh stykakh stropilnykh ferm[Stress-strain behavior investigation of friction grip bolts in flange joints of trusses]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No. 5. Pp. 54–62.(rus)
 7. Sherstobitova Ye.G. Primeneniye ferm pokrytiya iz kvadratnykh trub «na rebro» v usloviyakh agressivnoy sredy[Trusses of covering of square pipes "on the edge" in conditions of aggressive environment]. *Science YuUrGU. Section of technical Sciences : proceedings of the 66th scientific. Conf. Chelyabinsk. Publishing center SUSU*. 2014. Pp. 1686–1690. (rus)
 8. Zinkova V.A., Solodov N.V. Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya besfasonochnykh uzlov trubchatykh ferm [Investigation of the stress-strain state of non-faceted hubs tubular trusses] [online]. *Modern problems of science and education*. 2013. No. 6. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=11776> (Accessed: 24.12.2015) (rus)
 9. Gimranov L.R. Issledovaniye zhestkosti uzla opiraniya profilirovannogo nastila na verkhniy poyas ferm iz GSP [Study of the rigidity of the unit bearing profiled sheeting to the upper belt truss from SSE]. *News of the KSUAE*. 2009. No.1. Pp. 79–84. (rus)
 10. Marutyan A.S. Optimizatsiya vysot stropilnykh perekrestnykh stalnykh ferm [Optimization of heights truss steel trusses cross]. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2014. No. 4. Pp. 25–34. (rus)
 11. Alpatov V.Yu., Kholopov I.S. Optimizatsiya geometricheskoy formy prostranstvenno-sterzhnevyykh konstruksiy [Geometrical form optimization of space frame structures]. *Metal Constructions*. 2009. Vol. 15. No. 1. Pp. 47–57. (rus)
 12. Gilbert M., Tyas A. Layout optimization of large-scale pin-jointed frames. *Engineering Computations*. 2003. Vol. 20. No. 8. Pp.1044–1064.
 13. Kirsch U., Benardout, D. Optimal Design Of Elastic Trusses By Approximate Equilibrium. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1980. Vol. 22. Pp. 347–359.
 14. Afonso S.M., Horowitz B., Silva M.F. Performance of a physical surrogate in the sequential approximate optimization of space trusses. *Engineering Computations*. 2011. Vol. 28. No. 7. Pp. 912–938.
 15. Brown C.B., Yao, T.P. Fuzzy Sets And Structural Engineering. *Journal of Structural Engineering*. 1983. Vol. 109. Pp. 1211–1225.
 16. Rajan S.D. Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm. *Journal of Structural Engineering*. 1995. Vol. 121. No. 10. Pp. 1480–1487.
 17. Xu T., Zuo W., Xu T., Song G., Li R. An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization. *Acta Mechanica Sinica*. 2010. Vol. 26. No. 2. Pp. 225–234.
 18. Serpik I.N., Alekseytsev A.V., Levkovich F.N., Tyutyunnikov A.I. Strukturno-parametricheskaya optimizatsiya sterzhnevyykh metallicheskiy konstruksiy na osnove evolyutsionnogo modelirovaniya [Structural-parametric optimization of rod metal structures on the basis of evolutionary modeling]. *News of higher educational institutions. Construction*. 2005. No. 8. Pp. 16–24. (rus)

Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.

22. Carpinteri A. *Structural mechanics. A unified approach.* Taylor and Francis. London, New York. 1997. 761 p.
23. Кирсанов М. Н. *Maple и Maplet. Решение задач механики.* СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
24. Vivaldi F. *Experimental Mathematics with Maple.* Boca Raton, FL, United States: Chapman and Hall/CRC Mathematics, 2001. 240 p.
25. Голоскоков Д.П. *Практический курс математической физики в системе Maple.* СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
19. Peleshko I.D., Yurchenko V.V. *Ispolzovaniye geneticheskikh algoritmov dlya poiska optimalnykh proyektnykh resheniy metallicheskih konstruksiy [The use of genetic algorithms for finding optimal design solutions of metal structures] VIII Ukrainian scientific-technical conference "The metalwork: insight in the past and the future" (18-22 October 2004, Kyiv, Ukraine) / a Collection of papers, part 1.* Kiev. Stal'. 2004. Pp. 250–260.(rus)
20. Ghasemi M.R., Hinton E., Wood R.D. Optimization of trusses using genetic algorithms for discrete and continuous variables. *Engineering Computations.* 1999. Vol. 16. No. 3. Pp. 272–303.
21. Astudillo N. C., Vera R., Ruiz G. H., Cardenas R.A., Viramontes F.J. A long span bridge and a greenhouse roof truss structure optimized by means of a consistent genetic algorithm with a natural crossover. *Engineering Computations.* 2013. Vol. 30. No. 1. Pp. 49–73.
22. Carpinteri A. *Structural mechanics. A unified approach.* Taylor and Francis. London, New York. 1997. 761 p.
23. Kirsanov M. N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki [Maple, and Maplet. Solving mechanics problems].* Saint Petersburg. Izd-vo Lan'. 2012. 512 p. (rus)
24. Vivaldi F. *Experimental Mathematics with Maple.* Boca Raton, FL, United States. Chapman and Hall/CRC Mathematics. 2001. 240 p.
25. Goloskokov D.P. *Prakticheskiy kurs matematicheskoy fiziki v sisteme Maple [Practical course in mathematical physics in Maple].* Saint Petersburg. ParkKom. 2010. 644 p. (rus)

Михаил Николаевич Кирсанов,
+7(495)3627314; эл. почта:
mpei2004@yandex.ru

Mikhail Kirsanov,
+7(495)3627314; mpei2004@yandex.ru

© Кирсанов М.Н., 2016

Kirsanov M.N. *Tochnyye formuly dlya rascheta progiba i usiliy v sterzhnyakh tipovoy fermy «Molodechno» s proizvolnym chisлом paneley [The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels].* *Magazine of Civil Engineering.* 2016. No. 1. Pp. 33–41. doi: 10.5862/MCE.61.4